

电弹性理论

匡震邦 著




上海交通大学出版社
SHANGHAI JIAO TONG UNIVERSITY PRESS

巍巍交大 百年书香
www.jiaodapress.com.cn
bookinfo@sjtu.edu.cn



策划编辑／戴柏诚
责任编辑／冯寄湘
戴柏诚
封面设计／朱 懿



ISBN 978-7-313-06324-3
定价：98.00元

国家科学技术学术著作出版基金资助出版

电弹性理论

Theory of Electroelasticity

匡震邦 著

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书论述了压电材料和电致伸缩材料在机械和电载荷作用下的响应、强度、破坏和信号传播理论。全书共分 12 章，主要内容包括电弹性分析的基本理论和控制方程，均匀材料和裂纹体中的应力、应变、位移、电场、电位移、电势和温度的分布，应力波的传播等。

本书包括了作者及其合作者、部分国内学者和少数较重要的国外学者的工作成就，力争反映最新研究成果，有着明显的工程和社会意义。

本书可供力学、机械工程、智能控制和材料工程领域的研究人员和高校师生参考。

图书在版编目(CIP)数据

电弹性理论/匡震邦著. —上海：上海交通大学出版社，2011

ISBN 978-7-313-06324-3

Ⅰ.①电… Ⅱ.①匡… Ⅲ.①电动力学：弹性力学 Ⅳ.①O442

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2010)第 039846 号

电弹性理论

匡震邦 著

上海交通大学 出版社出版发行

(上海市番禺路 951 号 邮政编码 200030)

电话：64071208 出版人：韩建民

常熟市华通印刷有限公司印刷 全国新华书店经销

开本：787mm×1092mm 1/16 印张：29.5 字数：745 千字

2011 年 4 月第 1 版 2011 年 4 月第 1 次印刷

印数：1～2030

ISBN 978-7-313-06324-3/O 定价：98.00 元

前　言

1865 年麦克斯韦提出了电磁场的基本方程，随后洛伦茨提出了电磁场作用在运动带电粒子上力的公式，结合牛顿定律建立了带电粒子完整的电磁-力学封闭方程组。这些理论都是建立在介质不变形的基础上的。另一方面，由压电、铁电晶体和高分子压电薄膜等制成的各种传感器、调制器、作动器、表面声波器件、红外探测器、超声换能器等，在国民经济和社会生活中的高科技领域得到广泛的应用，这些器件的功能和可靠性都和电磁场及力学分析密切相关。这些器件在使用中都会发生变形，许多情况下还和温度场耦合在一起。因此在变形介质中讨论电磁场、应力应变场和温度场，很有必要。这就需要建立一门新学科——电弹性分析或热电弹性分析。压电体的现象学理论是基于开尔文发表的热动力学原理建立的，1910 年伏依格特对线性理论作了比较完整的讨论。目前，在电介质的非线性理论方面还存在一些不完善的地方，需进一步加以讨论。

本书旨在系统地研究变形电介质中的电场和机械力的作用，重点讨论含缺陷的电介质中的应力、应变、位移、电场、电位移、电势和温度的分布，应力波的传播等问题，以给电介质的破坏强度和信号传播分析提供可靠的理论基础。本书作者提出热力学第一定律本身包含了一个普适物理变分原理，同时遵循连续介质力学的研究方法，统一地从物理变分原理系统地导出这类材料的线性和非线性控制方程，且直接导出了麦克斯韦应力，这有助于解决以往文献中关于电学非线性理论中的一些不明确处；提出热释电材料的惯性熵理论，热扩散理论中的惯性浓度理论，极其简单地导出以有限速度传播的温度波动方程和浓度扩散方程；在压电和热释电材料波的反射和透射问题中，指出出现了一个新的表面波，使问题得到完善的解决；提出了电磁非线性薄板一阶近似的完整控制方程。本书系统地叙述了作者和他的合作者们的工作，讨论了国内学者的部分工作以及国际上的一些较为重要的工作，力求反应当前国内外研究的基本成果。目前在众多的有关压电介质的书中，尚缺少一本能严格按照连续介质力学的方法讨论的书，本书希望能弥补这一不足。由于电弹性理论综合研究力学、电学和热学的问题，因而也扩展了经典力学本身。

本书撰写由浅入深，为便于读者阅读，安排了电磁理论和不可逆热力学的基础知识，给出了一些必备的数学方法和弹性力学方程，力求物理概念清晰，数学推演严密，结合工程应用，可

作为电弹性分析领域的一本基础性著作。本书还适当地保留了杂志中论文的不同风格，以期读者能接触到各种风格和方法。希望能对力学、智能材料、控制工程、机械工程、电力工程、国防工程、材料工程等领域的科学研究人员，大学研究生和工程技术人员有所帮助。

文献中有关压电介质的论文数量很大，本书只能引用其中非常小的一部分，其他资料读者可从本书所引文献中查找。

本书得到国家自然科学重点基金（编号为 10132010）、面上基金（编号为 10072003，10472069）资助，在此表示感谢。

由于电弹性问题比较复杂，公式推演和论文发表前的评审也较困难，因此所引部分文献中可能会存在一些问题。撰写本书时，因水平所限，仅对文献做过一些粗略的检查，故书中可能会出现某些不当和差错，希望以概念和方法为重，恳请读者和专家指正。

匡震邦

2010 年于上海

目　　录

第1章

概论　基础知识

1.1 压电晶体的基本性质[1,2,3]

1.1.1 概述

电介质材料可以是固体(晶体和非晶体)、液体和气体等,本书主要讨论固体。某些电介质物质,在沿一定方向受到外应力场作用变形时,内部会产生极化现象,或已有极化的变化,这种改变导致与极化方向垂直的两端面出现等量反号的束缚电荷变化,即产生表面电荷(或在其电极上产生电位差),谓之正压电效应。这和导电材料的电传导方式完全不同。Curie(居里)兄弟 1880 年首先发现了电气石(酒石酸钾钠)、石英等一些晶体的压电现象。这种压电效应现在已得到广泛的应用。根据正压电效应,可制成多种传感器。

一般讲来,极化有三种情况:①在外加电场作用下,组成原子的电子云相对于原子核发生位移而出现的电矩,称电子极化;②组成分子的正负离子发生位移而出现的电矩,称离子极化;③分子的固有电矩,在无外场作用时,因热运动而无序排列,并无合成电矩;但在外场作用下,倾向于沿电场方向排列,因而出现非零的电矩,称偶极子取向极化。

若在压电体两端施加电压,则产生伸缩变形,称为逆压电效应。通常在几百伏到上千伏的高压下,一片压电陶瓷片产生几微米的位移;利用逆压电效应可以设计自适应结构中的应变控制,以实现对结构振动或变形的控制;制造直接把电能转换成机械能输出的声马达是一个引人注目的新领域。

热释电效应指的是极化强度随温度改变而表现出的电荷释放现象,温度的改变会在材料的两端出现电压或产生电流,用它可制作热电传感器件而用于红外探测器中。

Rochelle(罗塞尔)盐是最早发现的铁电晶体,20 世纪 40 年代制造成功钛酸钡($BaTiO_3$)铁电压电陶瓷,现在又制造出许多新型铁电压电陶瓷,如锆钛酸铅($Pb(Ti.Zr)O_3$ - PZT),KDP,钛酸贝 $BaTiO_3$,由铌镁酸铅 $Pb(Mg_{1/3}Nb_{2/3})O_3$ 和锆钛酸铅配比而成的 PMN - PZT 陶瓷等,多畴铁电单晶铌酸锂($LiNbO_3$)、钽酸锂($LiTaO_3$)等广泛地应用于表面声波器件,在光电、微声和激光等器件方面也都有重要应用。铁电体有与铁磁体的磁滞回线形状类似的电滞回线,这个回线是铁电体的标志。显然,铁电体是压电体中的一种。铁电陶瓷中虽存在自发极化,但各晶粒间自发极化方向的随机性使宏观上呈现无极性。但若预先经强直流电场作用的人工极化,使各电畴的自发极化方向都择优取向而成为有规则的排列,除去直流电场后,仍保留相当的剩余极化强度,宏观上便具有了极性,也就具有了压电性能。压电陶瓷的特点是:压电常数大,灵敏度高;通常压电陶瓷除有压电性外,还具有热释电性。20 世纪 70 年代以来,压电超声换能器在医学领域中也开始广泛应用。

半导体薄膜传感器，如硫化锌(ZnS)、碲化镉(CdTe)、氧化锌(ZnO)、硫化镉(CdS)等，既具有压电特性又具有半导体特性。压电聚合物，是某些合成高分子聚合物，经延展拉伸和电极化后具有压电性的高分子压电薄膜，如聚氟乙烯(PVF)等，或在高分子化合物中掺杂压电陶瓷 PZT 或 $BaTiO_3$ 粉末制成的高分子压电薄膜。

压电效应虽在 1880 年早已发现，但在最初几十年间并未引起人们的重视，第一次世界大战期间，对压电晶体的实用技术展开了研究，第二次世界大战后，在新型压电陶瓷材料的研制成功后，才获得了普遍应用。这说明生产需要对科学技术的推动。

1.1.2 晶体学中的晶轴和直角坐标系

为了研究晶体的物理性质，必须有一个参考的直角坐标系，规定单元晶胞的棱边或晶轴(a, b, c)在直角坐标系(x, y, z)中的位置(图 1-1)。我们按 IRE 标准的规定，分别来讨论 7 个不同的晶系。

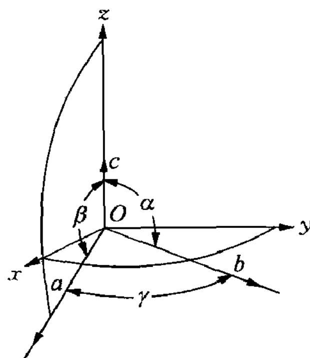


图 1-1 晶轴在直角坐标系中的位置

(1) 三斜晶系。晶轴 c 取为 z 轴，y 轴垂直 a，c 轴组成的平面，x 轴位于晶轴 a，c 组成的平面并垂直于 c 轴。

(2) 单斜晶系。取垂直于镜像平面的轴为晶轴 b(唯一的二重轴)，晶轴 a，c 都垂直晶轴 b，且取 a，c 轴间的夹角 $\beta > 90°$，晶轴 c 取为 z 轴，晶轴 b 取为 y 轴，x 按右螺旋规则选取，因而位于晶轴 a，c 组成的平面且在 β 角之内。

(3) 正交晶系。三个晶轴是相互垂直的，并取 $c < a < b$。晶轴 a，b，c 分别取为 x，y，z 轴。

(4) 四方晶系。晶轴 a，b，c 分别取为 x，y，z 轴，其中 c 为四重轴，$a = b$。

(5) 菱形晶系。三重轴取为晶轴 c，并取作 z 轴。通常参照六方晶系处理。

(6) 六方晶系。六重轴取为晶轴 c，并取作 z 轴。三个等效的晶轴 a_1，a_2，a_3 互成 120°，其中的一个取作 x 轴，按右螺旋规则选取选取 y 轴。

(7) 立方晶系。等效的 a，b，$c(a = b = c)$ 轴分别取为 x，y，z 轴。

1.1.3 晶体的对称性

晶体结构的显著特点是具有周期性，是由结构单元(元胞)在空间周期性地重复排列而成。晶体的内部结构存在这样那样的对称性，在相应的对称操作下，晶体的外表维持不变。晶体的可能对称操作可归结为：旋转对称、中心反演对称，镜面对称和像转对称。其中像转对称操作是晶格绕某一轴旋转 $2\pi/n$ 角度后，再经过中心反演能自身重合的操作；以及包含空间平移构成的螺旋轴和滑移反映面。中心反演对称操作，国际符号记为 i，镜面对称操作，国际符号记为 m。上述种种对称操作可用张量变换矩阵$[\boldsymbol{C}_{ij}]$的数学形式表示。例如全等变换矩阵，中心反演矩阵，垂直 z 轴的镜面的反射矩阵和绕 z 轴的旋转变换矩阵为分别为

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 1 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

式中 θ 为 xy 平面内的矢径和 x 轴的夹角。要上式是一个对称操作，必须旋转后与原来的形状重合。绕 A 点旋转 θ 后，B 点旋转到 B' 点，如图 1-2 所示；按晶格的周期性，B 点应与 A 点等

价,因而绕 B 点旋转($-\theta$)后,A 点转到 A' 点,由几何关系知 $A'B' /\!/ AB$,而这也应当是一个对称操作,从而 $A'B'$ 必为 AB 的整数倍,即有 $A'B' = AB(1-2\cos\theta)$,由此推出 $1-2\cos\theta = t$,其中 t 为整数,即 t 为 -1, 0, 1, 2, 3,或 $\theta = 0°$, 60°, 90°, 120°, 180°。因此当 $\theta = 2\pi/n$,$n = 1$, 2, 3, 4, 6 时上述旋转变换构成对称操作。这一类转动对称轴称为 n 度旋转对称轴,相应于 $n = 1$, 2, 3, 4, 6,分别称为 1, 2, 3, 4, 6 度对称轴,在国际符号中分别记为 1, 2, 3, 4, 6。显然,1 度对称轴相当于全等变换,即没有变化。像转轴是旋转对称轴和中心反演对称操作的复合操作,分别记为 $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$, $\bar{6}$。

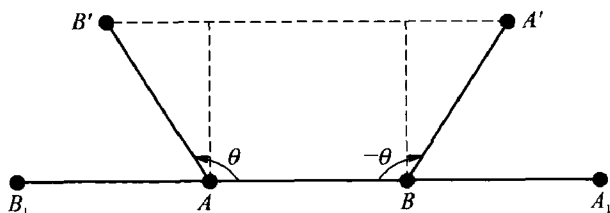


图 1-2 周期性对转动操作的限制

上述对称操作中,只有 8 种操作是独立的,他们是 1, 2, 3, 4, 6, i, m 和 $\bar{4}$。事实上一度像转轴相当于中心反演,2 度像转轴相当于镜面反演,3 度像转轴相当于 3 度旋转对称轴和中心反演同时存在,6 度像转轴相当于三度旋转对称轴和镜面反演同时存在。数学上把由对称要素组成的集合称为"群",相对于一个不动点,由上述 8 种独立的对称要素共可组成 32 种点群。32 种点群分属 7 个晶系。点群通常用国际符号来表示,也有用熊夫利符号表示的,本处不去讨论。国际符号是按一定次序表出各种对称要素,一般情况下用三个符号来表示,也有两个和一个符号表示的。每个符号表示某一方向的对称要素;如某一方向既是对称轴,垂直此方向的面又是对称面,则将轴的符号写为分子,面的符号写为分母。对于不同的晶系,所取的方向是不同的。7 个晶系和 32 种点群的记号列于表 1-1。

表 1-1 7 个晶系和 32 种点群

晶系	三斜	单斜	正交	菱形	四方	六方	立方
点群符号	1, $\bar{1}$	2, m, $2/m$	222, $2mm$, mmm	3, $\bar{3}$, 32, $3m$, $\bar{3}2/m$	4, $\bar{4}$, $4/m$, 422, $4mm$, $\bar{4}2m$, $\frac{4}{m}mm$	6, $\bar{6}$, $6/m$, 622, $6mm$, $\bar{6}m2$, $\frac{6}{m}mm$	23, $m3$, 432, $\bar{4}3m$, $m3m$
对称操作数	1, 2,	2, 2, 4	4, 4, 8	3, 6, 6, 6, 12	4, 4, 8, 8, 8, 8, 16	6, 6, 12, 12, 12, 12, 24	12, 24, 24, 24, 48

注:表中某些记号的不同写法:$mmm\left(\frac{2}{m}, \frac{2}{m}, \frac{2}{m}\right)$, $\bar{3}\frac{2}{m}(\bar{3}, m)$, $\frac{4}{m}mm\left(\frac{4}{m}, \frac{2}{m}, \frac{2}{m}\right)$, $\frac{6}{m}mm\left(\frac{6}{m}\frac{2}{m}\frac{2}{m}\right)$, $m3m\left(\frac{4}{m}\bar{3}\frac{2}{m}\right)$。

电介质晶体的电学性质包括介电晶体(32 种),压电晶体(20 种),热释电晶体(10 种)。热释电晶体具有自发极化的性质,在外电场作用下,那些自发极化方向会随之改变的晶体呈现铁电性,谓之铁电体。具有对称中心的晶体不具有压电效应。1894 年,Voigt(伏依格特)根据压

电晶体的结构特征指出，在 32 种点群的晶体中，只有 20 种非中心对称点群的晶体才可能具有压电效应。这 20 种非中心对称点群是：1，2，m，$2mm$，4，$4mm$，3，$3m$，6，$6mm$ 和 222，422，$\bar{4}$，$\bar{4}2m$，32，622，$\bar{6}$，$\bar{6}m2$，23，$\bar{4}3m$。

压电材料的主要特性参数有：①压电常数，通常压电系数的符号如下选取：在正的(拉应力或切应力)作用下，在轴的正方向产生正电荷；②弹性常数；③介电常数；④机电耦合系数；⑤电阻；⑥Curie 点等。

1.1.4　晶体切割[2]

压电体是各向异性介质，因而不同切割方位的晶片，材料常数矩阵不同，因而需要根据压电元件的设计要求，选择合适的切型，晶片的切割方位按 IRE 标准的规定的切型符号来表示。切型符号的头两个字母是 x，y，z 中的两个，第一个字母表示晶片初始设定的厚度方向，第二个字母表示晶片初始设定的长度方向；再用 t，l，w 分别表示厚度，长度和宽度方向的旋转轴，它们都放在括号内，随后顺次写出旋转角，从轴的正方向的端点看向原点时，反时针方向的旋转角为正。如符号($yxlwt$)$\Phi/\Theta/\Psi$，表示晶片初始设定的厚度方向沿 y 轴，长度沿 x 轴，先绕它的 l 轴旋转 Φ 角，再绕它的 w 轴旋转 Θ 角，最后绕它的 t 轴旋转 Ψ 角。图 1－3 表示 GT－切割石英的例子[2]：($yxlt$)－51°/45°，其中(yx)是初始设定的平板，厚度平行于 y 轴，长度平行于 x 轴，初始的 l，t 轴和＋x，＋y 轴一致，晶片绕 l 轴转－51°，绕 t 轴转 45°，图 1－3 中给出了这 3 个不同的位置。不同作者可能取用的符号不同。

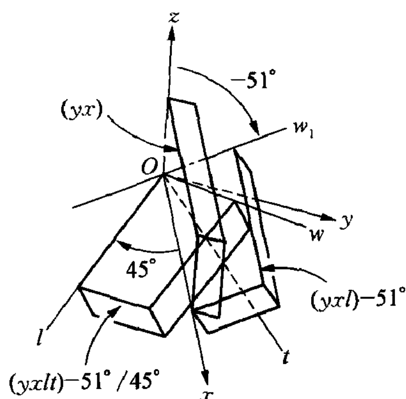


图 1－3　晶体的切割

1.2　弹性力学的基本方程与平面问题的复变函数解法

1.2.1　三维线弹性力学问题的基本方程[4]

令介质的位移为 $\boldsymbol{u}$，应力 $\boldsymbol{\sigma}$，应变 $\boldsymbol{\varepsilon}$，单位体积的体积力密度 $\boldsymbol{f}$，则各向异性体中的弹性力学的基本方程为(采用常用的指标记法和张量符号法)

几何方程　$\varepsilon_{ij}=\dfrac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i})$，　$\boldsymbol{\varepsilon}=\dfrac{1}{2}(\nabla\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\nabla)$

运动方程　$\sigma_{ij,j}+f_i=\rho\ddot{u}_i$，　$\nabla\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{f}=\rho\ddot{\boldsymbol{u}}$

本构方程　$\sigma_{ij}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl}$，　$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{C}:\boldsymbol{\varepsilon}$(或简记为 $=\boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon}$)　(1－1)

在上列诸方程中，$\boldsymbol{C}$ 为刚度系数。此外要给出合适的边界条件。

对各向同性介质，$\boldsymbol{C}$ 可表为

$$C_{ijkl}=\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+G(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk})\tag{1-2}$$

式中 δ_{ij} 为 Kronecker(克罗纳科)记号，λ，G 为 Lamé(拉梅)系数。

本书中还采用 Voigt(伏依格特)或紧缩记号,把应力和应变用六维矢量表示:

$$\begin{aligned}&\sigma_1=\sigma_{11},\quad \sigma_2=\sigma_{22},\quad \sigma_3=\sigma_{33},\quad \sigma_4=\sigma_{23},\quad \sigma_5=\sigma_{31},\quad \sigma_6=\sigma_{12}\\&\varepsilon_1=\varepsilon_{11},\quad \varepsilon_2=\varepsilon_{22},\quad \varepsilon_3=\varepsilon_{33},\quad \varepsilon_4=2\varepsilon_{23},\quad \varepsilon_5=2\varepsilon_{31},\quad \varepsilon_6=2\varepsilon_{12}\end{aligned}\tag{1-3}$$

相应的本构关系写成

$$\varepsilon_i=s_{ij}\sigma_j,\quad \sigma_i=C_{ij}\varepsilon_j\tag{1-4}$$

1.2.2 各向同性二维弹性力学问题的复变函数方法[5]

寻求各向同性二维弹性力学问题的闭合解和以此为基础的数值解,复变函数方法是一个行之有效的方法。根据 Мусхелишвили(穆斯海里斯维里)等的理论,各向同性二维弹性力学问题可以化成在复平面上求解两个解析函数 $\phi(z)$ 和 $\psi(z)$,且

$$\begin{aligned}2G(u_1+\mathrm{i}u_2)&=\kappa\phi(z)-z\overline{\phi'(z)}-\overline{\psi(z)}\\\sigma_{11}+\sigma_{22}&=2[\phi'(z)+\overline{\phi'(z)}]\\\sigma_{22}-\sigma_{11}+2\mathrm{i}\sigma_{12}&=2[\bar{z}\phi''(z)+\psi'(z)]\end{aligned}\tag{1-5}$$

式中 $z=x_1+\mathrm{i}x_2$ 是复变数,$\overline{\phi(z)}$ 是 $\phi(z)$ 的共轭函数,$\phi'(z)=\mathrm{d}\phi(z)/\mathrm{d}z$。

在极坐标系中有

$$\begin{aligned}2G(u_r+\mathrm{i}u_\theta)&=2G(u_1+\mathrm{i}u_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}[\kappa\phi(z)-z\overline{\phi'(z)}-\overline{\psi(z)}]\\\sigma_r+\sigma_\theta&=\sigma_{11}+\sigma_{22}=2[\phi'(z)+\overline{\phi'(z)}]\\\sigma_\theta-\sigma_r+2\mathrm{i}\sigma_{r\theta}&=(\sigma_{22}-\sigma_{11}+2\mathrm{i}\sigma_{12})\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}=2[\bar{z}\phi''(z)+\psi'(z)]\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}\end{aligned}\tag{1-6}$$

设 AB 为物体的一段边界,$\boldsymbol{n}$ 为其单位外向法线;$\boldsymbol{s}$ 为单位切线,沿运行方向,运行时物体保持在左边。$\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{s}$ 可表为(参见 1.5.4 节)

$$n_1=\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{i}_1)=\mathrm{d}x_2/\mathrm{d}s=s_2,\quad n_2=\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{i}_2)=-\mathrm{d}x_1/\mathrm{d}s=-s_1\tag{1-7}$$

作用在 AB 段的合力和合力矩分别为

$$\begin{aligned}F&=\int_A^B(t_1+\mathrm{i}t_2)\mathrm{d}s=-\mathrm{i}[\phi(z)+z\overline{\phi'(z)}+\overline{\psi(z)}]\\M&=\int_A^B(x_1t_2-x_2t_1)\mathrm{d}s=\mathrm{Re}\Big[\int\psi(z)\mathrm{d}z-z\psi(z)-z\bar{z}\phi'(z)\Big]_A^B\end{aligned}\tag{1-8}$$

1.2.3 各向异性广义二维弹性力学问题的复变函数方法[6,7,8]

广义二维线性弹性问题是指位移,应力,应变等只依赖于(x_1, x_2)或(x_1, x_3),而不依赖于 x_3 或 x_2,但位移可以有 3 个分量,应力和应变可以有 6 个分量。求解广义二维各向异性线性弹性问题,复变函数方法仍是一个强有力的方法,但和各向同性问题有很大的差别,需要采用多个复变数,因而求解也较复杂。和通常弹性力学一样,可以用位移和应力函数两种方法求解。首先 Лехницкий(列赫尼茨基)用应力函数方法,较晚 Stroh(斯特劳)用位移法求解。本处用位移法说明求解的一般步骤,更详细的讨论见第 4 章。不计体积力的静态问题,用位移表示的齐次方程为

$$C_{ijlk}u_{l,ik}=0 \tag{1-9}$$

由于讨论的是广义平面问题，所以设其解为

$$\boldsymbol{U}=\boldsymbol{a}f(z),\ \boldsymbol{U}=[u_1,\ u_2\cdot u_3]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{a}=[a_1,\ a_2\cdot a_3]^{\mathrm{T}},\quad \text{或 } u_i=a_if(z),\ i=1\sim 3$$

$$z=x_1+\mu x_2,\quad z_{,1}=1,\ z_{,2}=\mu \tag{1-10}$$

式中右上角的字母“T”表示转置。把式(1-10)代入(1-9)便得

$$C_{\alpha jl\beta}a_lz_{,\alpha}z_{,\beta}=0 \tag{1-11}$$

式中小写英文字母取值1～3，希腊字母取值1和2。上式详细写出为

$$[C_{i1k1}+\mu(C_{i1k2}+C_{i2k1})+\mu^2C_{i2k2}]a_k=0 \tag{1-12a}$$

要 a_k 有非零解，其前的系数行列式必须为零，即

$$|\boldsymbol{D}(\mu)|=|C_{i1k1}+\mu(C_{i1k2}+C_{i2k1})+\mu^2C_{i2k2}|=0 \tag{1-13a}$$

式中 $i=1,\ 2,\ 3$ 组成三行，$k=1,\ 2,\ 3$ 组成三列，所以上式是 3×3 阶的行列式，组成 μ 的6阶方程，故 μ 有6个根。如果引入 3×3 阶的方阵 $\boldsymbol{Q},\ \boldsymbol{R},\ \boldsymbol{T}$

$$\boldsymbol{Q}=[C_{i1k1}],\quad \boldsymbol{R}=[C_{i1k2}],\quad \boldsymbol{T}=[C_{i2k2}] \tag{1-14}$$

则式(1-12a)和(1-13a)还可分别写成

$$\boldsymbol{D}(\mu)\boldsymbol{a}=[\boldsymbol{Q}+\mu(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})+\mu^2\boldsymbol{T}]\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0} \tag{1-12b}$$

$$|\boldsymbol{D}(\mu)|=|\boldsymbol{Q}+\mu(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})+\mu^2\boldsymbol{T}|=0 \tag{1-13b}$$

由于系数 C_{ijkl} 组成正定矩阵，故由上式知，μ 只能取共轭复根。不失一般性，取

$$\mu_k=\alpha_k+\mathrm{i}\beta_k,\ \beta_k>0;\quad \mu_{k+3}=\bar{\mu}_k,\ k=1,\ 2,\ 3 \tag{1-15}$$

由此可知，存在六个复变数

$$z_k=x_1+\mu_kx_2,\quad z_{k,1}=1,\quad z_{k,2}=\mu_k,\quad z_{k+3}=\bar{z}_k,\ k=1,\ 2,\ 3 \tag{1-16}$$

对应每个 μ_k 值，由式(1-12)可求得一组 $\boldsymbol{a}_k=[a_{k1},\ a_{k2},\ a_{k3}]^{\mathrm{T}}$ 和相应的 $f_k(z_k)$，引入

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{a}_1,\ \boldsymbol{a}_2,\ \boldsymbol{a}_3],\quad \boldsymbol{f}(z_*)=[f_1(z_1),\ f_2(z_2),\ f_3(z_3)]^{\mathrm{T}} \tag{1-17}$$

式中 $\boldsymbol{A}$ 为 3×3 的矩阵，且 $A_{ij}=a_{ji}$。$\boldsymbol{f}(z_*)$ 为有3个分量的矢量，且每个分量的自变量不同。利用线性叠加原理，计及 $\boldsymbol{U}$ 是实数，解可写成

$$\boldsymbol{U}=[u_i]^{\mathrm{T}}=2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\boldsymbol{a}_jf_j(z_j)=2\mathrm{Re}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(z_*)] \tag{1-18}$$

上式中 $\boldsymbol{a}_jf_j(z_j)$ 是一种矢量表示方式，表示 $\mu=\mu_j$ 时的解。由于上式中出现3个相同的指标，难以用通常的求和记号表示，所以仍引入记号 $\sum$。$\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(z_*)$ 是一种矩阵表示方式。对于大多数工程问题，式(1-18)中的 $f_j(z_j)$ 可采用相同的形式，取成 $f_j(z_j)=f(z_j)q_j$，式中 $\boldsymbol{q}$ 为常数矢量。因而式(1-18)又可写成

$$\boldsymbol{U}=2\mathrm{Re}[\boldsymbol{A}\langle f(z_*)\rangle\boldsymbol{q}],\ \langle f(z_*)\rangle=\mathrm{diag}[f(z_1),\ f(z_2),\ f(z_3)],\ \boldsymbol{q}=[q_1,\ q_2,\ q_3]^{\mathrm{T}} \tag{1-19}$$

引入广义应力函数 $\boldsymbol{\Phi}$,使

$$\sigma_{i1} = -\Phi_{i,2}, \quad \sigma_{i2} = \Phi_{i,1} \tag{1-20}$$

则不计体积力时的静态问题,力学平衡方程自动满足。由式(1-1)中的本构方程求出应力,代入式(1-20)可得

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\Phi} = [\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3]^{\mathrm{T}} = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\boldsymbol{b}_j f_j(z_j) = 2\mathrm{Re}[\boldsymbol{Bf}(z_*)] \\ \boldsymbol{b}_j = (\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} + \mu_j \boldsymbol{T})\boldsymbol{a}_j, \ \boldsymbol{B} = [\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \boldsymbol{b}_3]\end{gathered} \tag{1-21}$$

更严格地用多复变函数的数学理论来处理问题,还需要深入探讨。

1.2.4 各向同性弹性体中裂纹端部的渐近场[9]

无限各向同性弹性体中存在一椭圆孔洞的解是

$$\begin{gathered}\varphi(\varsigma) = \Gamma R\left(\varsigma - \frac{m}{\varsigma}\right) - \overline{\Gamma}' R\,\frac{1}{\varsigma} \\ \psi(\varsigma) = \Gamma' R\varsigma - 2\Gamma R\,\frac{(1+m^2)}{\varsigma^2 - m}\varsigma - \overline{\Gamma}' R\,\frac{1+m\varsigma^2}{\varsigma(\varsigma^2 - m)}\end{gathered} \tag{1-22}$$

式中

$$\begin{gathered}z = \omega(\varsigma) = R\left(\varsigma + \frac{m}{\varsigma}\right), \ R = \frac{a+b}{2}, \ m = \frac{a-b}{2} \\ \Gamma = \frac{1}{4}(\sigma_{11}^{\infty} + \sigma_{22}^{\infty}), \quad \Gamma' = \frac{1}{2}(\sigma_{22}^{\infty} - \sigma_{11}^{\infty}) - 2\mathrm{i}\sigma_{12}^{\infty}\end{gathered} \tag{1-23a}$$

a, b 分别为椭圆的半长轴和半短轴,$\omega(\varsigma)$是把 z 平面上椭圆的外部保角变换到复平面ς上单位圆周外部的变换函数;z 平面上的椭圆边界变换到ς平面上的单位圆周。对于裂纹,有

$$b = 0, \quad R = \frac{a}{2}, \quad m = 1, \quad z = \omega(\varsigma) = \frac{a}{2}\left(\varsigma + \frac{1}{\varsigma}\right) \tag{1-23b}$$

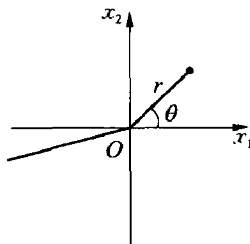


图 1-4 裂尖的局部坐标系

把解代入式(1-6),可得应力场和位移场。把坐标原点 O 取在裂尖的局部坐标系中(图 1-4),令 $z = re^{i\theta}$,当 $r \to 0$ 时便得裂尖渐近场

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) - \frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\left(2 + \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\right) + T \\ \sigma_{22} &= \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1 + \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} \\ \sigma_{12} &= \frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} + \frac{K_{\mathrm{II}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1 - \sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right) \\ \sigma_{13} &= -\frac{K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}, \ \sigma_{23} = \frac{K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\end{aligned} \tag{1-24}$$

和

$$u_1=\frac{K_{\mathrm{I}}}{2G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}\left(\kappa-1+2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+\frac{K_{\mathrm{II}}}{2G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}\left(\kappa+1+2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)+\frac{1}{E_1}Tr\cos\theta$$
$$u_2=\frac{K_{\mathrm{I}}}{2G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\sin\frac{\theta}{2}\left(\kappa+1-2\cos^2\frac{\theta}{2}\right)-\frac{K_{\mathrm{II}}}{2G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cos\frac{\theta}{2}\left(\kappa-1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)+\frac{\nu_1}{E_1}Tr\sin\theta$$
$$u_3=\frac{K_{\mathrm{III}}}{G}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}\sin\frac{\theta}{2}$$
(1-25)

式中 K_{I}，K_{II}，K_{III} 为三种裂纹变形类型的Ⅰ型、Ⅱ型和Ⅲ型应力强度因子，T 为常应力。上式表明，平面问题的Ⅰ型和Ⅱ型是相互耦合的，面外剪切是独立的。由式(1-24)推出

$$K_{\mathrm{I}}=\lim_{r\to0}\sqrt{2\pi r}\sigma_{22}\Big|_{\theta=0},\quad K_{\mathrm{II}}=\lim_{r\to0}\sqrt{2\pi r}\sigma_{12}\Big|_{\theta=0},\quad K_{\mathrm{III}}=\lim_{r\to0}\sqrt{2\pi r}\sigma_{23}\Big|_{\theta=0}\quad(1-26)$$

1.2.5 能量释放率[9, 10]

对于线弹性或小范围屈服情况，裂纹扩展的能量准则为

$$\tilde{G}=\tilde{R},\quad \tilde{G}=-\frac{\partial(U-W)}{\partial a},\quad \tilde{R}=\frac{\mathrm{d}(\gamma_s+\gamma_p)}{\mathrm{d}a}\quad(1-27)$$

式中 $\tilde{G}$ 为能量释放率，$\tilde{R}$ 为裂纹扩展阻力，U 为弹性应变能，W 为外力所做的功，γ_s 为形成新裂纹所需的表面能，γ_p 为形成新裂纹所需的裂尖区塑性屈服功。计算 $\tilde{G}$ 时，如局部坐标原点取在裂纹虚扩展后的裂尖处(图 1-5)，由式(1-24)，(1-25)和(1-27)，按下式计算得

$$\tilde{G}=\lim_{\Delta\to0}\frac{1}{2\Delta}\int_0^{\Delta}\boldsymbol{\Sigma}_2^{\mathrm{T}}(\Delta-r,\ 0)\cdot[\boldsymbol{u}^+-\boldsymbol{u}^-]\mathrm{d}r=\frac{1}{E_1}(K_{\mathrm{I}}^2+K_{\mathrm{II}}^2)+\frac{1}{2G}K_{\mathrm{III}}^2$$
$$E_1=\frac{E}{1-\nu^2}(\text{平面应变}),\quad E_1=E(\text{平面应力})\quad(1-28\text{a})$$

式中 Δ 为裂纹虚扩展的微长度，$\boldsymbol{\Sigma}_2(\Delta-r,\ 0)$ 为裂纹虚扩展前裂尖前方 x_1 轴上的应力；$\boldsymbol{u}^+=\boldsymbol{u}(r,\ \pi)$，$\boldsymbol{u}^-=\boldsymbol{u}(r,\ -\pi)$，$\boldsymbol{u}^+-\boldsymbol{u}^-$ 为裂纹虚扩展后的裂尖后方上下表面的位移差。如果局部坐标原点取在裂纹虚扩展前的裂尖处，则式(1-28a)应改为

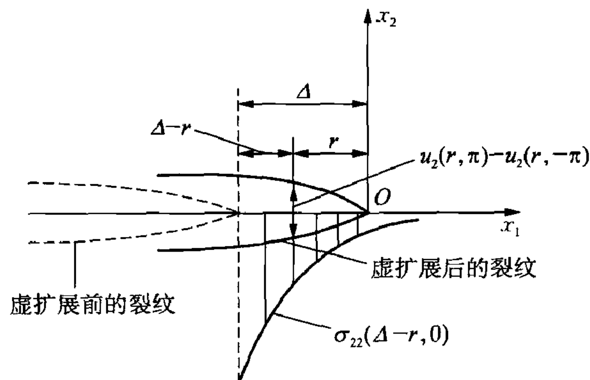


图 1-5　裂尖能量释放率的计算图

$$\widetilde{G} = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{2\Delta}\int_0^{\Delta}\boldsymbol{\Sigma}_2^{\mathrm{T}}(r_1,\ 0)\cdot(\boldsymbol{u}^{+}-\boldsymbol{u}^{-})\mathrm{d}r_1 = \frac{1}{E_1}(K_{\mathrm{I}}^2+K_{\mathrm{II}}^2)+\frac{1}{2G}K_{\mathrm{III}}^2 \tag{1-28b}$$

式中 $r_1=\Delta-r$，$\boldsymbol{u}^{+}=\boldsymbol{u}(\Delta-r_1,\ \pi)$，$\boldsymbol{u}^{-}=\boldsymbol{u}(\Delta-r_1,\ -\pi)$。

通常断裂力学中广泛引入与积分路线无关的围绕裂尖的 J 积分

$$J=\int_{\Gamma}(un_1-\sigma_{ij}n_ju_{i,1})\mathrm{d}s=\int_{\Gamma_0}(un_1-\sigma_{ij}n_ju_{i,1})\mathrm{d}s,\ U=\int_a u\,\mathrm{d}a \tag{1-29}$$

式中 Γ 为任一条包围裂尖的围线，u 为应变能密度，Γ_0 为一无限接近裂尖的围线。在线弹性或小范围屈服情况的断裂力学中，式(1-29)中的 J 积分值和式(1-28)中的$\widetilde{G}$值是相同的。事实上，当裂纹相似扩展时，如扩展前的解是 $u_i=u_i(K_i,\ x_1,\ x_2)$，则扩展 Δa 后的解为 $u_i=u_i(K_i,\ x_1-a,\ x_2)$，故有$\partial u_i/\partial a=-\partial u_i/\partial x_1$，所以按式(1-27)有

$$\widetilde{G}=\frac{\partial W}{\partial a}-\frac{\partial U}{\partial a}=\int_a\frac{\partial u}{\partial x_1}\mathrm{d}a-\int_{\Gamma}T_i\frac{\partial u_i}{\partial x_1}\mathrm{d}s=\int_{\Gamma}(un_1-\sigma_{ij}n_ju_{i,1})\mathrm{d}s=J$$

1.3 有限变形[4, 11]

关于有限变形的理论有许多参考文献，本处只给出一些基本公式。

我们选取自然状态的物体构形为初始构形，和它固结在一起的坐标系称作物质坐标系或Lagrange(拉格朗日)坐标系，坐标用大写的 X 表示，其中的物理量用上方带一短横“—”的变量表示，下标用大写字母表示；选取变形后的物体构形为现时构形，在和空间固结在一起的空间坐标系或 Euler(欧拉)坐标系中描写，坐标用小写的 x 表示，其中的物理量用上方不带短横“—”的变量表示，下标用小写字母表示。如 ρ，ρ_e，$\boldsymbol{\sigma}$，$\boldsymbol{\varepsilon}$，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{D}$ 分别表示在现时构形中的质量密度、自由电荷密度、Euler 或 Cauchy(柯西)应力、小应变、电场强度和电位移，而用字母上方带小横“—”的量$\bar{\rho}$，$\bar{\rho}_e$，$\bar{\boldsymbol{\sigma}}$，$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$，$\bar{\boldsymbol{E}}$，$\bar{\boldsymbol{D}}$分别表示在初始构形中的相应量，其中$\bar{\boldsymbol{\sigma}}$，$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$分别为 Kirchhoff(克希霍夫)应力和 Green(格林)应变；本书中物质坐标系和空间坐标系将取成同一个坐标系，由于两种构形取同一坐标系，故 $\boldsymbol{u}$，φ 在现时构形和初始构形中是相同的，即 $\bar{u}_I=u_i$，$\bar{\varphi}=\varphi$。对于不带微分记号的量有 $X_I=X_i$，$\bar{\sigma}_{IJ}=\bar{\sigma}_{ij}$ 等，为了方便，它们同时在本文中使用。但要注意变量对大、小写下标的微分是不同的，如 $u_{i,J}=\partial u_i/\partial x_m\cdot\partial x_m/\partial X_J=u_{i,m}x_{m,J}$，$x_{i,J}=\partial x_i/\partial X_J$ 等。

现时构形中的位置矢量 $\boldsymbol{x}$ 由物质坐标系中的位置矢量 $\boldsymbol{X}$ 和时间 t 确定，即

$$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}(\boldsymbol{X},\ t),\quad \boldsymbol{x}=\boldsymbol{X}+\boldsymbol{u} \tag{1-30}$$

式中 $\boldsymbol{u}$ 为位移。称 $\boldsymbol{F}$ 为变形梯度，是两点张量，是在初始和现时两种构形中描写的量

$$\boldsymbol{F}=\partial\boldsymbol{x}/\partial\boldsymbol{X},\quad F_{kL}=x_{k,L}=\delta_{kL}+u_{k,L},\quad \mathrm{d}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{X} \tag{1-31}$$

称$\bar{\boldsymbol{C}}$为 Green 变形张量，$\bar{\varepsilon}$为 Green 应变，它们的表达式是

$$\begin{aligned}&\bar{\boldsymbol{C}}=\boldsymbol{F}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F},\quad \bar{C}_{KL}=F_{mK}F_{mL}=\delta_{KL}+u_{K,L}+u_{L,K}+u_{M,K}u_{M,L}\\&\bar{\varepsilon}_{KL}=\frac{1}{2}(\bar{\boldsymbol{C}}-\boldsymbol{I})=\frac{1}{2}(x_{m,K}x_{m,L}-\delta_{KL})=\frac{1}{2}(u_{K,L}+u_{L,K}+u_{M,K}u_{M,L})\end{aligned} \tag{1-32}$$

略去高次项,上式便是小应变时的公式。体(积单)元和面(积单)元因变形引起的变化和变化率的公式为

$$
\begin{gathered}
\mathrm{d}V = j\,\mathrm{d}\bar{V},\quad \frac{\mathrm{d}j}{\mathrm{d}t} = jv_{k,k},\quad v_k = \frac{\mathrm{d}u_k}{\mathrm{d}t},\quad \mathrm{d}\bar{V} = J\,\mathrm{d}V,\quad \frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t} = -Jv_{k,k} \\
\bar{n}_K\mathrm{d}\bar{a} = Jx_{i,K}n_i\mathrm{d}a,\quad n_k\mathrm{d}a = \mathrm{d}a_k = jX_{L,k}\bar{n}_L\mathrm{d}\bar{a} = jX_{L,k}\mathrm{d}\bar{a}_L \\
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}a_k) = (v_{p,p}n_k - v_{p,k}n_p)\mathrm{d}a,\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{d}a) = (v_{p,p} - v_{p,k}n_pn_k)\mathrm{d}a \\
j = |x_{m,K}|,\quad J = j^{-1}
\end{gathered}
\tag{1-33}
$$

式中 $\mathrm{d}V$, $\mathrm{d}a$, v_k, n_k 分别为现时构形中的微分体积、微分面积、速度和外向法线;上方加"—"的表示初始构形中的对应量;j 是变形梯度行列式的值。

现始构形中的量,如 Cauchy 或 Euler 应力 $\boldsymbol{\sigma}$,体力 $\boldsymbol{f}$、面力 $\boldsymbol{T}$、内能 u、密度 ρ 等和初始构形中的对应量之间的关系为

$$
\begin{gathered}
\bar{\sigma}_{KL} = jX_{K,m}X_{L,n}\sigma_{mn},\quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = j\boldsymbol{F}^{-1}\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{F}^{-\mathrm{T}},\quad \sigma_{ij} = Jx_{i,M}x_{j,N}\bar{\sigma}_{MN} \\
\bar{\boldsymbol{T}}_K\bar{n}_K\mathrm{d}\bar{a} = \boldsymbol{T}_kn_k\mathrm{d}a,\quad \bar{T}_k = jX_{J,n}\bar{n}_Jn_nT_k,\quad T_i = Jx_{l,K}n_lN_K\bar{T}_i \\
\bar{u} = ju,\quad \bar{\rho} = j\rho,\quad \bar{f}_K = jf_k
\end{gathered}
\tag{1-34}
$$

初始构形中的电位移$\bar{D}_I$ 是根据相同质点组成的封闭曲面内的电荷在两个构形中不变的原则定义的,电场$\bar{E}_I$ 是根据电势在两个构形中不变的原则定义的,即有

$$
\begin{gathered}
\oint_{\bar{a}}\bar{D}_{I,I}\mathrm{d}\bar{a} = \oint_a D_{i,i}\mathrm{d}a,\quad \bar{D}_I = jX_{I,m}D_m,\quad D_m = Jx_{m,I}\bar{D}_I,\quad \bar{\sigma}^*\mathrm{d}\bar{a} = \sigma^*\mathrm{d}a \\
\bar{\varphi} = \varphi,\quad \bar{E}_I = -\bar{\varphi}_{,I} = -\varphi_{,m}x_{m,I} = x_{m,I}E_m,\quad E_m = X_{I,m}\bar{E}_I,\quad \bar{\rho}_e = j\rho_e
\end{gathered}
\tag{1-35}
$$

式中 ρ_e 和 σ 分别是现时构形中的体电荷密度和面电荷密度。由上式知,恒有 $\bar{E}_{I,J} = \bar{E}_{J,I} = -\varphi_{,IJ}$。由于$\bar{D}$, $\bar{E}$是定义在初始构形中,它们的导数和现时构形中坐标的旋转无关,因而在有限变形理论中使用它们是合适的。

有限变形时,用初始构形中 Kirchhoff 应力表示的运动方程为

$$
(\bar{\sigma}_{KL}x_{i,L})_{,K} + \bar{f}_i = \bar{\rho}\ddot{u}_i,\ \bar{\rho} = j\rho \tag{1-36a}
$$

事实上利用式(1-34)和关系 $(jX_{K,m})_{,K} = 0$,由上式可得

$$
\begin{gathered}
(\bar{\sigma}_{KL}x_{i,L})_{,K} = (jX_{K,m}X_{L,n}\sigma_{mn}x_{i,L})_{,K} = jX_{K,m}(X_{L,n}\sigma_{mn}x_{i,L})_{,j}x_{j,K} = j\sigma_{ji,j} \\
\Rightarrow j\sigma_{ji,j} + jf_i = j\rho\ddot{u}_i \Rightarrow \sigma_{ji,j} + f_i = \rho\ddot{u}_i
\end{gathered}
$$

有限变形时,用初始构形中电位移表示的 Gauss 方程为

$$
\bar{D}_{I,I} = \bar{\rho}_e \tag{1-36b}
$$

事实上利用式(1-35)和关系 $(jX_{K,m})_{,K} = 0$,由上式可得

$$
\bar{D}_{I,I} = (jX_{I,m}D_m)_{,I} = jX_{I,m}D_{m,I} = jX_{I,m}D_{m,j}x_{j,I} = jD_{j,j} \Rightarrow D_{j,j} = \rho_e
$$

边界条件为

$$x_{i,L}\bar{\sigma}_{KL}\bar{n}_K=\bar{T}_i,\quad \bar{D}_K\bar{n}_K=-\bar{\sigma},\quad 或\bar{u}_I=\bar{u}_I^*,\quad \bar{\varphi}=\bar{\varphi}^* \tag{1-36c}$$

事实上利用式(1-33)、(1-34)和(1-35)，由上式可得

$$x_{i,L}\bar{\sigma}_{KL}\bar{n}_K=x_{i,L}jX_{K,m}X_{L,n}\sigma_{mn}Jx_{j,K}n_j\mathrm{d}a/\mathrm{d}\bar{a}=\sigma_{ij}n_j\mathrm{d}a/\mathrm{d}\bar{a}\Rightarrow\sigma_{ij}n_j=T_i$$

$$\bar{D}_K\bar{n}_K=jX_{K,m}D_mJx_{i,K}n_i\mathrm{d}a/\mathrm{d}\bar{a}=D_in_i\mathrm{d}a/\mathrm{d}\bar{a}\Rightarrow D_in_i=-\sigma^*$$

初始构形中的虚位移原理为

$$\int_{\bar{V}}\bar{\sigma}_{KL}\delta\bar{\varepsilon}_{KL}\mathrm{d}\bar{V}-\int_{\bar{V}}(\bar{f}_k-\bar{\rho}\ddot{u}_k)\delta u_k\mathrm{d}\bar{V}-\int_{\bar{a}}\bar{T}_K^*\delta u_k\mathrm{d}\bar{a}=0 \tag{1-36d}$$

1.4 方阵的本征值与本征矢量[4, 12]

1.4.1 右和左本征方程

设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 是复方阵，$\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ 是矢量，物理学中常出现下列形式的齐次代数方程组：

$$\boldsymbol{Au}=\mu\boldsymbol{u},\quad 或\ \boldsymbol{D}(\mu)\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{A}-\mu\boldsymbol{I})\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0} \tag{1-37a}$$

和

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{v}=\mu\boldsymbol{v},\quad 即\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{v}^{\mathrm{T}},\quad 或\ \boldsymbol{D}'(\mu)\boldsymbol{v}=(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}-\mu\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0} \tag{1-37b}$$

称式(1-37a)为右本征方程，式(1-37b)为左本征方程。式中 μ 是本征值，$\boldsymbol{u}$ 和 $\boldsymbol{v}$ 分别是右和左本征矢量。如有 $\boldsymbol{A}=\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$，则称方阵 $\boldsymbol{A}$ 是 Hermite(厄米特)矩阵。显然，如 $\boldsymbol{A}$ 是 Hermite 矩阵，$\boldsymbol{B}=\bar{\boldsymbol{A}}$ 时，或 $\boldsymbol{A}$ 是实对称矩阵，则左、右本征方程是相同的。要式(1-37a)和(1-37b)有解，必须

$$|\boldsymbol{A}-\mu\boldsymbol{I}|=\boldsymbol{0},\quad 或\ |\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}-\mu\boldsymbol{I}|=\boldsymbol{0} \tag{1-38}$$

对于同一方阵 $\boldsymbol{A}$，左、右本征方程的本征值是相同的，因为 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 具有相同的本征值。设 μ_i 和 μ_j 是 $\boldsymbol{A}$ 的不同的本征值，相应的右和左本征矢量为 $\boldsymbol{u}_i$ 和 $\boldsymbol{v}_j$，从而式(1-37)成为

$$\boldsymbol{Au}_i=\mu_i\boldsymbol{u}_i,\quad \boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\mu_j\boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}}$$

把上式中的第一个左乘 $\boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}}$，第二个右乘 $\boldsymbol{u}_i$，然后相减便得

$$(\mu_i-\mu_j)\boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_i=0\ (对\ i,\ j\ 不求和)$$

由于已设 $\mu_i\neq\mu_j$，所以由上式推出 $\boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_i=0$，即不同本征值的左、右本征矢量相互正交。设 $\boldsymbol{v}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_i=\Lambda_i^2$，则有

$$\boldsymbol{v}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_i=\Lambda_i\Lambda_j\delta_{ji} \tag{1-39a}$$

若 $\boldsymbol{A}$ 是 Hermite 矩阵，则式(1-37a)转置后的共轭方程为

$$\bar{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}=\bar{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}=\bar{\mu}\bar{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \tag{1-37c}$$

即 $\boldsymbol{u}$ 的右本征方程变换为 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 的左本征方程，$\bar{\boldsymbol{u}}$ 相当于式(1-37b)中的 $\boldsymbol{v}$。按式(1-39a)，在复数

空间存在正交关系：

$$\bar{\boldsymbol{u}}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_i = \Lambda_i\overline{\Lambda}_j\delta_{ji} = \Lambda_i\Lambda_j\delta_{ji}, \quad 或\ \boldsymbol{u}_j^{\mathrm{T}}\bar{\boldsymbol{u}}_i = \Lambda_i\Lambda_j\delta_{ji} \tag{1-39b}$$

上式已应用了 Hermite 矩阵的本征值是实数，这可证明如下。设第 j 个本征值 μ_j 是复值，$\boldsymbol{u}_j$ 是和其对应的复本征函数，则有

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}_j = \mu_j\boldsymbol{u}_j, \quad \bar{\boldsymbol{u}}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} = \bar{\mu}_j\bar{\boldsymbol{u}}_j^{\mathrm{T}}$$

把上式第一个左乘 $\bar{\boldsymbol{u}}_j^{\mathrm{T}}$，第二个右乘 $\boldsymbol{u}_j$，然后两式相减便得

$$(\mu_j - \bar{\mu}_j)\bar{\boldsymbol{u}}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_j = 0,（对\ j\ 不求和）$$

由于 $\boldsymbol{u}_j$ 是非平凡解，$\bar{\boldsymbol{u}}_j^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_j$ 不为零，所以 $\mu_j = \bar{\mu}_j$，即 μ_j 是实数。

利用本征矢量可使 n 阶复方阵 $\boldsymbol{A}$ 对角化。具体方法如下：求出本征值 μ_i 后，由式(1-37)可求出右、左本征矢量 $\boldsymbol{u}_i$，$\boldsymbol{v}_j$，由 $\boldsymbol{u}_i$，$\boldsymbol{v}_j$ 分别组成方阵

$$\boldsymbol{P} = [\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \cdots, \boldsymbol{u}_n] = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & \cdots & u_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_{1n} & u_{2n} & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{P}'^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_n]^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} v_{11} & \cdots & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ v_{n1} & \cdots & v_{n2} & \cdots & v_{nn} \end{bmatrix} \tag{1-40a}$$

由式(1-39)推知

$$\boldsymbol{P}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} = \mathrm{diag}[\Lambda_1^2, \Lambda_2^2, \cdots, \Lambda_n^2] = \langle \Lambda_*^2 \rangle, \quad \Lambda_i^2 = \sum_{j=1}^{n} v_{ij}u_{ji} \tag{1-40b}$$

由式(1-37)知 $\boldsymbol{AP} = [\mu_1\boldsymbol{u}_1, \mu_2\boldsymbol{u}_2, \cdots, \mu_n\boldsymbol{u}_n]$，从而推出

$$\boldsymbol{P}'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{v}_n^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}[\mu_1\boldsymbol{u}_1, \mu_2\boldsymbol{u}_2, \cdots, \mu_n\boldsymbol{u}_n] = \begin{bmatrix} \mu_1\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_1, & \mu_2\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_2, & \cdots, & \mu_n\boldsymbol{v}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mu_1\boldsymbol{v}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_1, & \mu_2\boldsymbol{v}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_2, & \cdots, & \mu_n\boldsymbol{v}_n^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{M} \tag{1-41a}$$

$$\boldsymbol{M} = \mathrm{diag}[\mu_1\Lambda_1^2, \mu_2\Lambda_2^2, \cdots, \mu_n\Lambda_n^2] = \langle \mu_*\Lambda_*^2 \rangle$$

由此推出

$$\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{P}')^{-1}\boldsymbol{M}\boldsymbol{P}^{-1} \tag{1-41b}$$

若 $\boldsymbol{A}$ 是 Hermite 矩阵，因为 $\bar{\boldsymbol{u}}$ 相当于式(1-37b)中的 $\boldsymbol{v}$，所以 $\boldsymbol{P}'^{\mathrm{T}} = \overline{\boldsymbol{P}}^{\mathrm{T}}$，从而有

$$\overline{\boldsymbol{P}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} = \langle \Lambda_*^2 \rangle, \quad \Lambda_i^2 = \bar{\boldsymbol{u}}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{u}_i = \sum_{j=1}^{n} \bar{u}_{ij}u_{ji}（对\ i\ 不求和）$$

$$\overline{\boldsymbol{P}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{AP} = \boldsymbol{M}, \ \overline{\boldsymbol{P}}^{\mathrm{T}}(-\boldsymbol{A})\boldsymbol{P} = -\boldsymbol{M} \tag{1-41c}$$

式中 $\boldsymbol{A}$ 换成 $-\boldsymbol{A}$，相当于本征方程换成 $\boldsymbol{Au} + \mu\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$，从而可推出上式中的最后一个。对于归一化的本征矢量，由上式推出 $\overline{\boldsymbol{P}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{I}$，$\overline{\boldsymbol{P}}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{P}^{-1}$。

1.4.2 一般方阵的本征值与本征多项式的一些性质

式(1-38)是μ的一个多项式，如在此多项式中用$\boldsymbol{A}$或$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$代替$\mu$，便构成$\boldsymbol{A}$或$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$的本征多项式。一般方阵本征值与本征多项式存在下列关系：

(1) 根据$|\mu\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|=|(\mu\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})^{\mathrm{T}}|=|\mu\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|$，推知$\boldsymbol{A}$和$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$有相同的本征值与本征多项式。

(2) 根据$(\mu\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$，推知$(\boldsymbol{A}^{-1}-\mu^{-1}\boldsymbol{I})\mu\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$，所以$\boldsymbol{A}^{-1}$的本征值为$\mu^{-1}$，本征矢量为$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}$。

(3) 根据$|\mu\boldsymbol{I}-\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}|=|\overline{\mu}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}|=|\overline{\mu}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$，推知$\boldsymbol{A}$和$\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}$的本征值共轭。

(4) 称$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}$为$\boldsymbol{A}$的相似矩阵。根据$|\mu\boldsymbol{I}-\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{P}^{-1}(\mu\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{P}|=|\boldsymbol{P}^{-1}||\mu\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}||\boldsymbol{P}|=|\mu\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}|$推知，相似矩阵有相同的本征值与本征多项式。

(5) 根据$\boldsymbol{A}^n\boldsymbol{u}=\boldsymbol{A}^{n-1}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u})=\mu\boldsymbol{A}^{n-2}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{u})=\mu^2\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{u}=\cdots=\mu^n\boldsymbol{u}$，推知$\mu^n$是$\boldsymbol{A}^n$的本征值。

(6) Cayley-Hamilton(凯莱-哈米尔顿)定理：方阵$\boldsymbol{A}$满足和其本征多项式相同的(矩阵)多项式。因而任何$\boldsymbol{A}$的n次幂以上的项均可用其$n-1$次幂以下的项表示。

1.4.3 简单、半简单和退化矩阵

如矩阵$\boldsymbol{A}$所有的本征值都不相同，则由式(1-38)可解出各不相同的本征矢量，则称$\boldsymbol{A}$是简单的；如矩阵$\boldsymbol{A}$的本征值具有重根，例如μ_p是$\boldsymbol{A}$的p重根，但和μ_p对应的独立本征矢量个数也有p个，则称$\boldsymbol{A}$是半简单的；但若和μ_p对应的独立本征矢量个数少于p个，则称$\boldsymbol{A}$是退化的。对于简单的和半简单的矩阵$\boldsymbol{A}$，独立本征矢量个数等于本征值的个数，本征空间是完备的；而退化矩阵$\boldsymbol{A}$的独立本征矢量个数少于本征值的个数，本征空间是不完备的。但是可以构造新的本征矢量，使独立本征矢量个数等于本征值的个数，使其完备化。构造的新的本征矢量不是唯一的，构造的新本征矢量的方法也不是唯一的。通常选择新构造的本征矢量，和原有的本征矢量一起，组成正则化群。本处只给出下列一种方法。对于右本征方程，和重根μ_p对应的本征矢量至少有一个，令为$\boldsymbol{u}_{p1}$。因为μ_p为p重根，所以当$\mu=\mu_p$时，行列式$|\boldsymbol{D}|$一定含有因子$(\mu-\mu_p)^p$，因而我们可用下列方法构造其余的(广义)本征矢量：

$$(\boldsymbol{A}-\mu_p\boldsymbol{I})\boldsymbol{u}_{p1}=\boldsymbol{0}\ (\text{对}\ p\ \text{不求和})$$
$$(\boldsymbol{A}-\mu_p\boldsymbol{I})^2\boldsymbol{u}_{p2}=\boldsymbol{0},\ \cdots,\ (\boldsymbol{A}-\mu_p\boldsymbol{I})^k\boldsymbol{u}_{pk}=\boldsymbol{0},\ \cdots,\ (\boldsymbol{A}-\mu_p\boldsymbol{I})^p\boldsymbol{u}_{pp}=\boldsymbol{0}$$
$$\text{或}(\boldsymbol{A}-\mu_p\boldsymbol{I})\boldsymbol{u}_{p2}=\boldsymbol{u}_{p1},\ \cdots,\ (\boldsymbol{A}-\mu_p\boldsymbol{I})\boldsymbol{u}_{pk}=\boldsymbol{u}_{p(k-1)},\ \cdots,\ (\boldsymbol{A}-\mu_p\boldsymbol{I})\boldsymbol{u}_{pp}=\boldsymbol{u}_{p(p-1)} \tag{1-42a}$$

式中$\boldsymbol{I}$是单位矩阵。显然，上式中和矢量$\boldsymbol{u}_{pi}$对应的本征值都是μ_p。对于左本征方程，有类似的表达式

$$(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}-\lambda_p\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}_{pp}=\boldsymbol{0}\ (\text{对}\ p\ \text{不求和})$$
$$(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}-\lambda_p\boldsymbol{I})^2\boldsymbol{v}_{p(p-1)}=\boldsymbol{0},\ \cdots,\ (\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}-\lambda_p\boldsymbol{I})^{p+1-k}\boldsymbol{v}_{pk},\ \cdots,\ (\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}-\lambda_p\boldsymbol{I})^p\boldsymbol{v}_{p1}=\boldsymbol{0}$$
$$\text{或}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}-\lambda_p\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}_{p(p-1)}=\boldsymbol{v}_{pp},\ \cdots,\ (\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}-\lambda_p\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}_{p(k-1)}=\boldsymbol{v}_{pk},\ \cdots,\ (\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}-\lambda_p\boldsymbol{I})\boldsymbol{v}_{p1}=\boldsymbol{v}_{p2} \tag{1-42b}$$

调整本征矢量中包含的常数，可使其满足式(1-39)而正则化。应当注意，由上面得到的p重根的p个本征矢量不是唯一的，它们的任何线性组合都是本征矢量。

1.5 电弹性力学中常用的几个函数和公式

1.5.1 广义复变数 z_j

广义复变数 z_j 和通常复变数 $z = x_1 + \mathrm{i}x_2 = re^{\mathrm{i}\theta}$ 不同，广义复变数 $z_j = x_1 + \mu_j x_2$，其中 $\mu_j = \alpha_j + \mathrm{i}\beta_j$，只有当 $\mu_j = \mathrm{i}$ 时，广义复变数才是通常的复变数。在 z_j 平面上有

$$z_j = x_{1j} + \mathrm{i}x_{2j} = rR\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} = r(R\cos\psi + \mathrm{i}R\sin\psi) \tag{1-43}$$

式中 rR 是 z_j 平面上的径向矢径，ψ 为极角，而在 z 平面上可表示为

$$z_j = x_1 + \mu_j x_2 = (x_1 + \alpha_j x_2) + \mathrm{i}\beta_j x_2 = r[(\cos\theta + \alpha_j \sin\theta) + \mathrm{i}\beta_j \sin\theta] \tag{1-44}$$

从而存在关系

$$\begin{gathered} x_{1j} = x_1 + \alpha_j x_2, \quad x_{2j} = \beta_j x_2 \\ R\cos\psi = \cos\theta + \alpha_j \sin\theta, \quad R\sin\psi = \beta_j \sin\theta \end{gathered} \tag{1-45}$$

上式表明 z 平面上的单位圆变换到 z_j 平面上的椭圆(图 1-6)，且具有下列特点

$$\begin{gathered} x_{1j} = x_1, \quad x_{2j} = 0, \quad \psi = 0, \quad R = 1, x_2 = 0, \theta = 0 \\ x_{1j} = x_1, \quad x_{2j} = 0, \quad \psi = \pm\pi, \quad R = 1, x_2 = 0, \theta = \pm\pi \\ x_{1j} = x_1, \quad x_{2j} = 0, \quad \psi = 2\pi, \quad R = 1, x_2 = 0, \theta = 2\pi \\ R = \sqrt{\alpha_j^2 + \beta_j^2}, \quad \tan\psi = \beta_j/\alpha_j, x_1 = 0, \theta = \pm\pi/2 \end{gathered} \tag{1-46}$$

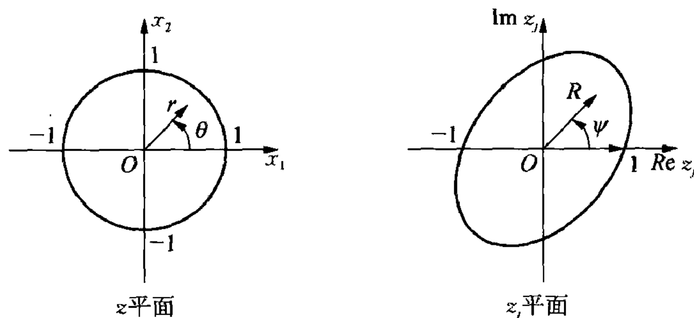


图 1-6　z 平面上的单位圆变换到 z_j 平面上的椭圆

1.5.2 广义复变数函数 $\ln z_j$

广义复变数函数 $\ln z_j$ 可以写成

$$\begin{gathered} \ln z_j = \ln rR\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi} = \ln rR + \mathrm{i}\psi \\ R^2 = \cos^2\theta + \alpha_j \sin 2\theta + (\alpha_j^2 + \beta_j^2)\sin^2\theta, \quad \tan\psi = \frac{\beta_j \sin\theta}{\cos\theta + \alpha_j \sin\theta} \end{gathered} \tag{1-47}$$

由上式知，和普通复变数函数 $\ln z$ 一样，广义复变数函数 $\ln z_j$ 也是 z_j 平面上的多值函数，使

用中需要作割线使其单值化。虽然 ψ 和 θ 的关系比较复杂,但在 $\theta=0$, $\pm\pi$ 三点上是一致的,即在这 3 点上 $\theta=\psi$,或 $x_1=x_{j1}$。通常选取从 $x_1=x_{j1}$ 轴上的某点开始,沿负 $x_1=x_{j1}$ 作单值化的割线,从而在以该点为原点的极坐标系中,ψ 和 θ 都限制在$(-\pi,\ \pi]$。绕坐标原点旋转一周,$\ln z_j$ 获得增量 2π。

1.5.3 广义复变数函数 $\sqrt{z_j^2-a_j^2}$

按图 1-7,广义复变数函数 $\sqrt{z_j^2-a_j^2}$ 可以写成

$$\begin{aligned}\sqrt{z_j^2-a_j^2}&=\sqrt{z_j-a_j}\ \sqrt{z_j+a_j}\\&=\sqrt{r_1r_2R_1R_2}\,e^{i(\psi_1+\psi_2)/2}\end{aligned}\tag{1-48}$$

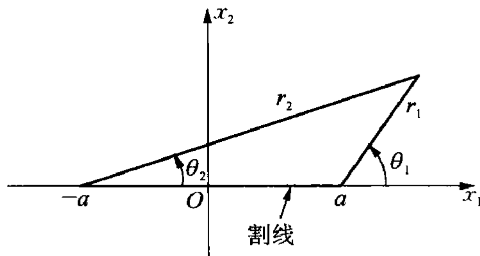


图 1-7 广义复变数函数 $\sqrt{z_j^2-a_j^2}$ 的单值性割线

取 $[-a_j,\ a_j]$ 的一段 $x_1=x_{j1}$ 为割线,则有

$$\sqrt{z_j^2-a_j^2}=\begin{cases}\sqrt{x_{1j}^2-a_j^2}\,(-\sqrt{x_{1j}^2-a_j^2}\,),\ x_{2j}=\\ \quad 0,\ x_{1j}>a_j(x_{1j}<-a_j)\\ \pm\mathrm{i}\sqrt{a_j^2-x_{1j}^2},\ x_{2j}=0^{\pm},\ |x_{1j}|<a_j\end{cases}\tag{1-49}$$

特别是在以 a_j 为原点的极坐标系中,当 $z_j-a_j=rRe^{i\psi}=rR(\cos\psi+\mathrm{i}\sin\psi)$ 且 $r\to0$ 时更有

$$\sqrt{z_j^2-a_j^2}=\sqrt{z_j-a_j}\ \sqrt{z_j+a_j}=\sqrt{z_j+a_j}\ \sqrt{rR}\,e^{i\psi/2}=\sqrt{2a_j}\ \sqrt{rR}\,e^{i\psi/2}$$

因而从无穷远处沿 x_{1j}轴走向 a_j,再绕 a_j 转到割线上岸时,ψ, θ 增加 π,而绕 a_j 转到割线下岸时,ψ, θ 增加 $-\pi$,故有

$$\sqrt{z_j^2-a_j^2}=\begin{cases}\sqrt{2a_j}\ \sqrt{rR},\ \psi=\theta=0,\\ \pm\mathrm{i}\sqrt{2a_j}\ \sqrt{rR},\ \psi=\theta=\pm\pi,\end{cases}\quad r\to0\tag{1-50}$$

当路线沿割线上、下岸再绕过 $-a_j$ 点后,ψ, θ 又增加 $\pm\pi$, $x_{1j}=x_1$ 轴又成为单值的线段,且在 $-a_j$ 的无限小邻域内有 $\sqrt{z_j^2-a_j^2}=-\sqrt{2a_j}\ \sqrt{rR}$。

1.5.4 椭圆变换几何学

椭圆夹杂和裂纹是电弹性理论中常采用的模型,因而这里给出椭圆的几何分析,方便读者查阅。在直角坐标系中,椭圆边界的方程常可用下列参数方法表示

$$x_1=a\cos\psi,\quad x_2=b\sin\psi,\quad z=a\cos\psi+\mathrm{i}b\sin\psi\tag{1-51}$$

式中 $2a$ 和 $2b$ 分别为椭圆的长、短轴长度,ψ 为实参数,$c=\sqrt{a^2-b^2}$ 是半焦距。在实际问题的讨论中,常用变换的方法把 z 平面变换到ς平面,然后在变换后的平面 ς 上讨论问题。变换时把椭圆边界 Γ 保角变换到ς平面上的单位圆周 γ, γ 上的点记为 σ。这种保角变换函数为

$$\begin{aligned}&z=\omega(\varsigma)=\frac{a+b}{2}\varsigma+\frac{a-b}{2}\frac{1}{\varsigma},\ \varsigma=\frac{z+\sqrt{z^2-(a^2-b^2)}}{a+b}\\&z=\omega(\varsigma)=R\Big(\varsigma+m\frac{1}{\varsigma}\Big),\ R=\frac{a+b}{2},\ m=\frac{a-b}{a+b}\end{aligned}\tag{1-52}$$

上述变换把椭圆的外部单值地变换到单位圆 γ 的外部，但椭圆的内部并非单值地变换到单位圆 γ 的内部，它把 z 平面上由 $-c$ 到 c 的一段实轴 Γ_0（分支线段）变换到ς平面上半径为 $\rho_0=\sqrt{(a-b)/(a+b)}<1$ 的圆周 γ_0。所以变换函数把 z 平面上 Γ 的内部变换到ς平面上的环形域 $\rho_0\leqslant\rho\leqslant 1,\ 0\leqslant\theta<2\pi$（图 1－8）。由此可看到，区域内部问题的保角变换比区域外部的要复杂。

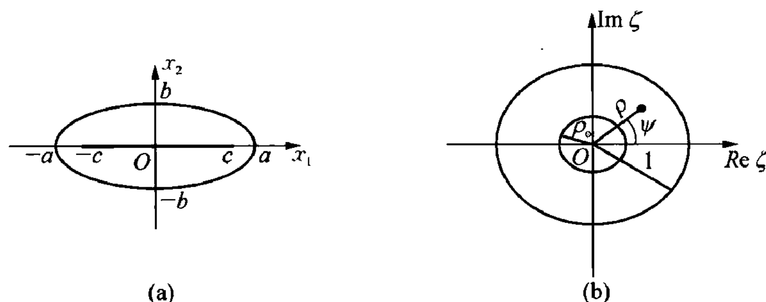


图 1－8　含椭圆孔的 z 平面到 V 平面上的变换

(a)z 平面；(b)V 平面

在ς平面上单位圆周 γ 上的微元弧长 $\mathrm{d}l$ 和在 z 平面上椭圆夹杂边界上的微元弧长 $\mathrm{d}s$ 分别为：

$$
\begin{gathered}
\mathrm{d}l^2=\mathrm{d}\varsigma\,\mathrm{d}\bar{\varsigma}=\mathrm{d}e^{\mathrm{i}\psi}\mathrm{d}e^{-\mathrm{i}\psi}=\mathrm{d}\psi^2 \\
\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}z\mathrm{d}\bar{z}=\omega'(\varsigma)\,\overline{\omega'(\varsigma)}\mathrm{d}\varsigma\,\mathrm{d}\bar{\varsigma}=\rho^2\mathrm{d}\psi^2,\ \rho^2=a^2\sin^2\psi+b^2\cos^2\psi
\end{gathered}
\tag{1-53}
$$

对二维平面上任一曲线 L，观察者沿其切线方向 $\boldsymbol{s}$ 反时针方向运行时，使所讨论的物体保持在左边，法线方向 $\boldsymbol{n}$ 指向物体边界的外部，如图 1－9 所示，这和式(1－7)采用的规定相同；这是绝大多数文献采取的沿边界运行的路线或选用的边界自然坐标，称为第一种运行方式或选用的第一种边界自然坐标系。按图 1－9，得到和式(1－7)相同的公式

$$
\begin{gathered}
n_1=s_2=\cos\theta=\mathrm{d}x_2/\mathrm{d}s,\quad n_2=-s_1=\sin\theta=-\mathrm{d}x_1/\mathrm{d}s\ \text{（适用于任何曲线）} \\
\mathrm{d}x_2/\mathrm{d}s=b\cos\psi/\rho,\quad \mathrm{d}x_1/\mathrm{d}s=-a\sin\psi/\rho\ \text{（适用于椭圆）}
\end{gathered}
\tag{1-54a}
$$

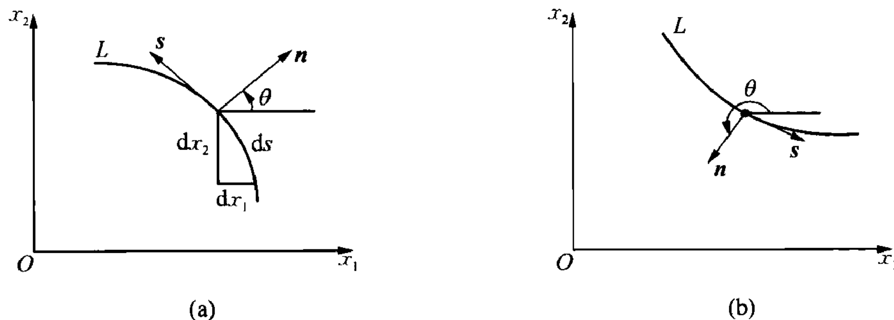


图 1－9　边界曲线的法线和切线(第一种边界自然坐标)

但也有些作者采用沿 L 的切线方向 $\boldsymbol{s}$ 运行时，使所讨论的物体保持在右边，法线方向 $\boldsymbol{n}$ 仍指向物体边界的外部，如图 1－10 所示，我们称之为第二种沿边界的运行方式，或选用的第二种边界自然坐标系。此时有

$$
n_1=-s_2=\cos\theta=-\mathrm{d}x_2/\mathrm{d}s,\quad n_2=s_1=\sin\theta=\mathrm{d}x_1/\mathrm{d}s\ \text{（适用于任何曲线）}
$$

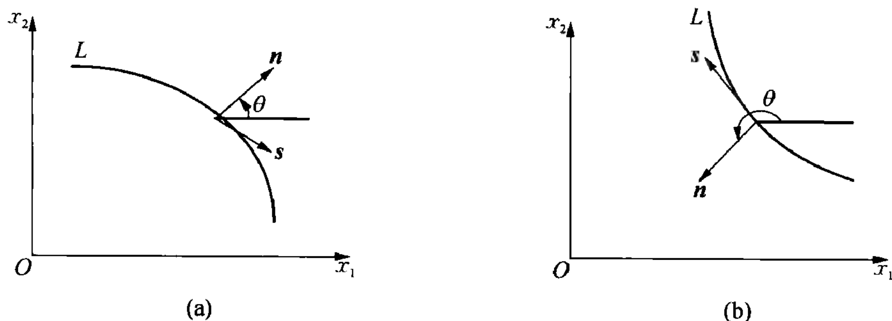


图 1-10 边界曲线的法线和切线(第二种边界自然坐标)

$$\mathrm{d}x_2/\mathrm{d}s = -b\cos\psi/\rho, \quad \mathrm{d}x_1/\mathrm{d}s = a\sin\psi/\rho(\text{适用于椭圆}) \tag{1-54b}$$

根据取用的文献不同,本书将采用上述两种规定中的一种。

1.5.1 节讨论过广义复变数 $z_j = x_1 + \mu_j x_2$, $\mu_j = \alpha_j + \mathrm{i}\beta_j$。$z_j$ 平面上的几何图形由 z 平面上的几何图形通过仿射变换得到。z 平面上椭圆夹杂边界 Γ 上的点 $(a\cos\psi + \mathrm{i}b\sin\psi)$ 对应于 z_j 平面上孔的边界点 $a\cos\psi + \mu_j b\sin\psi$,或 $a\cos\psi + \alpha_j b\sin\psi + \mathrm{i}\beta_j b\sin\psi$,式中 ψ 为实参数,它是 ς_j 平面上的极角。把所有这些边界变换到 ς_j 平面上的单位圆周 γ 的变换函数为

$$\begin{gathered} z_j = \omega_j(\varsigma_j) = \frac{1}{2}[(a - \mathrm{i}\mu_j b)\varsigma_j + (a + \mathrm{i}\mu_j b)\varsigma_j^{-1}] \\ \varsigma_j = \frac{z_j + \sqrt{z_j^2 - (a^2 + \mu_j^2 b^2)}}{a - \mathrm{i}\mu_j b}, \quad \frac{1}{\varsigma_j} = \frac{z_j - \sqrt{z_j^2 - (a^2 + \mu_j^2 b^2)}}{a + \mathrm{i}\mu_j b} \end{gathered} \tag{1-55a}$$

很多作者把上式写成下列形式

$$\begin{gathered} z_j = c_j\varsigma_j + d_j\varsigma_j^{-1}, \ \varsigma_j = (z_j + \sqrt{z_j^2 - 4c_j d_j})/2c_j \\ c_j = (a - \mathrm{i}\mu_j b)/2, \ d_j = (a + \mathrm{i}\mu_j b)/2(\text{重复指标 } j \text{ 不求和}) \end{gathered} \tag{1-55b}$$

当 ς_j 在单位圆周 γ 时,即 $\varsigma_j = \rho e^{\mathrm{i}\psi}$ 时,z_j 便位于各自 z_j 平面上的孔的边界上。上述变换函数在 $\omega'(\varsigma_j) = (a - \mathrm{i}\mu_j b) - (a + \mathrm{i}\mu_j b)\varsigma_j^{-2}/2 = 0$ 处存在分支点 ς_{0j},或

$$\begin{gathered} 1 - m_j\varsigma_{0j}^{-2} = 0, \ \varsigma_{0j} = \pm\sqrt{m_j} = \pm\rho_0 e^{\mathrm{i}\psi_{0j}}, \ \rho_0 = |\sqrt{m_j}| \\ m_j = \frac{d_j}{c_j} = \frac{a + \mathrm{i}\mu_j b}{a - \mathrm{i}\mu_j b} = \frac{(a^2 - \mu_j\bar{\mu}_j b^2) + \mathrm{i}(\mu_j - \bar{\mu}_j)ab}{a^2 + \mu_j\bar{\mu}_j b^2 - \mathrm{i}(\mu_j - \bar{\mu}_j)ab} = \rho_{0j}^2 e^{2\mathrm{i}\psi_{0j}} \end{gathered} \tag{1-56a}$$

式中

$$\begin{gathered} \rho_{0j}^4 = m_j\bar{m}_j = [(a + \mathrm{i}\mu_j b)(a - \mathrm{i}\bar{\mu}_j b)]/[(a - \mathrm{i}\mu_j b)(a + \mathrm{i}\bar{\mu}_j b)] = \\ \frac{a^2 + \mu_j\bar{\mu}_j b^2 + \mathrm{i}(\mu_j - \bar{\mu}_j)ab}{a^2 + \mu_j\bar{\mu}_j b^2 - \mathrm{i}(\mu_j - \bar{\mu}_j)ab} < 1, \quad \mathrm{Im}\,\mu_j > 0 \\ e^{2\mathrm{i}\psi_{0j}} = \sqrt{[(a + \mathrm{i}\mu_j b)(a + \mathrm{i}\bar{\mu}_j b)]/[(a - \mathrm{i}\mu_j b)(a - \mathrm{i}\bar{\mu}_j b)]} \end{gathered} \tag{1-56b}$$

在 z_j 平面上的分支点 $\pm z_{0j}$ 相应地为 $z_{0j} = 2\sqrt{c_j d_j}$ 或

$$\pm z_{0j} = (a - \mathrm{i}\mu_j b)(\varsigma_{0j} + m_j\varsigma_{0j}^{-1})/2 = \pm\sqrt{(a + \mathrm{i}\mu_j b)(a - \mathrm{i}\mu_j b)} = \pm\sqrt{a^2 + \mu_j^2 b^2} \tag{1-57}$$

ς_j 平面上以半径为 ρ_{0j} 的圆周 Γ_0 变为 z_j 平面上以 $\pm z_{0j}$ 为端点的直线段，即有

$$z_j = \frac{1}{2}[(a - i\mu_j b)\rho_{0j}e^{i\psi} + (a + i\mu_j b)\rho_{0j}^{-1}e^{-i\psi}] =$$
$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + \mu_j^2 b^2}(e^{-i\psi_{0j}}e^{i\psi} + e^{i\psi_{0j}}e^{-i\psi}) =$$
$$\sqrt{a^2 + \mu_j^2 b^2}\cos(\psi - \psi_{0j}) \tag{1-58}$$

在 z 平面上，$z_0 = \pm\sqrt{a^2 - b^2} = \pm c$，为椭圆焦点。因此，变换函数式(1-55)把 z 平面上椭圆孔的外部 S^- 和所有 z_j 平面上对应的边界外部变换到ς平面上的单位圆周 γ 的外部 Ω^-，而且变换是一一对应的。但是正如式(1-57)和(1-58)所表明的，把 z_j 平面上椭圆的内部变换到ς平面上的圆环域：$\rho_{0j} \leqslant \rho_j \leqslant 1,\ 0 \leqslant \theta < 2\pi$，或 $\Omega^+: \rho_j \leqslant 1,\ \Omega_0: \rho_j \leqslant \rho_{0j}$

1.6 Riemann - Hilbert(黎曼-希尔伯特)问题[5, 13, 14]

1.6.1 纯量函数的 Riemann - Hilbert 问题

设在复平面 z 上由 n 条互不相交的光滑线段 L_k，其端点记为 a_k，b_k，规定 a_k 到 b_k 为正方向，沿 $a_k b_k$ 正方向运行时，其左边为正“+”，右边为负“-”，L_k 的集合记为 L(图 1-11)，L 上的点用 t 表示。L 上给定满足 Hölder(贺德)条件的函数 $g(t)$ 和 $f(t)$，现在寻找下列边值问题的解

$$F^+(t) - gF^-(t) = f(t),\ t \in L \tag{1-59}$$

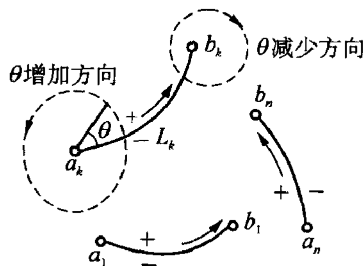


图 1-11 互不相交光滑曲线上的 Riemann - Hilbert 问题

1) ***齐次问题的解***

首先讨论齐次问题

$$F^+(t) - gF^-(t) = 0 \tag{1-60}$$

的基本解。令基本解为

$$X_0(z) = \prod_{k=1}^{n}(z - a_k)^{-\gamma}(z - b_k)^{\gamma-1} \tag{1-61}$$

上述函数是多值函数，需作一条割线使其单值化，这些割线通过上述线段延伸到无穷远处，且通常取下列分支：

$$X_0(z) = \frac{1}{z^n} + \frac{C_{n+1}}{z^{n+1}} + \cdots,\ |z| \to \infty \tag{1-62}$$

当围绕 a_k 由正边绕到负边时，以 a_k 为中心的极角 θ 为逆时针旋转，按通常的习惯 θ 是增加的。当围绕 b_k 由正边绕到负边时，以 b_k 为中心的极角 θ 为顺时针旋转，θ 是减少的。所以对于两种情况都有

$$X_0^-(t) = e^{-2\pi i\gamma}X_0^+(t),\quad 或\ X_0^+(t) = e^{2\pi i\gamma}X_0^-(t) \tag{1-63}$$

因此若令 $e^{2\pi i\gamma}=g$，则 $X_0(t)$是齐次方程的解。所以

$$e^{2\pi i\gamma}=g=\frac{X_0^+(t)}{X_0^-(t)},\quad 或\ \gamma=\frac{\ln g}{2\pi i}=\frac{\ln|g|}{2\pi i}+\frac{\theta}{2\pi},\ 0\leqslant\theta<2\pi \tag{1-64}$$

利用式(1-64)，齐次方程式(1-60)可以改写为

$$\frac{F^+(t)}{X_0^+(t)}-\frac{F^-(t)}{X_0^-(t)}=0,\quad 或\frac{F^+(t)}{X_0^+(t)}=\frac{F^-(t)}{X_0^-(t)},\ t\in L \tag{1-65}$$

上式中 $F^+(t)/X_0^+(t)$是在 L 左边的某个解析函数的边值，$F^-(t)/X_0^-(t)$是在 L 右边的某个解析函数的边值，在 L 上它们又相等，因而可以通过 L 相互解析延拓，构成一个除无穷远点外的全平面解析的函数 $F(z)/X_0(z)$，无穷远点可以是极点。根据刘微尔定理，$F(z)/X_0(z)$是一个多项式 $P(z)$。如果要求在无穷远点也正则，那么 $P(z)$是一个不超过 n 次的多项式，即

$$F(z)=X_0(z)C(z),\ C(z)=C_nz^n+C_{n-1}z^{n-1}+\cdots+C_0 \tag{1-66}$$

2) 非齐次问题的解

利用式(1-64)，非齐次方程式(1-59)可以改写为

$$\frac{F^+(t)}{X_0^+(t)}-\frac{F^-(t)}{X_0^-(t)}=\frac{f(t)}{X_0^+(t)},\ t\in L \tag{1-67}$$

利用 Cauchy 公式，上式的通解与特解之和为

$$F(z)=\frac{X_0(z)}{2\pi i}\int_L\frac{f(t)\mathrm{d}t}{X_0^+(t)(t-z)}+X_0(z)C(z) \tag{1-68}$$

式(1-66)和(1-68)表示的解在线段 L_k 的端点 a_k，b_k 处是奇异的，特别适合裂纹问题。形如式(1-68)中的积分

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(t)\mathrm{d}t}{(t-z)} \tag{1-69}$$

称为在 L 上给定边值的柯希型积分，式中 $f(t)$在 L 上满足 Hölder 条件，是复平面上的解析函数，它在 L 上的边值由 Сохоцкий - Plemelj(沙霍茨基-拍莱米里)公式确定

$$\begin{gathered}\Phi^+(t_0)=\frac{1}{2}f(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(t)\mathrm{d}t}{(t-t_0)},\quad \Phi^-(t_0)=-\frac{1}{2}f(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f(t)\mathrm{d}t}{(t-t_0)}\\ \Phi^+(t_0)-\Phi^-(t_0)=f(t_0),\quad \Phi^+(t_0)+\Phi^-(t_0)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{f(t)\mathrm{d}t}{(t-t_0)}\end{gathered} \tag{1-70}$$

如果要使解在某个端点 c_j 处有界，则只需把式(1-61)乘以 $(z-c_j)$，因 $(z-c_j)$ 在 L 的两边取同一值，故不影响前面的讨论。显然，解乘以 $(z-c_j)$ 后还是解。

根据广义复变数的定义知，z 和 z_j 之间是一种仿射关系。由式(1-45)可以推出，上面的 Hilbert 问题和其相应的公式可以推广到自变量为广义复变数的复变函数。

1.6.2 矢量函数的 Riemann - Hilbert 问题

对于有 m 个分量的矢量函数，Сохоцкий - Plemelj 公式式(1-70)仍然成立，只是取矢量形式。即对矢量函数的 Cauchy 型积分

$$\boldsymbol{\Phi}(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(t)\mathrm{d}t}{(t-z)} \tag{1-71}$$

有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Phi}^+(t_0)=\frac{1}{2}f(t_0)+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(t)\mathrm{d}t}{(t-t_0)},\quad \boldsymbol{\Phi}^-(t_0)=-\frac{1}{2}f(t_0)+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(t)\mathrm{d}t}{(t-t_0)}\\&\boldsymbol{\Phi}^+(t_0)-\boldsymbol{\Phi}^-(t_0)=f(t_0),\quad \boldsymbol{\Phi}^+(t_0)+\boldsymbol{\Phi}^-(t_0)=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(t)\mathrm{d}t}{(t-t_0)}\end{aligned} \tag{1-72}$$

现在来讨论矢量形式的 Hilbert 问题。式(1-59)现在取形式

$$\boldsymbol{F}^+(t)-\boldsymbol{g}\boldsymbol{F}^-(t)=\boldsymbol{f}(t),\quad F_j^+(t)-g_{ij}F_j^-(t)=f_i(t),\ t\in L \tag{1-73}$$

设 $\boldsymbol{g}$ 为 Hermite 矩阵,且设 $\det\boldsymbol{g}\neq 0$。首先讨论齐次方程组

$$\boldsymbol{F}^+(t)-\boldsymbol{g}\boldsymbol{F}^-(t)=\boldsymbol{0},\quad F_j^+(t)-g_{ij}F_j^-(t)=0,\ t\in L \tag{1-74}$$

类似于式(1-61),假设齐次方程组基本解为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{X}_0(z)=[X_{01}(z),\ X_{02}(z),\ \cdots,\ X_{0m}(z))]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\omega}Y_0(z)\\&X_{0j}(z)=\omega_jY_0(z),\ Y_0(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{-\gamma}(z-b_k)^{\gamma-1}\end{aligned} \tag{1-75a}$$

类似于式(1-63),由式(1-75a)可得

$$\boldsymbol{X}_0^-(t)=\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\gamma}\boldsymbol{X}_0^+(t),\quad 或\ \boldsymbol{X}_0^+(t)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma}\boldsymbol{X}_0^-(t) \tag{1-76}$$

因为基本解满足式(1-74),所以把式(1-76)代入(1-74)便得

$$\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma}\boldsymbol{X}_0^-(t)-\boldsymbol{g}\boldsymbol{X}_0^-(t)=\boldsymbol{0}\Rightarrow(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{g})\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{0} \tag{1-77}$$

要使 $\boldsymbol{\omega}$ 有非零解,必须其前的系数的行列式为零,即

$$|\ \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{g}\ |=0,\ \boldsymbol{I}=\mathrm{diag}[1,\ 1,\ \cdots,\ 1]_{m\times m} \tag{1-78}$$

上式是一个本征方程。如果上式有解,则式(1-74)成立。由上式可解得 m 个本征值:$\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma_1}$, $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma_2}$, $\cdots$, $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma_m}$,由式(1-77)可求出对应的本征矢量 $\boldsymbol{\omega}^{(1)}$, $\boldsymbol{\omega}^{(2)}$, $\cdots$, $\boldsymbol{\omega}^{(m)}$。记对应于 $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma_i}$ 的解用带上标(i)的 $\boldsymbol{\omega}^{(i)}$ 表示,对同一个本征值,不同的 $\omega_j^{(i)}$ 相互之间存在确定的关系,和材料常数相关,只有一个是独立常数。进而由式(1-75a)可求出基本解为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{X}_0^{(i)}(z)=\boldsymbol{\omega}^{(i)}Y_0^{(i)}(z),\ X_{0j}^{(i)}(z)=\omega_j^{(i)}Y_0^{(i)}(z)\\&Y_0^{(i)}(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{-\gamma_i}(z-b_k)^{\gamma_i-1},\ i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ m\end{aligned} \tag{1-75b}$$

1) ***第一种解法***

基本解的全部组成方阵 $\boldsymbol{P}(z)$,即有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{P}(z)=[\boldsymbol{X}_0^{(1)}(z),\ \boldsymbol{X}_0^{(2)}(z),\ \cdots,\ \boldsymbol{X}_0^{(m)}(z)]=\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{Q}(z),\quad P_{ji}(z)=X_{0j}^{(i)}(z)\\&\boldsymbol{Q}(z)=\langle Y_0^{(*)}(z)\rangle=\langle Y_0^{(j)}(z)\rangle=\mathrm{diag}[Y_0^{(1)}(z),\ \cdots,\ Y_0^{(m)}(z)]\\&\boldsymbol{\Omega}=[\boldsymbol{\omega}^{(1)},\ \boldsymbol{\omega}^{(2)},\ \cdots,\ \boldsymbol{\omega}^{(m)}]\end{aligned} \tag{1-79}$$

式中 $\langle Y_0^{(*)}(z)\rangle$ 和 $\langle Y_0^{(j)}(z)\rangle$ 表示同一个意思,本书将同时采用。按照基本解的性质有

$$\boldsymbol{P}^{+}(t)-\boldsymbol{g}\boldsymbol{P}^{-}(t)=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{g}=\boldsymbol{P}^{+}(t)[\boldsymbol{P}^{-}(t)]^{-1},\ t\in L \tag{1-80}$$

把式(1-80)代入(1-74)得

$$[\boldsymbol{P}^{+}(t)]^{-1}\boldsymbol{F}^{+}(t)-[\boldsymbol{P}^{-}(t)]^{-1}\boldsymbol{F}^{-}(t)=\boldsymbol{0},\ t\in L \tag{1-81}$$

上式表明 $[\boldsymbol{P}^{+}(t)]^{-1}\boldsymbol{F}^{+}(t)$，$[\boldsymbol{P}^{-}(t)]^{-1}\boldsymbol{F}^{-}(t)$ 是某个在无穷远正则的全平面解析的函数 $[\boldsymbol{P}(z)]^{-1}\boldsymbol{F}(z)$的边界值，即齐次方程式(1-74)的通解 $\boldsymbol{F}_0(z)$为

$$\begin{gathered}[\boldsymbol{P}(z)]^{-1}\boldsymbol{F}_0(z)=\boldsymbol{C}(z),\quad \boldsymbol{F}_0(z)=\boldsymbol{P}(z)\boldsymbol{C}(z)\\ \boldsymbol{C}(z)=[C_1(z),C_2(z),\cdots,C_m(z)]^{\mathrm{T}},\quad C_k(z)=c_{kn}z^n+c_{k,n-1}z^{n-1}+\cdots+c_{k0}\\ \boldsymbol{C}(z)=\boldsymbol{c}_nz^n+\boldsymbol{c}_{n-1}z^{n-1}+\cdots+\boldsymbol{c}_0,\quad \boldsymbol{c}_k=(c_{kn},c_{k,n-1},\cdots,c_{k0})^{\mathrm{T}}\end{gathered} \tag{1-82}$$

如果允许在无穷远点有 p 阶极点，则 $\boldsymbol{C}(z)$为不超过 $n+p$ 阶的矢量多项式。

把式(1-80)代入非齐次方程(1-73)得

$$[\boldsymbol{P}^{+}(t)]^{-1}\boldsymbol{F}^{+}(t)-[\boldsymbol{P}^{-}(t)]^{-1}\boldsymbol{F}^{-}(t)=[\boldsymbol{P}^{+}(t)]^{-1}\boldsymbol{f}(t),\ t\in L \tag{1-83}$$

上式是$[\boldsymbol{P}(z)]^{-1}\boldsymbol{F}(z)$解耦的边值问题。利用 Cauchy 公式可得上式的特解 $\boldsymbol{F}_{特}(z)$为

$$[\boldsymbol{P}(z)]^{-1}\boldsymbol{F}_{特}(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\boldsymbol{f}(t)\mathrm{d}t}{\boldsymbol{P}^{+}(t)(t-z)},\quad \boldsymbol{F}_{特}(z)=\frac{\boldsymbol{P}(z)}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\boldsymbol{f}(t)\mathrm{d}t}{\boldsymbol{P}^{+}(t)(t-z)} \tag{1-84}$$

非齐次方程(1-73)的通解为

$$\boldsymbol{F}(z)=\boldsymbol{F}_0(z)+\boldsymbol{F}_{特}(z)=\boldsymbol{P}(z)\left[\boldsymbol{C}(z)+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\boldsymbol{f}(t)\mathrm{d}t}{\boldsymbol{P}^{+}(t)(t-z)}\right] \tag{1-85}$$

式中 $\boldsymbol{f}(t)/\boldsymbol{P}^{+}(t)$应理解为$[\boldsymbol{P}^{+}(t)]^{-1}\boldsymbol{f}(t)$。若令

$$[\boldsymbol{P}^{+}(t)]^{-1}\boldsymbol{f}(t)=\tilde{\boldsymbol{f}}(t)=[\tilde{f}_1(t),\tilde{f}_2(t),\cdots,\tilde{f}_m(t)]^{\mathrm{T}} \tag{1-86}$$

非齐次方程(1-73)的通解式(1-85)可以更详细地写为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(z)=\boldsymbol{P}(z)\left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\tilde{\boldsymbol{f}}(t)\mathrm{d}t}{(t-z)}+\boldsymbol{C}(z)\right]&=\boldsymbol{X}_0^{(1)}(z)\left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\tilde{f}_1(t)\mathrm{d}t}{(t-z)}+C^{(1)}(z)\right]+\\ \boldsymbol{X}_0^{(2)}(z)\left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\tilde{f}_2(t)\mathrm{d}t}{(t-z)}+C^{(2)}(z)\right]&+\cdots+\boldsymbol{X}_0^{(m)}(z)\left[\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\tilde{f}_m(t)\mathrm{d}t}{(t-z)}+C^{(m)}(z)\right]\end{aligned} \tag{1-87}$$

2) ***第二种解法***

上述问题还可通过解耦的方法来求解。这可如下进行：由于 $\boldsymbol{g}$ 为 Hermite 矩阵，所以对应不同本征值的本征矢量在复数空间相互正交。仿照式(1-40)，现在我们组成本征矢量 $\boldsymbol{\omega}^{(i)}$ 的方阵 $\boldsymbol{\Omega}$。按式(1-40)和(1-41)有

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\Omega}=[\boldsymbol{\omega}^{(1)},\boldsymbol{\omega}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{\omega}^{(m)}],\quad \overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{\Lambda},\ \overline{\boldsymbol{\Omega}}^{-\mathrm{T}}=\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\\ \overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{M},\ \boldsymbol{M}=\mathrm{diag}[\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma_1}\Lambda_1^2,\cdots,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma_m}\Lambda_m^2]\\ \boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}[\Lambda_1^2,\Lambda_2^2,\cdots,\Lambda_m^2],\quad \Lambda_i^2=\overline{\omega}_1^{(i)}\omega_1^{(i)}+\overline{\omega}_2^{(i)}\omega_2^{(i)}+\cdots+\overline{\omega}_m^{(i)}\omega_m^{(i)}\end{gathered} \tag{1-88}$$

把式(1-73)两边同时左乘$\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}$，并利用式(1-88)，则有

$$\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{+}(t)-(\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}\boldsymbol{\Omega})\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{F}^{-}(t)=\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{+}(t)-\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^{-}(t)=\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(t)$$

$$\boldsymbol{M\Lambda}^{-1} = \mathrm{diag}[\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma_1}, \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma_2}, \cdots, \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma_m}] = \langle \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma_*} \rangle \tag{1-89}$$

从而式(1-89)还可写成下述解耦的边值问题

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\Psi}^+(t) - \boldsymbol{M\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\Psi}^-(t) = \boldsymbol{f}^*(t), \quad \Psi_i^+(t) - \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma_i}\Psi_i^-(t) = f_i^*(t) \\ \boldsymbol{\Psi}^\pm(t) = \overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}^\pm(t), \quad \boldsymbol{f}^*(t) = \overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(t)\end{gathered} \tag{1-90}$$

上式中 $\boldsymbol{\Psi}(z)$的每个分量都是纯量函数的 Hilbert 边值问题,因此按式(1-68),其解可取为

$$\begin{gathered}\Psi_i(z) = Y_0^{(i)}(z)\left[\Lambda_i^2 C^{(i)}(z) + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{f_i^*(t)\mathrm{d}t}{Y_0^{(i)+}(t)(t-z)}\right] \\ \boldsymbol{\Psi}(z) = \boldsymbol{Q}(z)\left\{\boldsymbol{\Lambda C}(z) + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{[\boldsymbol{Q}^+(t)]^{-1}\boldsymbol{f}^*(t)\mathrm{d}t}{(t-z)}\right\} \\ \boldsymbol{Q}(z) = \langle Y_0^{(*)}(z)\rangle, \ \boldsymbol{C}(z) = \boldsymbol{c}_n z^n + \boldsymbol{c}_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \boldsymbol{c}_0, \quad \boldsymbol{c}_k = [c_k^{(1)}, c_k^{(2)}, \cdots, c_k^{(m)}]^{\mathrm{T}}\end{gathered} \tag{1-91}$$

求出 $\boldsymbol{\Psi}(z)$后,按 $\boldsymbol{F}(z) = \overline{\boldsymbol{\Omega}}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}(z)$ 求 $\boldsymbol{F}(z)$,其中$\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{-\mathrm{T}} = [\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}]^{-1} = \boldsymbol{\Omega\Lambda}^{-1}$。如设当 $t \to \infty$ 时,$f_i^*(t)/X_0^{(i)+}(t) \to \alpha_q t^q + \cdots + \alpha_0 + \alpha_{-1}/t + \cdots$,按照本章后面的公式(1-131),则式(1-91)中的积分可积出为

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{f_i^*(t)\mathrm{d}t}{Y_0^{(i)+}(t)(t-z)} = \frac{1}{1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma_i}}\left[\frac{f_i^*(z)}{Y_0^{(i)}(z)} - \alpha_q^{(i)}z^q - \cdots - \alpha_0^{(i)}\right]$$

从而式(1-91)可写成更明显的形式

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\Psi}(z) = \boldsymbol{Q}(z)\{\boldsymbol{\Lambda C}(z) + \langle 1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma_i}\rangle^{-1}[\boldsymbol{f}^*(z)[\boldsymbol{Q}(z)]^{-1} - (\boldsymbol{\alpha}_q z^q + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_0)]\} \\ \Psi_i(z) = Y_0^{(i)}(z)\left\{\Lambda_i^2 C^{(i)}(z) + \frac{1}{1-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma_i}}\left[\frac{f_i^*(z)}{Y_0^{(i)}(z)} - (\alpha_q^{(i)}z^q + \cdots + \alpha_0^{(i)})\right]\right\}\end{gathered} \tag{1-92}$$

现在来证明两种方法的结果相同。计及 $\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{-\mathrm{T}} = \boldsymbol{\Omega\Lambda}^{-1}$。按式(1-90)和(1-91)有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}(z) = \overline{\boldsymbol{\Omega}}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}(z) &= \boldsymbol{\Omega\Lambda}^{-1}\boldsymbol{Q}(z)\left[\boldsymbol{\Lambda C}(z) + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{f}(x_1)\mathrm{d}t}{\boldsymbol{Q}^+(x_1)(x_1-z)}\right] = \\ &\boldsymbol{\Omega Q}(z)\left[\boldsymbol{C}(z) + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{\boldsymbol{f}(x_1)\mathrm{d}t}{\boldsymbol{\Omega Q}^+(x_1)(x_1-z)}\right] = \\ &\boldsymbol{P}(z)\left[\boldsymbol{C}(z) + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{\boldsymbol{f}(x_1)\mathrm{d}x_1}{\boldsymbol{P}^+(x_1)(x_1-z)}\right]\end{aligned}$$

上式和式(1-85)相同。特别是对归一化的 $\boldsymbol{\Omega}$ 有 $\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{I}$。式(1-91)和(1-92)中的 $\boldsymbol{\Lambda}$ 可以合并到$\boldsymbol{C}(z)$中,仅为讨论方便而引入。

1.6.3 具有广义复变数的矢量函数的 Riemann-Hilbert 问题

电弹性理论中经常遇到有 m 个分量的函数 $\boldsymbol{F}(z_*)$在 L_k 上的边值问题,$\boldsymbol{F}(z_*)$的不同分量 $F_j(j=1, 2, \cdots, m)$ 是各自广义复变数 z_j 的函数,即有 $F_j(z_j)$。本处介绍的方法适用于 L_k 在 x_1 轴上,由于 L_k 在 x_1 轴上,所以所有的 z_j 在 x_1 轴上都是 $x_{1j} = x_1$。因而遇到的仍然是式(1-73)表示的矢量函数形式的 Riemann-Hilbert 边值问题,但它是 $\boldsymbol{F}(z_*)$在 L_k 上的边值问题。即找下述边值问题

$$\boldsymbol{F}^+(t) - \boldsymbol{g}\boldsymbol{F}^-(t) = \boldsymbol{f}(t), \ F_j^+(t) - g_{ij}F_j^-(t) = f_i(t), \ t \in L \tag{1-93}$$

的解 $\boldsymbol{F}(z_*)$，式中 $\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{f}$ 为矢量函数，而且 $\boldsymbol{F}(z_*)$ 的分量是各自广义复变数 z_j 的函数，不是同一个复变数 z 的函数；$\boldsymbol{g}$ 为 Hermite 矩阵，即有 $\boldsymbol{g} = \bar{\boldsymbol{g}}^{\mathrm{T}}$。本章 1.2.3 节给出了这种情况的各向异性弹性体的例子。

1）用矢量形式讨论一般情况的解

由于 z_j 可以看成 z 平面到 ς 平面的线性变换，其中 $\xi_1 = x_1 + \alpha_j x_2$，$\xi_2 = \beta_j x_2$，因而在 z 平面上可微的解析的函数，在 z_j 平面上也可微和解析，反之亦然。所以可以采用下列解法。

① 第一种解法。先把式(1-93)看成是 z 平面上的矢量方程，按式(1-85)，其解为

$$\begin{gathered}\boldsymbol{F}(z) = \boldsymbol{P}(z)\left\{\boldsymbol{C}(z) + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{[\boldsymbol{P}^+(t)]^{-1}\boldsymbol{f}(t)\mathrm{d}t}{(t-z)}\right\} \\ \boldsymbol{P}(z) = [\boldsymbol{X}_0^{(1)}(z),\ \boldsymbol{X}_0^{(2)}(z),\ \cdots,\ \boldsymbol{X}_0^{(m)}(z)],\quad P_{ji}(z) = X_{0j}^{(i)}(z)\end{gathered} \tag{1-94}$$

然后把第 j 个分量 $F_j(z)$ 中的自变量 z 改写成 z_j，它也是 z_j 平面上的解析函数。从而原问题式(1-93)的正确解便是：

$$\begin{gathered}\boldsymbol{F}(z_*) = \boldsymbol{P}(z_*)\left\{\boldsymbol{C}(z_*) + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{[\boldsymbol{P}^+(t)]^{-1}\boldsymbol{f}(t)\mathrm{d}t}{(t-z_*)}\right\} \\ F_j(z_j) = P_{ji}(z_j)\left(C^{(i)}(z_j) + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{\{[\boldsymbol{P}^+(t)]^{-1}\boldsymbol{f}(t)\}_j\mathrm{d}t}{(t-z_j)}\right)\end{gathered} \tag{1-95}$$

显然，上述解满足原问题的边界条件。

② 第二种解法。把式(1-93)等式两边同时左乘 $\boldsymbol{\Omega}^{\mathrm{T}}$，则有

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\Psi}^+(t) - \boldsymbol{M}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\Psi}^-(t) = \boldsymbol{f}^*(t),\quad \Psi_i^+(t) - \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma_i}\Psi_i^-(t) = f_i^*(t) \\ \boldsymbol{\Psi}(t) = \bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{F}(t),\quad \boldsymbol{f}^*(t) = \bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{f}(t) \\ \Psi_i(z) = Y_0^{(i)}(z)\left[C^{(i)}(z) + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{f_i^*(t)\mathrm{d}t}{Y_0^{(i)+}(t)(t-z)}\right],\quad Y_0^{(i)}(z) = \prod_{k=1}^n (z-a_k)^{-\gamma_i}(z-b_k)^{\gamma_i-1}\end{gathered} \tag{1-96}$$

上式是 $\boldsymbol{\Psi}(z)$ 解耦的边值问题，因此其解仍为式(1-91)和(1-92)，求出 $\boldsymbol{\Psi}(z)$ 后，按 $\boldsymbol{F}(z) = \bar{\boldsymbol{\Omega}}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}(z) = \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\Psi}(z)$ 求 $\boldsymbol{F}(z)$，然后把第 j 个分量 $F_j(z)$ 中的自变量 z 改写成 z_j 即可。

2）用分量形式讨论二维问题的解

作为例题，用分量形式讨论二维问题。此时边值问题是

$$\begin{Bmatrix}F_1^+(t) \\ F_2^+(t)\end{Bmatrix} - \begin{bmatrix}g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}F_1^-(t) \\ F_2^-(t)\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}f_1(t) \\ f_2(t)\end{Bmatrix} \tag{a}$$

类似于式(1-75)，假设基本解 $\boldsymbol{X}_0(z_*) = [X_{01}(z_1),\ X_{02}(z_2)]^{\mathrm{T}}$ 取下列形式

$$X_{01}(z_1) = \omega_1\prod_{k=1}^n (z_1-a_k)^{-\gamma}(z_1-b_k)^{\gamma-1},\ X_{02}(z_2) = \omega_2\prod_{k=1}^n (z_2-a_k)^{-\gamma}(z_2-b_k)^{\gamma-1} \tag{b}$$

类似于式(1-76)，有

$$\begin{gathered}X_{01}^-(t) = \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\gamma}X_{01}^+(t),\quad 或\ X_{01}^+(t) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma}X_{01}^-(t) \\ X_{02}^-(t) = \mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\gamma}X_{02}^+(t),\quad 或\ X_{02}^+(t) = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma}X_{02}^-(t)\end{gathered} \tag{c}$$

因为基本解需满足式(a)，所以把式(c)代入(a)便得

$$
\begin{aligned}
&e^{2\pi i\gamma}X_{01}^{-}(t)-g_{11}X_{01}^{-}(t)-g_{12}X_{02}^{-}(t)=0\Rightarrow(e^{2\pi i\gamma}-g_{11})\omega_1-g_{12}\omega_2=0\\
&e^{2\pi i\gamma}X_{02}^{-}(t)-g_{21}X_{01}^{-}(t)-g_{22}X_{02}^{-}(t)=0\Rightarrow-g_{21}\omega_1+(e^{2\pi i\gamma}-g_{22})\omega_2=0
\end{aligned}\tag{d}
$$

要使 ω_1，ω_2 和 X_{01}^{-}，X_{02}^{-} 有非零解，必须让其前的系数的行列式为零，即

$$
\begin{vmatrix}(e^{2\pi i\gamma}-g_{11}) & -g_{12}\\ -g_{21} & (e^{2\pi i\gamma}-g_{22})\end{vmatrix}=0,\quad (e^{2\pi i\gamma}-g_{11})(e^{2\pi i\gamma}-g_{22})-g_{12}g_{21}=0\tag{e}
$$

上式是一个本征方程。如果上式有解，则式(a)成立。由上二式可解得两个本征值：$e^{2\pi i\gamma_1}$，$e^{2\pi i\gamma_2}$ 和两组本征矢量。记对应于 $e^{2\pi i\gamma_1}$ 和 $e^{2\pi i\gamma_2}$ 的解分别用上标(1)和(2)表示，则相应地有两组本征矢量 $\boldsymbol{\omega}^{(1)}$，$\boldsymbol{\omega}^{(2)}$ 和两组基本解 $\boldsymbol{X}_0^{(1)}(z_*)$ 和 $\boldsymbol{X}_0^{(2)}(z_*)$，用基本解组成方阵 $\boldsymbol{P}(z_*)$，即

$$
\boldsymbol{X}_0^{(1)}(z_*)=[X_{01}^{(1)}(z_1),\ X_{02}^{(1)}(z_2)]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{X}_0^{(2)}(z_*)=[X_{01}^{(2)}(z_1),\ X_{02}^{(2)}(z_2)]^{\mathrm{T}}
$$

$$
\boldsymbol{P}(z_*)=[\boldsymbol{X}_0^{(1)}(z_*),\ \boldsymbol{X}_0^{(2)}(z_*)]=\begin{bmatrix}X_{01}^{(1)}(z_1) & X_{01}^{(2)}(z_1)\\ X_{02}^{(1)}(z_2) & X_{02}^{(2)}(z_2)\end{bmatrix},\quad P_{ji}(z_j)=X_{0j}^{(i)}(z_j)
$$

$$
\begin{aligned}
e^{2\pi i\gamma_1}&=\frac{1}{2}\left[(g_{11}+g_{22})+\sqrt{(g_{11}+g_{22})^2+4g_{12}g_{21}}\right]\\
e^{2\pi i\gamma_2}&=\frac{1}{2}\left[(g_{11}+g_{22})-\sqrt{(g_{11}+g_{22})^2+4g_{12}g_{21}}\right]\\
\omega_2^{(i)}&=\frac{e^{2\pi i\gamma_i}-g_{11}}{g_{12}}\omega_1^{(i)}=\frac{g_{21}}{e^{2\pi i\gamma_i}-g_{22}}\omega_1^{(i)}
\end{aligned}\tag{f}
$$

① 第一种方法。根据前面的说明，先在 z 平面上求解，也就是把 z_1，z_2 都写成 z。按式(a)～(f)，则有

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{g}(t)=\boldsymbol{P}^{+}(t)[\boldsymbol{P}^{-}(t)]^{-1},\ t\in L\\
\begin{bmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_{01}^{(1)+}(t) & X_{01}^{(2)+}(t)\\ X_{02}^{(1)+}(t) & X_{02}^{(2)+}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_{01}^{(1)-}(t) & X_{01}^{(2)-}(t)\\ X_{02}^{(1)-}(t) & X_{02}^{(2)}(t)\end{bmatrix}^{-1}
\end{gathered}\tag{g}
$$

把式(g)代入(a)便得

$$
[\boldsymbol{P}^{+}(t)]^{-1}\boldsymbol{F}^{+}(t)-[\boldsymbol{P}^{-}(t)]^{-1}\boldsymbol{F}^{-}(t)=[\boldsymbol{P}^{+}(t)]^{-1}\boldsymbol{f}(t),\ t\in L
$$

$$
\begin{bmatrix}X_{01}^{(1)+}(t) & X_{01}^{(2)+}(t)\\ X_{02}^{(1)+}(t) & X_{02}^{(2)+}(t)\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}F_1^{+}(t)\\ F_2^{+}(t)\end{Bmatrix}-\begin{bmatrix}X_{01}^{(1)-}(t) & X_{01}^{(2)-}(t)\\ X_{02}^{(1)-}(t) & X_{02}^{(2)-}(t)\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}F_1^{-}(t)\\ F_2^{-}(t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\tilde{f}_1(t)\\ \tilde{f}_2(t)\end{Bmatrix}\tag{h}
$$

$$
\begin{Bmatrix}\tilde{f}_1(t)\\ \tilde{f}_2(t)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}X_{01}^{(1)+} & X_{01}^{(2)+}\\ X_{02}^{(1)+} & X_{02}^{(2)+}\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix}f_1\\ f_2\end{Bmatrix}=\frac{1}{X_{01}^{(1)+}X_{02}^{(2)+}-X_{01}^{(2)+}X_{02}^{(1)+}}\begin{Bmatrix}X_{02}^{(2)+}f_1-X_{01}^{(2)+}f_2\\ -X_{02}^{(1)+}f_1+X_{01}^{(1)+}f_2\end{Bmatrix}
$$

上式的解为

$$
\boldsymbol{F}(z)=[\boldsymbol{X}_0^{(1)}(z),\ \boldsymbol{X}_0^{(2)}(z)]\left\{\boldsymbol{C}(z)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{[\boldsymbol{P}^{+}(t)]^{-1}\boldsymbol{f}(t)\mathrm{d}t}{(t-z)}\right\}
$$

$$
\begin{bmatrix}F_1(z)\\ F_2(z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_{01}^{(1)}(z) & X_{01}^{(2)}(z)\\ X_{02}^{(1)}(z) & X_{02}^{(2)}(z)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L\frac{\tilde{f}_1(t)\mathrm{d}t}{t-z}+C^{(1)}(z)\\ \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L\frac{\tilde{f}_2(t)\mathrm{d}t}{t-z}+C^{(2)}(z)\end{Bmatrix}\tag{i}
$$

回到原问题，其解为

$$
\begin{aligned}
F_1(z_1) &= X_{01}^{(1)}(z_1)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\tilde{f}_1(t)\mathrm{d}t}{t-z_1}+C^{(1)}(z_1)\right]+X_{01}^{(2)}(z_1)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\tilde{f}_2(t)\mathrm{d}t}{t-z_1}+C^{(2)}(z_1)\right]\\
F_2(z_2) &= X_{02}^{(1)}(z_2)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\tilde{f}_1(t)\mathrm{d}t}{t-z_2}+C^{(1)}(z_2)\right]+X_{02}^{(2)}(z_2)\left[\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\tilde{f}_2(t)\mathrm{d}t}{t-z_2}+C^{(2)}(z_2)\right]
\end{aligned} \tag{j}
$$

由于在边界上 $z_1=z_2=t$，对边界上任一点有 $z_{10}=z_{20}=t_0$，所以易证上式满足原问题的边界条件式(a)。事实上按式(1-72)，在边界上有

$$
\tilde{f}_1^+(t_0)=\frac{1}{2}\tilde{f}_1(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\tilde{f}_1\mathrm{d}t}{(t-t_0)},\quad \tilde{f}_1^-(t_0)=-\frac{1}{2}\tilde{f}_1(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\tilde{f}_1\mathrm{d}t}{(t-t_0)}
$$

$$
\tilde{f}_2^+(t_0)=\frac{1}{2}\tilde{f}_2(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\tilde{f}_2\mathrm{d}t}{(t-t_0)},\quad \tilde{f}_2^-(t_0)=-\frac{1}{2}\tilde{f}_2(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\tilde{f}_2\mathrm{d}t}{(t-t_0)}
$$

代入式(i)或(j)便得

$$
\begin{Bmatrix} F_1^+(t_0)\\ F_2^+(t_0)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} X_{01}^{(1)+}(t_0) & X_{01}^{(2)+}(t_0)\\ X_{02}^{(1)+}(t_0) & X_{02}^{(2)+}(t_0)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \frac{1}{2}\tilde{f}_1(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\tilde{f}_1\mathrm{d}t}{(t-t_0)}+C^{(1)}(t_0)\\ \frac{1}{2}\tilde{f}_2(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\tilde{f}_2\mathrm{d}t}{(t-t_0)}+C^{(2)}(t_0)\end{Bmatrix}
$$

$$
\begin{Bmatrix} F_1^-(t_0)\\ F_2^-(t_0)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} X_{01}^{(1)-}(t_0) & X_{01}^{(2)-}(t_0)\\ X_{02}^{(1)-}(t_0) & X_{02}^{(2)-}(t_0)\end{bmatrix}\begin{Bmatrix} -\frac{1}{2}\tilde{f}_1(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\tilde{f}_1\mathrm{d}t}{(t-t_0)}+C^{(1)}(t_0)\\ -\frac{1}{2}\tilde{f}_2(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\tilde{f}_2\mathrm{d}t}{(t-t_0)}+C^{(2)}(t_0)\end{Bmatrix}
$$

所以有

$$
\begin{bmatrix} X_{01}^{(1)+}(t) & X_{01}^{(2)+}(t)\\ X_{02}^{(1)+}(t) & X_{02}^{(2)+}(t)\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} F_1^+(t)\\ F_2^+(t)\end{Bmatrix}-\begin{bmatrix} X_{01}^{(1)-}(t) & X_{01}^{(2)-}(t)\\ X_{02}^{(1)-}(t) & X_{02}^{(2)-}(t)\end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} F_1^-(t)\\ F_2^-(t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} \tilde{f}_1(t)\\ \tilde{f}_2(t)\end{Bmatrix}
$$

上式正是式(h)，这便证明了所求得的解满足原来的边界条件。

② 第二种方法。现在我们用本征矢量 $\boldsymbol{\omega}^{(1)}$，$\boldsymbol{\omega}^{(2)}$ 组成方阵 $\boldsymbol{\Omega}$，注意到 $\boldsymbol{g}$ 为厄米特矩阵。按式(1-88)得

$$
\begin{aligned}
\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega} &= \begin{bmatrix}\omega_1^{(1)} & \omega_2^{(1)}\\ \omega_1^{(2)} & \omega_2^{(2)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_1^{(1)} & \omega_1^{(2)}\\ \omega_2^{(1)} & \omega_2^{(2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\omega_1^{(1)}\omega_1^{(1)}+\omega_2^{(1)}\omega_2^{(1)} & \omega_1^{(1)}\omega_1^{(2)}+\omega_2^{(1)}\omega_2^{(2)}\\ \omega_1^{(2)}\omega_1^{(1)}+\omega_2^{(2)}\omega_2^{(1)} & \omega_1^{(2)}\omega_1^{(2)}+\omega_2^{(2)}\omega_2^{(2)}\end{bmatrix}=\\
&\begin{bmatrix}\Lambda_1^2 & 0\\ 0 & \Lambda_2^2\end{bmatrix}=\boldsymbol{\Lambda}\\
\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}\boldsymbol{\Omega} &= \begin{bmatrix}\omega_1^{(1)} & \omega_2^{(1)}\\ \omega_1^{(2)} & \omega_2^{(2)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}g_{11}\omega_1^{(1)}+g_{12}\omega_2^{(1)} & g_{11}\omega_1^{(2)}+g_{12}\omega_2^{(2)}\\ g_{21}\omega_1^{(1)}+g_{22}\omega_2^{(1)} & g_{21}\omega_1^{(2)}+g_{22}\omega_2^{(2)}\end{bmatrix}=\\
&\begin{bmatrix}\omega_1^{(1)} & \omega_2^{(1)}\\ \omega_1^{(2)} & \omega_2^{(2)}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{2\pi i\gamma_1}\omega_1^{(1)} & e^{2\pi i\gamma_2}\omega_1^{(2)}\\ e^{2\pi i\gamma_1}\omega_2^{(1)} & e^{2\pi i\gamma_2}\omega_2^{(2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{2\pi i\gamma_1}\Lambda_1^2 & 0\\ 0 & e^{2\pi i\gamma_2}\Lambda_2^2\end{bmatrix}=\boldsymbol{M}
\end{aligned} \tag{k}
$$

把式(a)等式两边同时左乘$\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}$，则有

$$\boldsymbol{\Psi}^{+}(t)-\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\Psi}^{-}(t)=\boldsymbol{f}^{*}(t),\quad \boldsymbol{\Psi}(z)=\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{F}(z),\quad \boldsymbol{f}^{*}(t)=\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{f}(t)$$

$$\begin{Bmatrix}\Psi_1^{+}(t)\\ \Psi_2^{+}(t)\end{Bmatrix}-\begin{bmatrix}\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma_1} & 0\\ 0 & \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma_2}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\Psi_1^{-}(t)\\ \Psi_2^{-}(t)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}f_1^{*}(t)\\ f_2^{*}(t)\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}f_1^{*}(t)\\ f_2^{*}(t)\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{\omega}_1^{(1)} & \overline{\omega}_2^{(1)}\\ \overline{\omega}_1^{(2)} & \overline{\omega}_2^{(2)}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}f_1(t)\\ f_2(t)\end{Bmatrix} \tag{l}$$

上式是一个已经解耦的矩阵方程，其解为

$$\begin{aligned}\Psi_1(z)&=Y_0^{(1)}(z)\left[\Lambda_1^2C^{(1)}(z)+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f_1^{*}(t)\,\mathrm{d}t}{Y_0^{(1)+}(t)(t-z)}\right]\\ \Psi_2(z)&=Y_0^{(2)}(z)\left[\Lambda_2^2C^{(2)}(z)+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f_2^{*}(t)\,\mathrm{d}t}{Y_0^{(2)+}(t)(t-z)}\right]\end{aligned} \tag{m}$$

原问题的解为

$$\boldsymbol{F}(z)=\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{\Psi}(z)=[\boldsymbol{\omega}^{(1)}\Lambda_1^{-2},\ \boldsymbol{\omega}^{(2)}\Lambda_2^{-2}]\boldsymbol{\Psi}(z)$$

$$\begin{Bmatrix}F_1(z_1)\\ F_2(z_2)\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\omega_1^{(1)}(z_1)\Lambda_1^{-2}\ \Psi_1(z_1)+\omega_1^{(2)}(z_1)\Lambda_2^{-2}\ \Psi_2(z_1)\\ \omega_2^{(1)}(z_2)\Lambda_1^{-2}\ \Psi_1(z_2)+\omega_2^{(2)}(z_2)\Lambda_2^{-2}\ \Psi_2(z_2)\end{Bmatrix} \tag{n}$$

把式(n)代入(m)便又得式(j)。

1.7 Cauchy 核奇异积分方程[13, 14]

1.7.1 边值问题的补充讨论

前面讨论线段的两端是奇点的无限区域的边值问题，现在讨论 n 条互不相交的闭围线 L_1，L_2，…，L_n，他们都位于闭围线 L_0 的内部，其集合记为 L，L 上给定满足 Hölder 条件的函数 $g(t)$。记 L_0 的内部和 $L_k(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 外部的区域为 S^{+}，L_k 的内部为 S_k^{-}，L_0 的外部为 S_0^{-}，坐标原点位于区域 S^{+}（图 1-12），若无 L_0，则 S^{+} 为无界域。任一围线的正方向是指沿正方向运行时，研究的区域 S^{+} 位于左边。根据幅角原理[15]，若 $g(z)$在 S^{+} 内部除有限个极点外是单值解析函数，且在 $S^{+}+L$ 连续，L 上处处不为零，则 $g(z)$在 S^{+} 内的零点 N_D^{+} 的个数和极点 P_D^{+} 的个数之差为

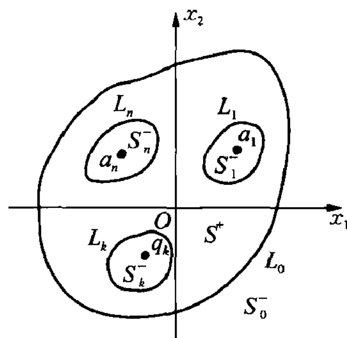


图 1-12　互不相交闭围线上的 Riemann-Hilbert 问题

$$N_D^{+}-P_D^{+}=(1/2\pi)[\arg g(z)]_L \tag{1-97}$$

式中$[\ \ ]_L$ 表示当 t 沿正方向绕 L 一周时，括弧内的函数获得的增量。定义函数 $g(t)$在 L 上的指标为

$$\kappa=\frac{1}{2\pi}[\arg g(t)]_L=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}[\ln g(t)]_L=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\mathrm{d}\ln g(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{g'(t)}{g(t)}\mathrm{d}t \tag{1-98}$$

上式表明，若函数 $g(t)$在 L 上除有限个极点外解析，则其指标 κ 等于它的对数留数。若 $g(t)$

可微，且是某个在 S^+ 内解析函数 $g(z)$ 的边值，则 κ 等于 $g(z)$ 在 S^+ 内的零点的个数。若 $g(t)$ 可微，且是某个在 S^- 内解析函数 $g(z)$ 的边值，则 κ 等于 $g(z)$ 在 S^- 内零点个数的负数。

现在讨论齐次 Riemann - Hilbert 边值问题

$$F^+(t) - g(t)F^-(t) = 0,\ t \in L \tag{1-99}$$

因此 $g(t)$ 的指标 κ 又可写成

$$\kappa = \frac{1}{2\pi i}\ln[F^+(t)/F^-(t)] = \frac{1}{2\pi i}[\ln F^+(t) - \ln F^-(t)]_L = N_D^+ + N_D^- \tag{1-100}$$

上式的右端不能为负，所以边值问题在任何情况下有解的条件是 $\kappa \geqslant 0$。当 $\kappa = 0$ 时，$\ln g(t)$ 是单值函数，推出 $N_D^+ = N_D^- = 0$，即在全平面没有零点，故其解 $F(z)$ 是分区解析函数。又由式(1 - 99) 知，$\ln g(t) = \ln F^+(t) - \ln F^-(t)$，所以按 Cauchy 公式有

$$\ln F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln g(\tau)}{\tau - z}d\tau = \gamma(z),\ F(z) = e^{\gamma(z)} \tag{1-101}$$

上式已设 $F(\infty) = 0$，若不为零，则 $F(z) = Ae^{\gamma(z)}$。因此推出

$$g(t) = F^+(t)/F^-(t) = e^{\gamma^+(t)}/e^{\gamma^-(t)} \tag{1-102}$$

和前面一样，为求边值问题的解，引入函数

$$\prod_{k=1}^{n}(t - a_k)^{\kappa_k},\ k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{1-103}$$

显然有

$$\begin{gathered}\frac{1}{2\pi}\left[\arg\prod_{k=1}^{n}(t - a_k)^{\kappa_k}\right]_{L_j} = -\delta_{kj},\quad \left\{\arg\left[g(t)\prod_{k=1}^{n}(t - a_k)^{\kappa_k}\right]\right\}_{L_j} = 0\\ [\arg t]_{L_0} = 2\pi,\quad [\arg t]_{L_j} = 0,\ j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n\\ \left\{\arg\left[t^{-\kappa}g(t)\prod_{k=1}^{n}(t - a_k)^{\kappa_k}\right]\right\}_{L_j} = 0,\ j = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n\end{gathered} \tag{1-104}$$

改写 $g(t)$ 为

$$g(t) = t^{\kappa}\left[t^{-\kappa}g(t)\prod_{k=1}^{n}(t - a_k)^{\kappa_k}\right]\Big/\prod_{k=1}^{n}(t - a_k)^{\kappa_k} \tag{1-105}$$

由于 $t^{-\kappa}g(t)\prod_{k=1}^{n}(t - a_k)^{\kappa_k}$ 的指标为零，所以按式(1 - 101)和(1 - 102)有

$$\begin{gathered}t^{-\kappa}g(t)\prod_{k=1}^{n}(t - a_k)^{\kappa_k} = e^{\gamma^+(t)}/e^{\gamma^-(t)}\\ \gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L\left\{\ln\left[\tau^{-\kappa}g(\tau)\prod_{k=1}^{n}(\tau - a_k)^{\kappa_k}\right]\Big/(\tau - z)\right\}d\tau\end{gathered} \tag{1-106}$$

从而若令

$$X(z) = (z - a_k)^{-\kappa_k}e^{\gamma(z)} \tag{1-107}$$

则边值问题 $F^+(t) - gF^-(t) = f(t)$ 可以写成

$$\frac{F^+(t)}{X^+(t)} - \frac{F^-(t)}{X^-(t)} = \frac{f(t)}{X^+(t)},\ t \in L \tag{1-108}$$

函数 $f(t)/X^+(t)$ 满足 Hölder 条件，所以可以写成分区解析函数 $\psi(z)$的边界值之差，即

$$\frac{f(t)}{X^+(t)} = \psi^+(t) - \psi^-(t),\quad \psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)d\tau}{X^+(\tau)(\tau - z)} \tag{1-109}$$

从而式(1-108)可以写成

$$\frac{F^+(t)}{X^+(t)} - \psi^+(t) = \frac{F^-(t)}{X^-(t)} - \psi^-(t),\ t \in L \tag{1-110}$$

当 $\kappa \geqslant 0$ 时，函数 $F(z)/X(z)$ 在无穷远点有 κ 阶极点，其解为

$$F(z)/X(z) - \psi(z) = P_\kappa(z),\quad 或\ F(z) = X(z)[\psi(z) + P_\kappa(z)] \tag{1-111}$$

式中 $P_\kappa(z)$是 κ 次多项式。

当 $\kappa < 0$ 时，$F(z)/X(z)$ 在无穷远点有$(-\kappa)$ 阶零点，可能解为

$$F(z)/X(z) - \psi(z) = 0,\quad 或\ F(z) = X(z)\psi(z) \tag{1-112}$$

考察上式，$X(z)$ 在无穷远点有$(-\kappa)$ 阶极点，$\psi(z)$ 在无穷远点有一阶零点，因此在无穷远点 $F(z)$ 有不高于$(-\kappa-1)$ 阶的极点。一般情况下，当 $\kappa < 0$ 时无解析解；但若右端项 $f(t)$ 满足下列$(-\kappa)$ 个条件

$$\int_L [g(\tau)\tau^{k-1}/X^+(\tau)]d\tau = 0,\ k = 1,\ 2,\ \cdots,\ \kappa \tag{1-113}$$

则在无穷远点 $F(z)$没有极点，故有唯一解。

1.7.2 Cauchy 核奇异积分方程

讨论标准 Cauchy 核奇异积分方程

$$a(t)f(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\phi(\tau)}{\tau - t}d\tau = f(\tau) \tag{1-114}$$

式中 $a(t)$，b，(t)，$\phi(t)$和 $f(t)$是给定曲线 L 上的满足 Hölder 条件的函数。上述积分方程可以化成 Riemann - Hilbert 边值问题。事实上，如引入 Cauchy 型积分表示的解析函数

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\phi(\tau)d\tau}{\tau - z} \tag{1-115}$$

由 Сохоцкий - Plemelj 公式(1-70)有

$$\phi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t),\quad \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\phi(\tau)d\tau}{\tau - t} = \Phi^+(t) + \Phi^-(t) \tag{1-116}$$

把上述方程代入积分方程(1-114)可得

$$\Phi^+(t) - g(t)\Phi^-(t) = \tilde{f}(t)$$

$$g(t) = [a(t) - b(t)]/[a(t) + b(t)],\ \tilde{f}(t) = f(t)/[a(t) + b(t)] \tag{1-117}$$

上述问题的指标为

$$\kappa = \frac{1}{2\pi}\arg g(t) = \frac{1}{2\pi}\arg\left[\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}\right]_L = \frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}\right]_L \tag{1-118}$$

由式(1-115)知 $\Phi(\infty)=0$，所以由积分方程化成的边值问题要求 $\Phi^-(\infty)=0$。对于满足 $\Phi(\infty)=0$ 的上述 Riemann-Hilbert 边值问题和原积分方程等价。对于界面裂纹问题，由式(1-59)～(1-64)的结构知，把裂纹看成由围绕两个端点 a_k，b_k 的两条围线无限趋近裂纹线的极限情形，在两条围线的交接处，两条围线的走向相反，所以裂纹正负边间的间断相互抵消。由式(1-63)知 $X_0^+(t)=e^{2\pi i\gamma}X_0^-(t)$，按式(1-100)，对每条围线有 $\kappa_1=\gamma$，所以两条围线的总指标 $\kappa=2\gamma$。如硬性规定裂尖无奇异性，则式(1-61)变成 $X_0(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{1-\gamma}(z-b_k)^{\gamma}$，式(1-63)变成 $X_0^+(t)=e^{2\pi i(\gamma-1)}X_0^-(t)$，则总指标 $\kappa'=2(\gamma-1)$。对均匀介质中的裂纹 $\gamma=1/2$，所以 $\kappa=1$，$\kappa'=-1$。

对于一般的积分方程

$$a(t)f(t)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{K(t,\tau)}{\tau-t}f(\tau)d\tau = g(\tau) \tag{1-119}$$

记

$$\frac{K(t,\tau)}{\tau-t}=\pi i k(t,\tau)+\frac{b(t)}{\tau-t},\ b(t)=K(t,t),\ k(t,\tau)=\frac{K(t,\tau)-K(t,t)}{\pi i(\tau-t)} \tag{1-120}$$

式中 $k(t,\tau)$为奇性低于 Cauchy 核的弱奇性项。则式(1-119)化为

$$a(t)f(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_L\frac{f(\tau)}{\tau-t}d\tau+\int_L k(t,\tau)f(\tau)d\tau = g(\tau) \tag{1-121}$$

略去等式左端最后一项的积分方程便是原方程的特征或标准积分方程。工程上通常采用数值方法求解式(1-121)；它的一般理论可参阅相关文献[13, 14]。

1.8 留数定理与某些积分的计算[15]

1.8.1 留数定理

设 $f_1(z)$和 $f_2(z)$在域 S 除极点外，没有其他奇点，则它们的和、差、积和商也无极点以外的奇点；如它们是单值函数，则它们的导数在域 S 除极点外，也没有其他奇点，且导数的极点的阶数比函数本身大一阶。

有限平面上的分式有理函数 $f(z)=f_1(z)/f_2(z)$，在有限平面上只有有限个极点，无穷远点也可能是极点，因而可以展成

$$f(z)=\sum_{k-1}^{n}a_k z^k+\sum_{k-1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{a_{jk}}{(z-z_j)^k} \tag{1-122}$$

在 a 点邻域内函数的罗朗级数的 $(z-a)^{-1}$ 项之系数称为函数 $f(z)$在孤立奇点 a 的留数，并记为 $\mathrm{res}(a)$。易于证明下述留数定理：设函数 $f(z)$在区域 S 的边界上连续，在 S 内除有限个极

点外，处处解析，则有

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_L f(z)\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{n} \operatorname{res} f(a_j) \tag{1-123}$$

式中 $a_j(j=1, 2, \cdots, n)$是沿反时针方向运行的闭围线 L 中的极点。可以证明，若 $z=a$ 是 $f(z)$ 的 m 阶极点，则

$$\operatorname{res} f(a) = \frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-a)^m f(z)] \tag{1-124a}$$

特别当 $z=a$ 是 $f(z)$的一阶极点时有

$$\operatorname{res} f(a) = \lim_{z\to a}[(z-a)f(z)] \tag{1-124b}$$

当考察包含无穷远点在内的整个平面时，我们有

$$\sum_{j=1}^{n} \operatorname{res} f(a_j) + \operatorname{res} f(\infty) = 0 \tag{1-124c}$$

1.8.2 积分 $I(z)$的计算

设 L 由 n 个线段 L_k 组成，L_k 的左端点为 a_k，右端点为 b_k，其上给定 Hilbert 问题

$$F^+(t) - gF^-(t) = G^+(t), \quad 且 G^-(t) = g^* G^+(t),\ t\in L \tag{1-125}$$

式中 g^* 为常数，且 $G(z)$在有界区域内是有界的。经常遇到下述积分

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{G^+(t)\mathrm{d}t}{X^+(t)(t-z)},\ t\in L \tag{1-126}$$

式中 $X(z)$是式(1-125)对应的齐次方程的解，即有

$$X^+(t) - gX^-(t) = 0,\ t\in L \tag{1-127}$$

为计算 $I(z)$，先计算下列围线积分(图 1-13(a))

$$\Omega_k(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\Lambda_k} \frac{G(\varsigma)\mathrm{d}\zeta}{X(\varsigma)(\zeta-z)} \tag{1-128}$$

式中 Λ_k 是紧包 L_k 的闭围线。记

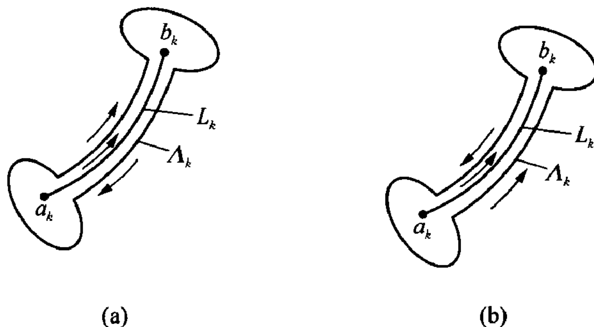


图 1-13　计算积分 $I(t)$的图示

$$\frac{G(\varsigma)}{X(\varsigma)}=\alpha_q\varsigma^q+\cdots+\alpha_0+\frac{\alpha_{-1}}{\varsigma}+\cdots,\ \varsigma\to\infty \tag{1-129}$$

式中 $q=n+p$，其中 n 为裂纹的个数，即$[X(\varsigma)]^{-1}$展成幂级数时ς的最高次幂，p 为$G(\varsigma)$展成幂级数时ς的最高次幂。按 Cauchy 型积分公式，沿图 1-13 的围线运行方向时有

$$\Omega_k(\varsigma)=G(\varsigma)/X(\varsigma)-\alpha_q\varsigma^q-\cdots-\alpha_0 \tag{1-130}$$

另一方面，当 Λ_k 缩向 L_k 时，有

$$\oint_{\Lambda_k}\frac{G(\varsigma)\mathrm{d}\zeta}{X(\varsigma)(\xi-z)}=\int_{a_k}^{b_k}\left[\frac{G^+(t)\mathrm{d}t}{X^+(t)(t-z)}-\frac{G^-(t)\mathrm{d}t}{X^-(t)(t-z)}\right]=(1-gg^*)\int_{L_k}\frac{G^+(t)\mathrm{d}t}{X^+(t)(t-z)}$$

所以最终得

$$I(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{G^+(t)\mathrm{d}t}{X^+(t)(t-z)}=\frac{1}{1-gg^*}\left[\frac{G(z)}{X(z)}-\alpha_qz^q-\cdots-\alpha_0\right] \tag{1-131}$$

若 $q<0$，则上式中所有 $\alpha_q=0$；若 $G(z)$ 为多项式，则 $G^-(t)=G^+(t)$，从而 $g^*=1$。

如采用图 1-13(b)的积分路线 Λ，则式(1-119)变为

$$\Omega_k(\varsigma)=-G(\varsigma)/X(\varsigma)+\alpha_q\varsigma^q+\cdots+\alpha_0$$

同时，当 Λ_k 缩向 L_k 时，有

$$\oint_{\Lambda_k}\frac{G(\varsigma)\mathrm{d}\zeta}{X(\varsigma)(\xi-z)}=\int_{a_k}^{b_k}\left[\frac{G^-(t)\mathrm{d}t}{X^-(t)(t-z)}-\frac{G^-(t)\mathrm{d}t}{X^+(t)(t-z)}\right]=-(1-gg^*)\int_{L_k}\frac{G^+(t)\mathrm{d}t}{X^+(t)(t-z)}$$

所以 $I(z)$仍由式(1-131)表示。

1.8.3 积分 $I_2(x)$的计算

现在来讨论下述积分：

$$\int_L f_n(x)\mathrm{d}x,\ f_n(x)=\frac{x^n}{\sqrt{x^2-a^2}}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)^{\mathrm{i}\epsilon} \tag{1-132}$$

首先研究下述围线积分

$$\Omega(z)=\oint_\Lambda f_n(z)\mathrm{d}z$$

式中 Λ 是沿顺时针方向围绕 L 的闭围线(参阅图 1-13(a))。取 $f_n(z)$的下述分支：当 $z=x>a$ 时，$f_n(x)=\dfrac{x^n}{\sqrt{x^2-a^2}}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^{\mathrm{i}\epsilon}$。设当$|z|\to\infty$时，$f_n(z)$可展成

$$f_n(z)=z^{n-1}\left[1-2\mathrm{i}\epsilon\frac{a}{z}+\frac{1-4\epsilon^2}{2}\left(\frac{a}{z}\right)^2+\cdots\right] \tag{1-133}$$

设 α_{-1} 是上述展开式中项 z^{-1} 的系数，则按留数定理有

$$\Omega(z)=\oint_\Lambda f_n(z)\mathrm{d}z=-2\pi\mathrm{i}\alpha_{-1} \tag{1-134}$$

在裂纹上岸和下岸

$$f_n^+(x) = \frac{x^n}{\sqrt{a^2 - x^2}}\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{i\varepsilon} e^{i\pi\left(-\frac{1}{2}+i\varepsilon\right)}, \quad f_n^-(x) = \frac{x^n}{\sqrt{a^2 - x^2}}\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{i\varepsilon} e^{-i\pi\left(-\frac{1}{2}+i\varepsilon\right)}$$

所以 $f_n^+(x) - f_n^-(x) = -2i\cos h(\pi\varepsilon)\dfrac{x^n}{\sqrt{a^2-x^2}}\left(\dfrac{a-x}{a+x}\right)^{i\varepsilon}$。再计及围绕 $\pm a$ 的无限小的围线积分 $\Omega(z) = 0$，便得

$$I_2(x) = \int_{-a}^{a} \frac{x^n}{\sqrt{a^2-x^2}}\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{i\varepsilon} dx = -\frac{1}{2i\cos h(\pi\varepsilon)}\oint_{\Lambda} f_n(z)dz = \frac{\pi\alpha_{-1}}{\cos h(\pi\varepsilon)} \tag{1-135}$$

特别是当 $n = 0, 1, 2$ 时，$f_n(z)$ 中 z^{-1} 项的系数 α_{-1} 分别为 1，$-2i\varepsilon a$，$(1-4\varepsilon^2)a^2/2$。从而有

$$\int_{-a}^{a} \frac{x^n}{\sqrt{a^2-x^2}}\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{i\varepsilon} dx = \begin{cases} \pi/\cos h(\pi\varepsilon), & n = 0 \\ -2i\pi a\varepsilon/\cos h(\pi\varepsilon), & n = 1 \\ (1-4\varepsilon^2)\pi a^2/2\cos h(\pi\varepsilon), & n = 2 \end{cases} \tag{1-136}$$

1.9 国际单位制

1.9.1 基本单位

本书采用国际单位制(SI)。国际单位制的基本单位是：长度 m(米)，质量 kg(千克)，时间 s(秒)，电流 A(安)，热力学温度 K(开)，发光强度 cd(坎)。

1.9.2 主要导出单位

主要导出单位有：

(1) 力学导出单位：力 N(牛) = kg · m/s^2，压力 Pa(帕) = N/m^2，能量 J(焦) = N · m，功率 W(瓦) = J/s，

(2) 电学导出单位：电量 C(库) = A · s，电势 V(伏) = N · m/(A · s)，电场强度 V/m = N/C，电位移 C/m^2，能量 J(焦) = N · m，功率 W(瓦) = V · A = J/s，电容 F(法) = C/V，电阻 Ω(欧) = V/A，磁场强度 A/m(安每米)，磁通 W(韦) = V · s = J/A，磁通密度 T(特) = Wb/m^2 = N/A · m，电感 H(亨) = Wb/A。

(3) 热学导出单位：热(量)cal$_{15}$(15°卡)=4.185 J，热容 J/K，热流密度 J/m^2 · s，单位质量的热容(比热容)和比熵 J/(kg · K)，单位体积的比热容和比熵。

第2章

经典电动力学基础[4，16～22]

2.1 经典电动力学概述

2.1.1 基本概念

1）**电荷，电场强度，磁荷，磁场强度**

电荷是物质的基本属性之一，它的最小分割单位是一个电子的电荷 $e = 1.602 \times 10^{-19}$ C，电子的质量是 $m_e = 9.106 \times 10^{-31}$ kg。以后电荷的体积密度记为 ρ_e，以区别于质量密度 ρ。空间内一点的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 定义为单位正电荷受到的力

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{F}/q_e \tag{2-1}$$

式中 $\boldsymbol{F}$ 为正电荷受到的力，q_e 为电荷的值。磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 定义为单位正磁荷受到的力

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{F}/q_m \tag{2-2}$$

应当指出，目前实验中尚未发现自然界存在"自由磁荷"q_m，它可以想象成两端相互作用可以不计的一根细长小磁针的一端。磁荷概念在许多问题的处理中较方便。

2）**极化与磁化**

物质是由原子、分子组成的。原子由正、负电子组成，自然状态时是电中性的。在外电场或力场作用下，正、负电荷沿着一定的方向位移，发生极化。一般讲来介质极化有三种方式：①组成原子的电子云相对于原子核发生位移而出现电矩，称电子极化；②组成分子的正负离子发生位移而出现电矩，称离子极化；③分子固有电矩的定向排列。常用电偶极子来描写极化。每一对 $\pm q_e$ 电荷形成的电偶极子，其偶极矩 $\boldsymbol{p}_e$ 为：

$$\boldsymbol{p}_e = \lim_{d\to 0,\ q_e\to\infty} q_e \boldsymbol{d} \tag{2-3}$$

式中 $\boldsymbol{d}$ 是由负电荷指向正电荷的距离矢量，它的大小一般小于原子或分子的尺寸。设极化后单位体积内有 N 个电偶极子。现讨论任一包围体积 V 的封闭曲面 a（图 2-1），设曲面 a 外部的微单元内为正电荷，根据电偶极子的性质，则内部为负电荷，从而留在 V 内的净电荷为

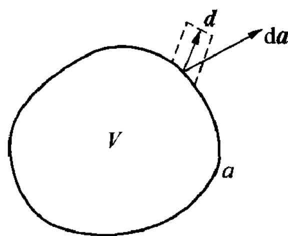


图 2-1 偶极矩产生的机理图

$$Q_p = -\oint_a \boldsymbol{P}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = -\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot \boldsymbol{P}\mathrm{d}V = \int_V \rho_p \mathrm{d}V \tag{2-4}$$

$$\boldsymbol{P} = Nq_e\boldsymbol{d},\ \rho_p = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{P}$$

式中 ρ_p 为束缚或极化电荷密度，$\boldsymbol{P}=\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E})$ 称为极化强度，还可精确地写为

$$\boldsymbol{P}=\lim_{\Delta V\to 0}\Delta \boldsymbol{p}_e/\Delta V \tag{2-5}$$

式中 $\Delta \boldsymbol{p}_e$ 是 ΔV 中的电偶极矩矢量。电介质中的总电荷密度 ρ_t 为

$$\rho_t=\rho_e+\rho_p=\rho_e-\nabla\cdot\boldsymbol{P} \tag{2-6}$$

类似地可引入磁介质中的磁化强度矢量 $\boldsymbol{M}$ 和磁化磁荷密度 ρ_m

$$\mu_0\boldsymbol{M}=\lim_{\Delta V\to 0}\Delta \boldsymbol{p}_m/\Delta V,\ \rho_m=-\nabla\cdot\mu_0\boldsymbol{M} \tag{2-7}$$

式中 $\Delta \boldsymbol{p}_m$ 是 ΔV 中的磁偶极矩矢量，$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\ \mathrm{H/m(N/A^2)}$ 为自由空间的磁导率。原子外层电子绕原子核的旋转(和电子自旋)可看成微电流环，它产生的磁场除环附近区域外和磁偶极矩为 $\boldsymbol{p}_m=\mu_0\boldsymbol{m}$ 的磁偶极子产生的磁场一致，其中 $\boldsymbol{m}=i\Delta\boldsymbol{a}$，$i$ 和 Δa 分别为微电流环中的电流和它所包围的面积矢量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{a}$ 的正方向按右螺旋规则确定(参见式(2-64))。无外加磁场或力场时，磁矩是随机排列的，无宏观效应，但在外场作用下趋向按一定方向排列，便呈现出磁化效应。

3）电流

电荷的有序运动形成电流，穿过任一微曲面 Δa 上的电流 ΔI 等于电荷穿过这一微曲面的速率。设 $\boldsymbol{J}_t$ 为 Δa 上正电子的总电流密度矢量，$\boldsymbol{n}$ 为 Δa 的正法线，则

$$\Delta I=\boldsymbol{J}_t\cdot\boldsymbol{n}\Delta a,\quad \Delta Q=\Delta It \tag{2-8}$$

式中 Q 是总电量。在金属导体中电流载体是负电子，故 $\boldsymbol{J}_t$ 的方向和电子的运动方向相反。

设体积 V 中的总电荷密度为 ρ_t，其表面为 a，a 的外法线 $\boldsymbol{n}$，V 中的总电荷为 Q，则电荷守恒定律为

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=0,\quad 或\int_V\frac{\partial\rho_t}{\partial t}\mathrm{d}V=-\int_a\boldsymbol{J}_t\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a=-\int_V\nabla\cdot\boldsymbol{J}_t\mathrm{d}V \tag{2-9}$$

由此推出局部电荷守恒律为

$$\partial\rho_t/\partial t+\nabla\cdot\boldsymbol{J}_t=0 \tag{2-10}$$

因极化只涉及极化电荷的分离或偶极矩的重新取向，故极化电荷守恒，从而有

$$\partial\rho_p/\partial t+\nabla\cdot\boldsymbol{J}_p=\nabla\cdot(\boldsymbol{J}_p-\partial\boldsymbol{P}/\partial t)=0 \tag{2-11}$$

式中 $\boldsymbol{J}_p$ 为极化电流密度。按式(2-11)有

$$\boldsymbol{J}_p=\partial\boldsymbol{P}/\partial t \tag{2-12}$$

现在来讨论磁化电流。设 C 为磁场中任一闭合回路，其上张一曲面 a，回路内部的微电流环 1 穿过曲面正反方向各一次，净电流为零；但包围回路的微电流环只穿过回路一次，故有净电流通过(图 2-2(a))。如以 C 上微元 $\mathrm{d}s$ 为轴，以中心在 C 上、法线为 n 的微电流环面 $\mathrm{d}a$ 为底作一柱体(图 2-2(b))，则中心在此柱体内的微电流环都只穿过 C 一次。设此柱体中单位体积内有 N 个微电流环，则通过 C 的电流 ΔI_m 为

$$\Delta I_m=Ni\Delta a\boldsymbol{n}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\boldsymbol{M}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{M}=N\boldsymbol{m},\ \boldsymbol{m}=i\Delta a\boldsymbol{n} \tag{2-13}$$

式中 $\boldsymbol{m}$ 为微电流环的磁矩，$\boldsymbol{M}$ 为 C 上的线磁矩密度。若设介质中的等效磁流密度为 $\boldsymbol{J}_m$，则可推出

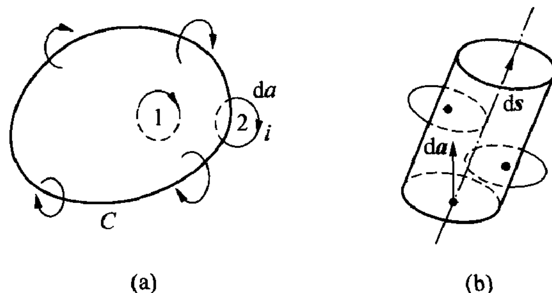


图 2-2 磁化电流产生机理图解

$$\int_a \boldsymbol{J}_m \cdot d\boldsymbol{a} = \oint_C \boldsymbol{M} \cdot d\boldsymbol{s},\ \boldsymbol{J}_m = \nabla \times \boldsymbol{M},\ \nabla \cdot \boldsymbol{J}_m = 0 \tag{2-14}$$

上式表示不存在等效磁化电流源。

设介质中的自由电流密度为 $\boldsymbol{J}$,则物质中的总电流密度 $\boldsymbol{J}_t$ 为

$$\boldsymbol{J}_t = \boldsymbol{J} + \boldsymbol{J}_p + \boldsymbol{J}_m = \boldsymbol{J} + \partial \boldsymbol{P}/\partial t + \nabla \times \boldsymbol{M} \tag{2-15}$$

由于极化电流守恒,磁化电流无源,所以有下述自由电荷守恒定律

$$\partial \rho_e/\partial t + \nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0 \tag{2-16}$$

电子在自由空间运动时产生徙动(运流)电流。设电子束的密度为 ρ_e,运动速度为$\boldsymbol{v}$,则徙动电流密度

$$\boldsymbol{J} = \rho_e \boldsymbol{v} \tag{2-17}$$

传导电流和徙动电流都是自由电流,两者通常不在同一介质中出现。

2.1.2 基本实验定律

1) Coulomb(库仑)定律

自由空间的两个点电荷 q_1, q_2, q_2 受到 q_1 的作用力

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\boldsymbol{r}^0,\ \boldsymbol{r}^0 = \frac{\boldsymbol{r}}{r},\ r = |\boldsymbol{r}| \tag{2-18}$$

式中 $\boldsymbol{r}^0$ 是由 q_1 出发的指向 q_2 的单位距离矢量,$\epsilon_0 = 8.854\times10^{-12}$ F/m(C^2/N·m^2) 为自由空间的介电常数。由式(2-1)和(2-18)推出自由空间点电荷 q_e 产生的电场强度

$$\boldsymbol{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_e}{r^2}\boldsymbol{r}^0 \tag{2-19}$$

2) Gauss(高斯)定律

自由空间的点电荷 q_e 在任一微面元 d$\boldsymbol{a}$(图 2-3)上产生的电场由式(2-19)表示,故可写出

$$\epsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{a} = \frac{1}{4\pi}\frac{q_e}{r^2}\boldsymbol{r}^0 \cdot d\boldsymbol{a} = \frac{1}{4\pi}\frac{q_e}{r^2}da' = \frac{1}{4\pi}q_e d\Omega \tag{2-20}$$

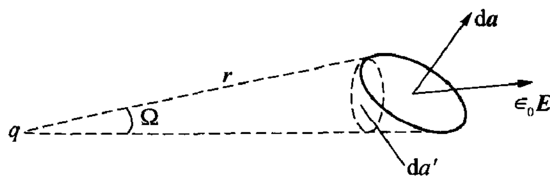


图 2-3 Gauss 定律图解

式中 $\mathrm{d}a' = \boldsymbol{r}^0 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}$，$\mathrm{d}\Omega$ 为 $\mathrm{d}a'(\mathrm{d}a'/r^2)$ 张成的立体角，所以对任一包围 q_e 的闭曲面有

$$\oint_a \epsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \frac{1}{4\pi}\int_V q_e \mathrm{d}\Omega = q_e \tag{2-21}$$

实验指出，对介质中总电荷密度为 ρ_t 的分布电荷有

$$\oint_a \epsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \int_V \nabla \cdot (\epsilon_0 \boldsymbol{E}) \mathrm{d}V = \int_V \rho_t \mathrm{d}V = q_e$$

由此推出 $\nabla \cdot (\epsilon_0 \boldsymbol{E}) = \rho_t = \rho_e - \nabla \cdot \boldsymbol{P}$，或

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_e,\ \boldsymbol{D} = \epsilon_0 \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \epsilon_0 (1+\eta)\boldsymbol{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \boldsymbol{E} = \epsilon \boldsymbol{E} \tag{2-22}$$

式中 $\boldsymbol{D}$ 为电位移（或电通量密度）矢量，或电感应强度矢量，ϵ 为电介质中的介电常数，ϵ_r 为相对介电系数，η 为极化系数，$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 有相同的量纲 $\mathrm{C/m^2}$。

3) 磁通连续性方程

类似于高斯定律的推导，并注意到自由磁荷不存在的事实，立即可得磁通连续性方程

$$\oint_a \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = 0$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0,\ \boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M}) = \mu_0(1+\chi)\boldsymbol{H} = \mu_0\mu_r \boldsymbol{H} = \mu \boldsymbol{H} \tag{2-23}$$

式中 $\boldsymbol{B}$ 为磁通密度矢量，或磁感应，μ 为磁介质中的导磁系数，μ_r 为相对导磁系数，χ 为磁化系数，$\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{M}$ 的量纲相同。

4) Faraday（法拉第）电磁感应定律

电磁介质中 Faraday 定律的积分和微分形式分别为

$$\oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_a \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a},\quad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{2-24}$$

5) Ampère（安培）定律

自由空间中 Ampère 定律的积分形式为

$$\oint_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_a \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} + \frac{\partial}{\partial t}\int_a \epsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} \tag{2-25}$$

式中 C 为空间的固定闭曲线，a 为以 C 为周界的开曲面，$\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 的正方向沿曲面的外法线 n 的方向，$\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 的正方向规定为沿曲线运行时右螺旋方向和 n 一致，见图 2-4。按 Stokes（斯托克斯）定理，上式可变换为

$$\int_a \nabla \times \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \int_a \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} + \frac{\partial}{\partial t}\int_a \epsilon_0 \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}$$

由 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}$ 的任意性推出

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \epsilon_0 \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{2-26}$$

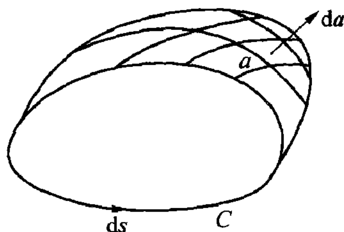


图 2-4 Ampère 定律图解

实验表明，电介质中可用 $\boldsymbol{D}$ 代替上式中的 $\epsilon_0 \boldsymbol{E}$，从而有

$$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \tag{2-27}$$

6) 作用在运动电荷上的电磁力

自由空间电量为 q_e、速度为 $\boldsymbol{v}$ 的运动粒子，电磁场作用在其上的电磁力由 Lorentz（洛伦茨）定律给出：

$$\boldsymbol{F} = q_e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \tag{2-28}$$

所以对运动的分布电荷有

$$\boldsymbol{F} = \int_V \rho_e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})\mathrm{d}V = \int_V (\rho_e \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B})\mathrm{d}V \tag{2-29}$$

实验表明上述公式同样适用于传导电流（载流体中大量电子运动的统计平均值）。由此推出自由空间电磁场引起的载流体的体积力密度 $\boldsymbol{f}^0$ 为

$$\boldsymbol{f}^0 = \rho_e \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} \tag{2-30}$$

许多情况下，用总电荷密度 ρ_t 和总电流密度 $\boldsymbol{J}_t$ 分别代替上式中的 ρ_e 和 $\boldsymbol{J}$，可以近似地给出静止电磁介质中空间电磁场引起的总电磁体积力密度 $\boldsymbol{f}^L$ 的公式，即在静止电磁介质中近似地有

$$\boldsymbol{f}^L = \rho_t \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J}_t \times \boldsymbol{B} \tag{2-31}$$

上式也称为宏观 Maxwell－Lorentz 力。

2.2 经典电动力学的基本方程

2.2.1 Maxwell（麦克斯韦）方程组

综合上述诸实验事实，可以得出 Maxwell 方程组，其微分和积分形式如下：

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_e && \oint_a \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = \int_V \rho_e \mathrm{d}V \\
&\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} && \oint_C \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_a \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} \\
&\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 && \int_a \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = 0(\int_V \rho_m \,\mathrm{d}V) \\
&\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} && \oint_C \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int_a \boldsymbol{J} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} + \frac{\partial}{\partial t}\int_a \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a}
\end{aligned} \tag{2-32}$$

对式(2－32)中左边第二式取散度，第四式取散度并利用自由电荷守恒定律式(2－16)，分别得

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \partial \boldsymbol{B}/\partial t = \partial(\nabla \cdot \boldsymbol{B})/\partial t = 0 \\
\nabla \cdot \boldsymbol{J} + \nabla \cdot \partial \boldsymbol{D}/\partial t = \partial(\nabla \cdot \boldsymbol{D} - \rho_e)/\partial t = 0
\end{aligned} \tag{2-33}$$

上式正是式(2－32)中的第三和第一式。如设初始时刻 $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ 和 $\nabla \cdot \boldsymbol{D} - \rho_e = 0$，则在任何时刻它们都是零。式(2－32)中的第二和第四式有 6 个方程，恰好在给定电流 $\boldsymbol{J}$ 和本构关系后，可用来确定 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的 6 个未知分量，但偏微分方程需要定解条件，故式(2－32)中的第三和第一便是限制这些量在初始时刻取零值。式(2－32)中的第二和第四式和自由电荷守恒定

律式(2-16)是独立方程,而式(2-32)中的第三和第一式是辅助方程。

2.2.2 本构(或极化,状态)方程

经典电动力学中讨论极化时,不考虑介质的变形,因而本构(或极化,状态)方程一般地可以写成

$$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{D}(\boldsymbol{E},\ T),\quad \boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{H},\ T) \tag{2-34}$$

具体表达式需由实验确定。考虑到 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$ 时,$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{0}$;$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{0}$ 时,$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$。当 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 较小时,不考虑温度影响时,上式的线性化形式是

$$\boldsymbol{D}=\epsilon\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H} \tag{2-35}$$

上式前面已讨论过。应当注意,对一些驻极体,极化后即使除去电场,极化状态并不消失;对于天然磁石、铁磁体等在无外加磁场时也可能处在磁化状态。对于这些介质,式(2-35)需要加入残留电场与磁场的影响。

和束缚电荷不同,自由电荷在电磁场中将产生运动,但在介质内粒子运动时相互碰撞,平均速度相当低,磁场力可以忽略,因而可以认为电流密度决定于电场,从而有

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{J}(\boldsymbol{E}) \tag{2-36}$$

计及 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$ 时 $\boldsymbol{J}=\boldsymbol{0}$,当 $\boldsymbol{E}$ 较小时,对传导电流有

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{E} \tag{2-37a}$$

式中 $\boldsymbol{\gamma}$ 为传导率张量。对存在外电源 E_{ext} 的情况,$\boldsymbol{E}$ 需用 $\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{ext}$ 代换,此时有

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{\gamma}\cdot(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}_{ext}),\quad \boldsymbol{J}_{ext}=\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{E}_{ext} \tag{2-37b}$$

式中 $\boldsymbol{J}_{ext}=\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{E}_{ext}$ 表示由外电源(如温差电、电荷浓度、化学电池等)引起的电流密度。

2.2.3 电磁波动方程

本小节取本构方程(2-35),对式(2-32)中第二式的左右两边同时取旋度得

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=-\mu\nabla\times\frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}=-\mu\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\times\boldsymbol{H})$$

利用矢量恒等式 $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E}$ 和式(2-32)中的第四式,则上式化为

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\nabla\left(\frac{\rho_{\text{自}}}{\epsilon}\right)=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}+\mu\frac{\partial\boldsymbol{J}}{\partial t},\ c=\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \tag{2-38}$$

式中 c 为介质中的光速。类似地可推出

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{H})=\nabla\times(\boldsymbol{J}+\partial\boldsymbol{D}/\partial t),\quad 或\nabla^2\boldsymbol{H}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{H}}{\partial t^2}-\nabla\times\boldsymbol{J} \tag{2-39}$$

上两式是关于 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的两个独立的波动方程。如无自由电荷和电流,则上两式化为标准的线性二次偏微分方程。

2.2.4 时谐场中的基本电磁学方程

工程中广泛应用按正弦或余弦曲线变化的电磁场,通常用复数形式来描写,即把时间因子

写成 $\exp(\mathrm{j}\omega t)$ 的形式，其中 $\mathrm{j}=\sqrt{-1}$ 为纯虚数，ω 为圆频率。以此代入式(2-32)和(2-16)，便得时谐场中独立的方程组

$$\nabla\times\boldsymbol{E}+\mathrm{j}\omega\boldsymbol{B}=0,\quad \nabla\times\boldsymbol{H}-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{D}=\boldsymbol{J},\quad \nabla\cdot\boldsymbol{J}+\mathrm{j}\omega\rho_e=0 \tag{2-40}$$

把式(2-35)和(2-37)代入上式，可得各向同性介质中常用的方程

$$\begin{gathered}\nabla\times\left(\frac{1}{\mu}\nabla\times\boldsymbol{E}\right)-\omega^2\epsilon_c\boldsymbol{E}=-\mathrm{j}\omega\boldsymbol{J}_{\mathrm{ext}}\\ \nabla\times\left(\frac{1}{\epsilon_c}\nabla\times\boldsymbol{H}\right)-\omega^2\mu\boldsymbol{H}=\nabla\times\left(\frac{1}{\epsilon_c}J_{\mathrm{ext}}\right)\\ \epsilon_c=\epsilon-\mathrm{j}\gamma/\omega,\quad \boldsymbol{J}_{\mathrm{ext}}=\boldsymbol{J}-\gamma\boldsymbol{E}\end{gathered} \tag{2-41}$$

上式中 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 的方程不相互耦合，对实际问题的求解带来了方便。

2.2.5 电势和磁势

解许多实际工程问题时，通常并不直接求解 Maxwell 方程，而是引入电势和磁势，给出用电势和磁势表示的电磁学方程，然后再求解之。

由 Maxwell 方程(2-32)的第三式 $\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$ 知，$\boldsymbol{B}$ 可表为

$$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A} \tag{2-42}$$

称 $\boldsymbol{A}$ 为磁矢量势，代入方程(2-32)的第二式得 $\nabla\times(\boldsymbol{E}+\partial\boldsymbol{A}/\partial t)=\boldsymbol{0}$，因而可引入一个标量势 φ，使该式恒成立，即

$$\boldsymbol{E}+\partial\boldsymbol{A}/\partial t=-\nabla\varphi,\quad 或\ \boldsymbol{E}=-\nabla\varphi-\partial\boldsymbol{A}/\partial t \tag{2-43}$$

当采用本构方程(2-35)时，利用式(2-42)和(2-43)，式(2-32)的第一式与第四式可化为

$$\begin{gathered}\nabla^2\varphi+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-\frac{\rho_e}{\epsilon}\\ \nabla^2\boldsymbol{A}-\mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{A}-\nabla\left(\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\mu\epsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=-\mu\boldsymbol{J}\end{gathered} \tag{2-44}$$

由于 $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$，所以 $\boldsymbol{A}$ 不能由 $\boldsymbol{B}$ 唯一确定，通常取 Lorentz 条件作为规范化条件

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\mu\epsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0 \tag{2-45}$$

取用规范化条件式(2-45)后，式(2-44)化为

$$\begin{gathered}\nabla^2\varphi-\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu\epsilon\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)=-\frac{\rho_e}{\epsilon}\\ \nabla^2\boldsymbol{A}-\mu\epsilon\frac{\partial^2}{\partial t^2}\boldsymbol{A}=-\mu\boldsymbol{J}\end{gathered} \tag{2-46}$$

式(2-40)、(2-41)和(2-46)是双曲型偏微分方程。

2.2.6 似稳电磁场和静态电磁场

Maxwell 方程组中如只有位移电流 $\partial\boldsymbol{D}/\partial t$ 可以略去，则称为磁似稳场(MQS)，此时没有延

迟和辐射现象；如只有$\partial \boldsymbol{B}/\partial t$可以略去，则称为电似稳场(EQS)，其实用价值很小。进一步分析表明，当$L/c\tau \ll 1$时，$\partial \boldsymbol{B}/\partial t$和$\partial \boldsymbol{D}/\partial t$均可以略去，这种场称为似稳(或准静态)电磁场，其中$c = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$为介质中的光速，L为物体的最大尺寸，τ为所讨论问题关心的时间间隔。略去$\partial \boldsymbol{B}/\partial t$和$\partial \boldsymbol{D}/\partial t$后，电场和磁场便不相互耦合，可以各自独立求解。此时Maxwell方程组化为

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = \rho_e, \quad \nabla \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0, \quad \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{J} \tag{2-47}$$

对于似稳电磁场，式(2-38)、(2-39)和(2-46)诸式中含时间导数的项便不存在，从而这些双曲型偏微分方程转换为椭圆形的Poisson(泊松)方程。但应指出，此时介质中虽不存在电磁波，但电磁学量仍然可以随时间变化，如电路理论便是以似稳场作理论基础的。

静态电磁场要求所有物理量都和时间无关。静电场中没有电荷的运动，即$\boldsymbol{J} \equiv \boldsymbol{0}$，因$\nabla \times \boldsymbol{E} = \boldsymbol{0}$，故电场恒为有势场，它的方程组是精确的。静磁场中有稳恒的电流存在，产生能量损耗，从而必须从环境中获得能量，需要从环境流入外电流$\boldsymbol{J}_{ext} = \gamma \boldsymbol{E}_{ext}$。当$\rho_e = 0$时，电势满足Laplace(拉普拉斯)方程，$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{0}$时有$\nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{0}$，故此时磁势也是有势场，且满足Laplace方程。即当$\rho_e = 0$和$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{0}$时有

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E} &= -\nabla \varphi, \quad \nabla^2 \varphi = 0 \\ \boldsymbol{H} &= -\nabla \psi, \quad \nabla^2 \psi = 0 \end{aligned} \tag{2-48}$$

式中φ为电标量势，ψ为磁标量势。

2.2.7 电磁学边界条件和初始条件

讨论定常电磁学问题时，边界条件是定解的必要条件；讨论非定常问题时，除边界条件外，初始条件也是定解的必要条件。首先讨论边界条件。

1) $\boldsymbol{D}$ 的法向分量

设界面的法线由介质1指向介质2，作一底面平行于界面(图2-5)的高$h \to 0$、半径为R的薄圆柱体。由Gauss定律得

$$\oint_a \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) \cdot \boldsymbol{n}\pi R^2 + \overline{\boldsymbol{D}} \cdot \boldsymbol{m} 2\pi R h = \int_V \rho_e \mathrm{d}V = \rho_e \pi R^2 h$$

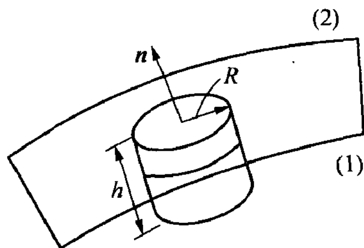


图2-5 $\boldsymbol{D}$，$\boldsymbol{B}$法向边界条件的推求

式中$\boldsymbol{m}$为微圆柱侧面的法线，$\overline{\boldsymbol{D}}$为侧面$\boldsymbol{D}$的平均值且设为有界。令$\rho_e h = \sigma_s$为界面上电荷的面密度，则当$h \to 0$时有

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{D}_2 - \boldsymbol{D}_1) \cdot \boldsymbol{n} = \sigma_s, \quad \text{或} \ D_{2n} - D_{1n} = \sigma_s \\ &(\boldsymbol{E}_2 - \boldsymbol{E}_1) \cdot \boldsymbol{n} = (\sigma_s + \sigma_{sp})/\epsilon_0, \quad \sigma_{sp} = -\boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{P}_2 - \boldsymbol{P}_1) \end{aligned} \tag{2-49}$$

式中$\boldsymbol{n}$是介质1的外法线。特别当$D_{2n} = 0$时有$D_{1n} = -\sigma_s$。

2) $\boldsymbol{B}$ 的法向分量

和上面相仿，由磁通连续性条件得

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{B}_2 - \boldsymbol{B}_1) \cdot \boldsymbol{n} = 0, \quad \text{或} \ B_{2n} - B_{1n} = 0 \\ &(\boldsymbol{H}_2 - \boldsymbol{H}_1) \cdot \boldsymbol{n} = -(\boldsymbol{M}_2 - \boldsymbol{M}_1) \cdot \boldsymbol{n}/\mu_0 \end{aligned} \tag{2-50}$$

3) **H 的切向分量**

令界面 a 的法线为 $\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{n}$ 的正向由介质 1 指向 2，即为介质 1 的外法线。取一横切界面 a 的长 l、高 $d\to 0$ 和法线为 $\boldsymbol{m}$ 的矩形平面 b，l 平行于界面，其在介质 2 中的单位切向矢量为 $\boldsymbol{t}$，沿 b 的周界的逆时针方向为正，$\boldsymbol{t}$，$\boldsymbol{m}$，$\boldsymbol{n}$ 组成右手系(图 2-6)。按 Ampère 定律有

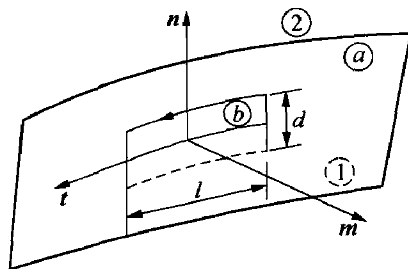


图 2-6 **E，H** 切向边界条件的推求

$$\oint_C \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = (\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)\cdot \boldsymbol{t}l + (\boldsymbol{H}_{12}-\boldsymbol{H}_{21})\cdot \boldsymbol{n}d =$$

$$\int_a \boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} + \frac{\partial}{\partial t}\int_a \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{a} =$$

$$\boldsymbol{J}\cdot \boldsymbol{m}ld + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot \boldsymbol{m}ld$$

式中 $\boldsymbol{H}_{12}(\boldsymbol{H}_{21})$表示右(左)短边 d 上的 $\boldsymbol{H}$ 值。设$\partial \boldsymbol{D}/\partial t$，$\boldsymbol{H}_{12}$，$\boldsymbol{H}_{21}$有界。$\boldsymbol{J}_s=\boldsymbol{J}d$ 为界面上电流的面密度，计及 $\boldsymbol{t}=\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n}$，$(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)\cdot(\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{n})=\boldsymbol{m}\cdot[\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)]$，则当$d\to 0$ 时有

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)=\boldsymbol{J}_s \tag{2-51}$$

或
$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=\mu_0(\boldsymbol{J}_s+\boldsymbol{J}_{sm}),\ \boldsymbol{J}_{sm}=\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{M}_2-\boldsymbol{M}_1)$$

式中 $\boldsymbol{J}_{sm}$为磁化电流面密度。

4) **E 的切向分量**

设界面上存在面密度为 $\pi_s=\sigma_s d$ 的电偶极子层，且规定界面法线 $\boldsymbol{n}$ 的正方向为由负电荷层指向正电荷层。和上面类似，利用法拉第定律计算得

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = (\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)\cdot \boldsymbol{t}l + (\boldsymbol{E}_{12}-\boldsymbol{E}_{21})\cdot \boldsymbol{n}d = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \boldsymbol{m}ld$$

设$\partial \boldsymbol{B}/\partial t$ 有界，则当 $d\to 0$ 时，上式中含$\partial \boldsymbol{B}/\partial t$ 的项为 0。当 $l\to 0$ 时，$(\boldsymbol{E}_{12}-\boldsymbol{E}_{21})/l=-\partial \boldsymbol{E}/\partial l$，表示沿 $\boldsymbol{t}$ 方向的方向导数。从而上式化为

$$(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)\cdot \boldsymbol{t} = \partial(\boldsymbol{E}\cdot \boldsymbol{n}d)/\partial l,\quad \text{或 } E_{2t}-E_{1t}=-\partial(\pi_s/\epsilon)/\partial l \tag{2-52a}$$

推导上式时已应用了关系 $\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}d=-\pi_s/\epsilon$(参见后面的公式(2-63))。由于上式在界面内任意方向成立，所以又可写成

$$\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)=-\nabla(\pi_s/\epsilon) \tag{2-52b}$$

上述 4 个界面边界条件中，只能独立选用两个：式(2-49)或(2-51)，式(2-50)或(2-52)。

5) **电荷守恒**

在边界上有

$$(\boldsymbol{J}_2-\boldsymbol{J}_1)\cdot \boldsymbol{n}=-\partial\sigma_s/\partial t \tag{2-53}$$

6) **特例**

应当注意，如介质 2 是导体，在导体内部 $\boldsymbol{E}_2=\boldsymbol{D}_2=\boldsymbol{0}$，即不存在电场强度和体电荷。介质 1 的边界条件退化为($\boldsymbol{n}$ 为介质 1 的外法线，即指向导体)

$$\boldsymbol{B}_1 \cdot \boldsymbol{n} = 0, \quad \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{E}_1 = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{D}_1 \cdot \boldsymbol{n} = -\sigma_s, \quad \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{H}_1 = -\boldsymbol{J}_s \tag{2-54}$$

上式表明，导体表面附近的电场强度和导体表面垂直，同时切向电场 E_t 和法向磁通密度为零。导体表面可以存在面电荷密度 σ_s 和面电流密度 $\boldsymbol{J}_s$。

下面再来讨论初始条件。

7) *初始条件*

由于 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 都满足二阶偏微分方程，因此需给定恰当的初始条件。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{E}_0(0), \quad \dot{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{x}, 0) = \dot{\boldsymbol{E}}_0(0), \quad \boldsymbol{H}(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{H}_0(0), \quad \dot{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{x}, 0) = \dot{\boldsymbol{H}}_0(0), \ \boldsymbol{x} \in V \tag{2-55}$$

由于 $\boldsymbol{E}$ 和 $\boldsymbol{H}$ 存在关系，因而上述 4 个条件中只能独立地取两个。

2.3 空间准静态问题的几个典型解

2.3.1 点电荷

自由空间点电荷产生的电场由式(2-19)表示，相应的电势为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_e}{r} \tag{2-56}$$

2.3.2 电偶极子

电偶极子是指电量相同的两个正负电荷 $\pm q_e$，其间的距离矢量 $\boldsymbol{d} \to \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{d}$ 的正方向为由 $-q_e$ 指向 $+q_e$，$\boldsymbol{p}_e = \lim\limits_{d \to 0} q_e \boldsymbol{d}$，称为电偶极矩。为方便计，设自由空间 $-q_e$ 位于坐标原点。按式(2-56)场中任一点 M 的电势为

$$\varphi = \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r}\right) = \frac{q_e}{4\pi\epsilon_0}\frac{\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{r}^0}{r^2} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\boldsymbol{p}_e \cdot \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right), \ \boldsymbol{r}^0 = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} \tag{2-57}$$

式中 r_+ 和 r 分别为正、负电荷到 M 的距离。在外场 $\boldsymbol{E}$ 中，作用在电偶极子上的力

$$\boldsymbol{F} = -q_e\boldsymbol{E} + q_e\left(\boldsymbol{E} + \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{d}} \cdot \boldsymbol{d}\right) = (q_e\boldsymbol{d} \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{p}_e \cdot \boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{E} = \boldsymbol{p}_e \cdot \boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{E} \tag{2-58}$$

式中符号 $\otimes$ 表示张量积，$\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b} = a_k b_l \boldsymbol{i}_k \otimes \boldsymbol{i}_l$；$\partial \boldsymbol{E}/\partial \boldsymbol{d}$ 是张量导数，$\partial \boldsymbol{E}/\partial \boldsymbol{d} = (\partial E_k/\partial d_l)\boldsymbol{i}_k \otimes \boldsymbol{i}_l$。作用在电偶极子上的力偶为

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{d} \times q_e\boldsymbol{E} = \boldsymbol{p}_e \times \boldsymbol{E} \tag{2-59}$$

对于极化材料，按式(2-5)，极化强度为 $\boldsymbol{P}$ 的电介质在外电场 $\boldsymbol{E}$ 中时，显然其电体积力密度 $\boldsymbol{f}^e$ 和电体积力偶密度 $\boldsymbol{c}^e$ 分别为

$$\boldsymbol{f}^e = \boldsymbol{P} \cdot \boldsymbol{\nabla} \otimes \boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{c}^e = \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{E} \tag{2-60}$$

2.3.3 单层电荷分布

设曲面 a 上的电荷面密度为 σ_s，按式(2-56)它在任一点 $\boldsymbol{x}$ 产生的电势为

$$\varphi(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_a \frac{\sigma_s(\boldsymbol{x}')}{r}\mathrm{d}a, \quad \boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_a \sigma_s(\boldsymbol{x}')\,\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}a \tag{2-61}$$

式中 $\boldsymbol{x}'$ 表示该点位于曲面 a 上，$r^2=(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$。可以证明 $\varphi(\boldsymbol{x})$ 在曲面外和曲面上都是连续的，但 $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x})$ 在穿越曲面时有间断，如式(2-52)所示。

2.3.4 双层电荷分布

设曲面 a 上的电偶极子面密度为 π_s，曲面法线 $\boldsymbol{n}$ 由负电荷(负面)指向正电荷(正面)(见图2-7)。按式(2-57)它在自由空间任一点 M 产生的电势为

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_a \frac{\pi_s\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}^0}{r^2}\mathrm{d}a = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_a \pi_s\mathrm{d}\Omega,\ \mathrm{d}\Omega = \frac{\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r}^0\mathrm{d}a}{r^2},\ \boldsymbol{r}^0 = \frac{\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \tag{2-62}$$

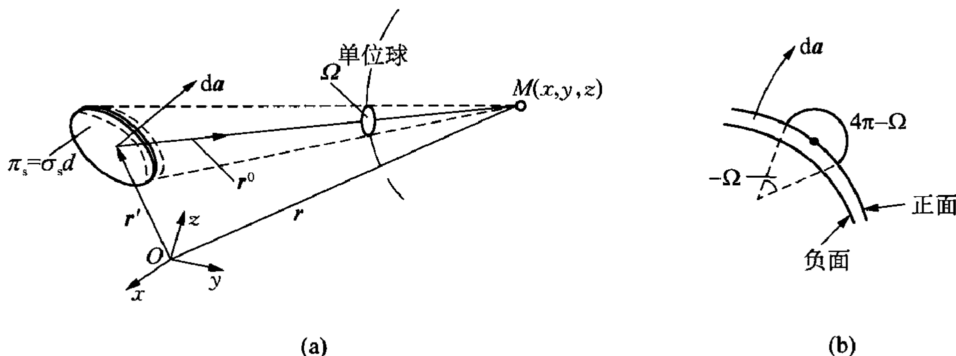


图2-7 面积为 da 的偶极子层张成的微分立体角

式中 dΩ 是微元面积 da 对 M 点张成的立体角，规定位于正面一侧的立体角为正，负面一侧的为负。易于证明，φ 穿过偶极子面时是不连续的，因为当 M 点位于 a 的正面一侧时，张成的立体角为 $4\pi-\Omega_0$，这和闭合曲面对其外部一点的立体角为零的定理一致，而当 M 点位于 a 的负面一侧张成的立体角为 $-\Omega_0$，Ω_0 为曲面 a 张成的立体角的绝对值；所以跨过曲面 a 时

$$\varphi^+ - \varphi^- = \frac{\pi_s}{4\pi\epsilon_0}[(4\pi-\Omega_0)-(-\Omega_0)] = \frac{\pi_s}{\epsilon_0} \tag{2-63a}$$

电偶极子层内电场强度的法向分量为

$$E_n = -\frac{(\varphi^+ - \varphi^-)}{d} = -\frac{\pi_s}{d\epsilon_0} = -\frac{\sigma_s}{\epsilon_0} \tag{2-63b}$$

2.3.5 微电流环的磁场

图2-8表示一自由空间中线电流为 i 的电流环，环的周线为 C，围成的面积为 Δa，其法线为 $\boldsymbol{n}$，从 $\boldsymbol{n}$ 的正向观察时，电流 i 按反时针方向流过 C；S 为以 C 为边界的任一曲面。由式(2-25)和(2-48)知，在准静态情形有

$$\int_{\Gamma} \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \int_{\Gamma} -\nabla \psi \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \Delta\psi = i$$

式中 Γ 为环绕 C 的两个端点终止在 S 面的正负两边的开围线，$\Delta\psi$ 为 Γ 两端点 ψ 的差值，S 为 ψ 的间断面。类比于双层电荷 $\Delta\varphi$ 的分布，可把这一问题设想为双层磁荷分布，用 ψ 的间断值 i 代替 φ 的间断值 π_s/ε_0，因而磁势 ψ 为

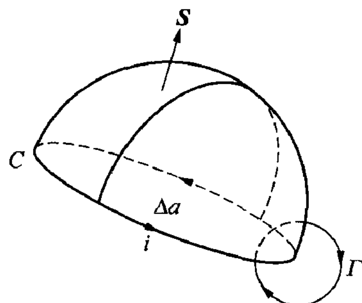


图 2-8 微电流环

$$\psi = \frac{1}{4\pi}\int_a i\,\mathrm{d}\Omega = \frac{i\Omega}{4\pi} = \frac{i\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}^0}{4\pi r^2}\Delta a = \frac{\mu_0 \boldsymbol{m} \cdot \boldsymbol{r}^0}{4\pi\mu_0 r^2},\ \boldsymbol{m} = i\Delta a\boldsymbol{n} \tag{2-64}$$

式中 Ω 是电流环的面积 Δa 对观察点 M 所张的立体角，$\boldsymbol{n}$ 为面 Δa 的法线，$\boldsymbol{r}$ 为微电流环中心指向 M 点的距离。和式(2-57)相比，上式中的磁势代表磁偶极矩 $\boldsymbol{p}_m = \mu_0\boldsymbol{m}$ 的“磁偶极子”的势。这就表明除邻近微电流环的区域外，微电流环产生的磁场和 $\boldsymbol{p}_m = \mu_0\boldsymbol{m}$ 的磁偶极子产生的磁场是相同的。

类似于式(2-60)，当磁介质中存在磁化 $\boldsymbol{M}$ 时，可以得到磁力密度 $\boldsymbol{f}^m$ 和磁力偶密度 $\boldsymbol{c}^m$ 分别为

$$\boldsymbol{f}^m = \boldsymbol{M} \cdot \nabla \otimes \boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{c}^m = \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{B} \tag{2-65}$$

2.3.6 导线中恒定电流产生的磁场

实验表明导线中的恒定电流在其周围产生磁场，带有恒定电流 I 的电流回路 C 在自由空间中任一点产生的磁通密度为

$$\boldsymbol{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_C \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}^0}{r^2},\ \boldsymbol{r}^0 = \frac{\boldsymbol{r}}{r},\ r = |\boldsymbol{r}| \tag{2-66}$$

式中 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 表示电流回路的微元，其正方向和电流方向一致，$\boldsymbol{r}$ 表示由微元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 到观察点的距离，并指向观察点。现在我们来证明沿任何穿越电流回路的闭合路径 C_2 的 $\boldsymbol{B}$ 的线积分的值正比于它所环绕的电流 I，即所谓全电流定律：

$$\oint_{C_2} \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \mu_0 I \tag{2-67}$$

式中 $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 表示 C_2 上的微元，按式(2-66)有

$$\boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_C \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l} \times \boldsymbol{r}^0}{r^2} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_C \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{r^2} \cdot \boldsymbol{r}^0 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_C \frac{(-\mathrm{d}\boldsymbol{s}) \times \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{r^2} \cdot \boldsymbol{r}^0 = -\frac{\mu_0 I}{4\pi}\mathrm{d}\Omega$$

上式中的 $(-\mathrm{d}\boldsymbol{s} \times \mathrm{d}\boldsymbol{l}) \cdot \boldsymbol{r}^0/r^2$ 为观察点看到的 C 上微元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 移动 $-\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ 所张成的立体角，$\mathrm{d}\Omega$ 便是前面讨论过的电流回路在原位置的立体角与移动后的立体角之差，围绕导线电流的任一闭围线有 $\oint_{C_2} \mathrm{d}\Omega = -4\pi$，从而式(2-67)得证。实际上式(2-67)可以直接由 Maxwell 方程组式(2-32)的第四式证明。

2.3.7 无限长导线中恒定电流在双磁介质中产生的磁场

设磁介质Ⅰ和Ⅱ的导磁系数分别为 μ_{I} 和 μ_{II}。在磁介质Ⅰ中有穿出纸面、离分界面 $x_2 =$

0 的距离为 h、载有电流 I 的无限长导线，现在来讨论该导线中电流产生的磁场 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{I}}$ 和 $\boldsymbol{H}_{\mathrm{II}}$（图 2-9）。采用用叠加法处理这一问题：①设介质Ⅰ占据整个空间，在离分界面 $x_2=0$ 的 h 处作用有电流 I，$-h$ 处作用有电流 I_1，两者方向相同；②设介质Ⅱ占据整个空间，在离分界面 $x_2=0$ 的 h 处作用有电流 I_2，方向和 I 相同。按式(2-67)，在 $x_2=0$ 的界面上，两个辅助问题的解分别为

$$H_{\mathrm{I}t}=(I-I_1)\frac{\sin\theta}{2\pi r},\quad H_{\mathrm{II}t}=I_2\frac{\sin\theta}{2\pi r},\quad B_{\mathrm{I}n}=\mu_{\mathrm{I}}(I+I_1)\frac{\cos\theta}{2\pi r},\quad B_{\mathrm{II}n}=\mu_{\mathrm{II}}I_2\frac{\cos\theta}{2\pi r} \tag{2-68a}$$

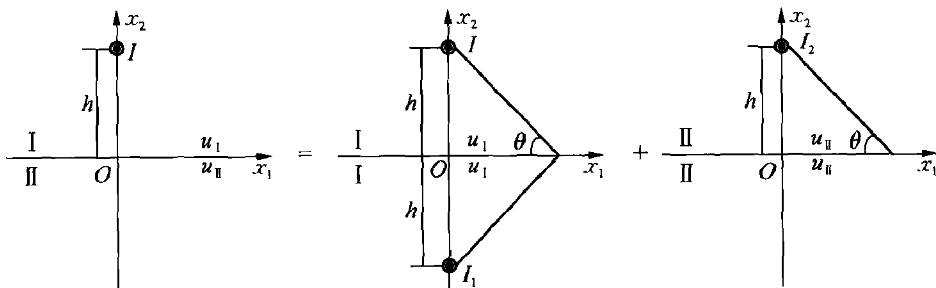


图 2-9 双磁介质中电流产生的磁场

式中 $\sin\theta=h/r$，t 沿 x_1 方向，n 沿 x_2 方向。按界面连续条件有 $H_{\mathrm{I}t}=H_{\mathrm{II}t}$，$\mu_{\mathrm{I}}H_{\mathrm{I}n}=\mu_{\mathrm{II}}H_{\mathrm{II}n}$，代入上式便得

$$I_1=\beta I,\quad I_2=\alpha I,\quad \beta=\frac{\mu_{\mathrm{II}}-\mu_{\mathrm{I}}}{\mu_{\mathrm{I}}+\mu_{\mathrm{II}}},\quad \alpha=1-\beta=\frac{2\mu_{\mathrm{I}}}{\mu_{\mathrm{I}}+\mu_{\mathrm{II}}} \tag{2-68b}$$

由式(2-68)知，若设介质Ⅰ为空气，介质Ⅱ为钢，由于 $\mu_{\mathrm{II}}\gg\mu_{\mathrm{I}}$，故有 $\beta\approx1$，$\alpha\approx0$，或 $(I-I_1)$ 和 I_2 都很小；从而在空气和钢中的磁感应 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}$ 和 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}$ 都不大。若设介质Ⅰ为钢，介质Ⅱ为空气，由于 $\mu_{\mathrm{I}}\gg\mu_{\mathrm{II}}$，故有 $\beta\approx-1$，$\alpha\approx2$，或 $(I-I_1)$ 和 I_2 都接近 2，而 $I+I_1$ 接近零；从而在钢中的磁感应 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}$ 很大，而自由空间的磁感应 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}$ 很小。

2.4 电磁能量与电磁力

2.4.1 静态电磁场中的能量

电磁场中任何场强不等于零的地方，电磁力都能做功，由此可知电磁能量存在于电磁场分布的整个空间。首先讨论电场。在电场强度为 $\boldsymbol{E}$ 的电场中点电荷受到的力是 $q_e\boldsymbol{E}$，从而把 q_e 从 ∞ 移到点 r 的外力应为 $-q_e\boldsymbol{E}$，外力应做的功为

$$W=-q_e\int_{\infty}^{r}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=q_e\int_{\infty}^{r}\nabla\varphi\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=q_e[\varphi(r)-\varphi(\infty)]=\varphi(r)q_e \tag{2-69}$$

上式中已采用 $\varphi(\infty)=0$ 这一大家认同的假设。

对于某一导体，其体电荷密度为 0，面电荷密度为 $\sigma_s=-\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}=-D_n$，其中 $\boldsymbol{D}$ 为周围介质

中的电位移，$\boldsymbol{n}$ 为介质表面的外法线。所以当面电荷密度由 σ_s 增加到 $\sigma_s+\delta\sigma_s$ 时，便对周围介质作了功，进而转换为介质中电磁能的增加，有

$$\begin{aligned}\delta W &= \int_a \varphi\,\delta\sigma_s \mathrm{d}a = -\int_a \varphi\delta\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a} = -\int_V \boldsymbol{\nabla}\cdot(\varphi\delta\boldsymbol{D})\mathrm{d}V = -\int_V \varphi\,\boldsymbol{\nabla}\cdot(\delta\boldsymbol{D})\mathrm{d}V \\ &\quad + \int_V \boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{D}\mathrm{d}V = \int_V \boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{D}\mathrm{d}V\end{aligned} \tag{2-70}$$

上式表明电场能量密度因 $\boldsymbol{D}$ 的变化引起的增加为 $\boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{D}$。类似地对于静态磁场，磁场能量密度为 $\boldsymbol{H}\cdot\delta\boldsymbol{B}$。所以电磁场中电磁能量密度为

$$\begin{gathered}\delta W = \boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\delta\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}\cdot(\epsilon_0\delta\boldsymbol{E}+\delta\boldsymbol{P})+\mu_0\boldsymbol{H}\cdot(\delta\boldsymbol{H}+\delta\boldsymbol{M}) \\ W = (\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})/2\end{gathered} \tag{2-71}$$

外力对电磁场做功将使其能量密度增加，电磁场对环境做功将使其能量密度减小。

2.4.2 电磁场中的能量平衡

电磁场在空间的传播必然伴随着能量的传播，能量的传播必须服从能量守恒定律，在经典电动力学范围内可由 Maxwell 方程得到。我们把式(2-32)的第四式点乘 $\boldsymbol{E}$，第二式点乘 $\boldsymbol{H}$，分别得到

$$\boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H})-\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J},\quad \boldsymbol{H}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E})+\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0$$

把上两式相减并利用恒等式 $\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H})=\boldsymbol{H}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E})-\boldsymbol{E}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H})$，便得

$$-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{S}-\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}-\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}=\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J},\ \boldsymbol{S}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H} \tag{2-72}$$

对任一由曲面 a 包围的空间体积，利用 Gauss 散度定理，由上式可推出

$$-\int_a \boldsymbol{S}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}=\int_V\left(\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\boldsymbol{H}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right)\mathrm{d}V+\int_V \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}\mathrm{d}V \tag{2-73}$$

上式便是 Poynting(玻印廷)和 Heaviside(海维赛德)各自独立得到的电磁场的能量平衡或守恒方程。$\boldsymbol{S}$ 称为 Poynting 矢量。式(2-73)表示外界电磁波传入的能量(由于取用外向法线，故以传出为正)等于场中电磁能密度的增加和电磁场对电流所做的功(通常转化为热)。

2.4.3 电磁动量方程和作用在介质上的力

把式(2-32)的第二式矢乘 $\boldsymbol{D}$，第四式矢乘 $\boldsymbol{B}$，然后相加得

$$\boldsymbol{D}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E})+\boldsymbol{D}\times\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}+\boldsymbol{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{H})+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$$

利用 $\boldsymbol{D}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{D}-(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{D}\otimes\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D})\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{\nabla})\boldsymbol{E}$，上式化为

$$-\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{D}\otimes\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{H})+(\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{D}+(\boldsymbol{\nabla}\otimes\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{B}+\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{D}\otimes\boldsymbol{B})=-\rho_e\boldsymbol{E}-\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}$$

再利用 $(\nabla\otimes\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{D}+(\nabla\otimes\boldsymbol{D})\cdot\boldsymbol{E}=\nabla\cdot[(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D})\boldsymbol{I}]$，上式可进一步化为

$$\nabla[(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{I}-(\boldsymbol{D}\otimes\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{H})]+\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{D}\otimes\boldsymbol{B})=$$
$$-\rho_e\boldsymbol{E}-\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}+(\nabla\otimes\boldsymbol{D})\cdot\boldsymbol{E}+(\nabla\otimes\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{H} \tag{2-74}$$

利用电荷守恒定律，上式还可进一步写成下述形式的电磁动量方程

$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{M}}=\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}-\partial\boldsymbol{g}^{\mathrm{M}}/\partial t=\nabla\cdot(\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}+\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{g}^{\mathrm{M}})-\dot{\boldsymbol{g}}^{\mathrm{M}} \tag{2-75}$$

式中

$$\boldsymbol{g}^{\mathrm{M}}=\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}$$
$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}=(\boldsymbol{D}\otimes\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{H})-\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{I} \tag{2-76}$$
$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{M}}=\rho_e\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}-\frac{1}{2}[(\nabla\otimes\boldsymbol{D})\cdot\boldsymbol{E}-(\nabla\otimes\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{D}]-\frac{1}{2}[(\nabla\otimes\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{H}-(\nabla\otimes\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{B}]$$

式中 $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}$，$\boldsymbol{f}^{\mathrm{M}}$ 和 $\boldsymbol{g}^{\mathrm{M}}$ 分别称为介质中的 Maxwell 应力张量、电磁场和介质相互作用的单位体积的体积力和电磁动量体积密度，通常电磁动量密度 $\boldsymbol{g}^{\mathrm{M}}$ 很小，可以略去。应当注意，$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}$ 是作用在介质上的电体积力，它沿着 $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}$ 的梯度方向。Maxwell 应力 $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}$ 不是介质内的真实机械应力，而是电磁场加在电介质上的外加电磁应力，由它的梯度可以推出电学体积力，电学体积力是实际存在在介质内的体积力。对于线性各向同性体 $\boldsymbol{D}=\varepsilon\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{B}=\mu\boldsymbol{H}$，上式还可写成

$$\boldsymbol{g}^{\mathrm{M}}=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}/c^2$$
$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}=(\epsilon\boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{E}+\mu\boldsymbol{H}\otimes\boldsymbol{H})-\frac{1}{2}(\epsilon E^2+\mu H^2)\boldsymbol{I} \tag{2-77}$$
$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{M}}=\rho_e\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}-\frac{1}{2}E^2\nabla\epsilon-\frac{1}{2}H^2\nabla\mu$$

用 ε_0，μ_0 分别代替式(2-75)和(2-77)中的ϵ，μ，便得自由空间的相应表达式

$$\boldsymbol{f}^0=\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^0-\partial\boldsymbol{g}^0/\partial t,\ \boldsymbol{g}^0=\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}/c_0^2,\ c_0^2=1/\epsilon_0\mu_0$$
$$\boldsymbol{\sigma}^0=(\epsilon_0\boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{E}+\mu_0\boldsymbol{H}\otimes\boldsymbol{H})-\frac{1}{2}(\epsilon_0E^2+\mu_0H^2)\boldsymbol{I},\quad \boldsymbol{f}^0=\rho_e\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B} \tag{2-78}$$

上式中的 $\boldsymbol{f}^0$ 和式(2-30)一致。

把式(2-74)写成式(2-75)时，式(2-76)不是唯一的形式，例如还可写成

$$\boldsymbol{g}^{\mathrm{N}}=\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B}$$
$$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{N}}=(\boldsymbol{D}\otimes\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{H})-(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{I}$$
$$\boldsymbol{f}^{\mathrm{N}}=\rho_e\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}-[(\nabla\otimes\boldsymbol{D})\cdot\boldsymbol{E}-(\nabla\otimes\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{H}]$$

出现这一问题的原因在于推导式(2-75)时，可能是只应用了刚体的场方程，没有考虑材料的变形和边界条件。

由式(2-75)和(2-76)可知，略去 $\boldsymbol{g}^{\mathrm{M}}$ 后，电磁场作用在介质上的体积力是$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}$，由 Gauss 散度定理，体积力$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}$ 可以转换为面力 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}$，有

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{M}}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}=(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{D})\boldsymbol{E}+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{H}-\frac{1}{2}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H})\boldsymbol{n} \tag{2-79}$$

式中 $\boldsymbol{n}$ 是电介质边界面的外向法线。一些工程问题中，往往要求作用在机械上的 Maxwell 应力的合力，这可用下述任一种方法去求得

$$\boldsymbol{F}=\int_V \boldsymbol{f}^{\mathrm{M}}\mathrm{d}V=\int_V \nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}\mathrm{d}V=\int_a \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}\mathrm{d}a=\int_a \boldsymbol{T}^{\mathrm{M}}\mathrm{d}a \tag{2-80}$$

应当指出，$\boldsymbol{T}^{\mathrm{M}}$ 是电磁场作用在介质内部任一人为边界上的电磁力，它和电磁体积力是等价的。对于实际的边界，边界两边是不同的介质，故要仔细讨论。如设介质Ⅱ内的电场为零，假设从介质Ⅰ到介质Ⅱ存在一个过渡层，那么从介质Ⅰ过渡到介质Ⅱ，电场强度是减小的，故 $\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}$ 是减小的，设 $\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}$ 沿 $\boldsymbol{m}$ 方向，由于过渡层厚度 l 非常小，$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}$ 非常大，且 $\lim\limits_{l\to 0}\boldsymbol{m}\cdot(\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}})l=-\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}$。所以电场作用到介质Ⅰ边界面上的静电面力为 $-\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}\cdot\boldsymbol{n}_{\mathrm{I}}$，其中 $\boldsymbol{n}_{\mathrm{I}}$ 为介质Ⅰ边界面的外法线；反之，若设介质Ⅰ内的电场为零，则作用到介质Ⅱ边界面上的静电面力为 $-\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}\cdot\boldsymbol{n}_{\mathrm{II}}$，其中 $\boldsymbol{n}_{\mathrm{II}}$ 为介质Ⅱ边界面的外法线。换言之，当不计环境的影响时，$-\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}\cdot\boldsymbol{n}$ 是电场作用到介质边界面上的面力，它和其他的外力之和构成总的外加载荷；也可以认为，Maxwell 应力和 Cauchy 应力产生的面力之和共同去平衡环境施加给边界面的外力(参阅节 3-5 和 3-6)。

还应当注意，式(2-76)中关于 $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}$ 和 $\boldsymbol{f}^{\mathrm{M}}$ 的分解存在一定的任意性，因此其合理性应由其他理论和实验来确定。例如由相对论电磁动力学中的能量动量张量可以自然地导出 Maxwell 应力；在第 3 章中，我们也将从能量原理自然地导出。

2.4.4 电磁场作用在介质上的力的其他表示

(1) 式(2-78)表明，自由空间的电磁动量方程可由电磁场引起的载流体的质量力密度 $\boldsymbol{f}^{0}$ 的表达式(2-30)来表示。由此人们推想电介质中的电磁动量方程也可由电磁场引起的载流体的质量力密度 $\boldsymbol{f}^{\mathrm{L}}$，式(2-31)来表示。为此，利用 $\boldsymbol{D}=\epsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{H}=\mu_0^{-1}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{M}$ 改写 Maxwell 方程(2-32)，得到

$$\begin{gathered}\epsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}-(\rho_{\mathrm{e}}-\nabla\cdot\boldsymbol{P})=0,\quad \nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\boldsymbol{0}\\ \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\quad \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\boldsymbol{B}-\epsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}-\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t}-\nabla\times\boldsymbol{M}-\boldsymbol{J}=\boldsymbol{0}\end{gathered} \tag{2-81}$$

把上式第二式矢乘 $\boldsymbol{D}$，第四式矢乘 $\boldsymbol{B}$，然后相加，再利用和(2.4.3)节中相同的运算，便得

$$\begin{gathered}\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{L}}-\epsilon_0\frac{\partial(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})}{\partial t}=\boldsymbol{f}^{\mathrm{L}}\\ \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{L}}=(\epsilon_0\boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{E}+\mu_0^{-1}\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{B})-\frac{1}{2}(\epsilon_0E^2+\mu_0^{-1}B^2)\boldsymbol{I}\\ \boldsymbol{f}^{\mathrm{L}}=\rho_{\mathrm{e}}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}-(\nabla\cdot\boldsymbol{P})\boldsymbol{E}+(\partial\boldsymbol{P}/\partial t+\nabla\times\boldsymbol{M})\times\boldsymbol{B}=\rho_{\mathrm{t}}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}_{\mathrm{t}}\times\boldsymbol{B}\end{gathered} \tag{2-82}$$

上式中的 $\boldsymbol{f}^{\mathrm{L}}$ 和式(2-31)一致。

(2) 假设电介质占据一个表面 a 包围的体积 V，V 外为自由空间，那么作用在介质上的电磁力，不仅有体积力 $\boldsymbol{f}^{\mathrm{L}}$，还有表面力。则由式(2-49)知，在表面 a 上作用有极化电荷面密度 $\sigma_{\mathrm{sp}}=\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{P}$，由式(2-51)知，在表面 a 上还作用有磁化电流面密 $\boldsymbol{J}_{\mathrm{sm}}=-\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{M}$，所以作用在体积 V 上的总力为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F} = & \int_V (\rho_e \boldsymbol{E} - \nabla \cdot \boldsymbol{P}) \boldsymbol{E} \mathrm{d}V + \int_V (\boldsymbol{J} + \partial \boldsymbol{P}/\partial t + \nabla \times \boldsymbol{M}) \times \boldsymbol{B} \mathrm{d}V + \\
& \int_a (\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{P}) \boldsymbol{E} \mathrm{d}a - \int_a (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{M}) \times \boldsymbol{B} \mathrm{d}a
\end{aligned} \tag{2-83}
$$

利用 $(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{P})\boldsymbol{E} = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{E})$，$\boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{M}) = \boldsymbol{n}(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{M}) - \boldsymbol{n} \cdot (\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{M})$ 和 Gauss 散度定理，上式化为

$$
\boldsymbol{F} = \int_V [(\rho_e + \boldsymbol{P} \cdot \nabla)\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} + \partial \boldsymbol{P}/\partial t \times \boldsymbol{B} + (\nabla \otimes \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{M}] \mathrm{d}V
$$

因为 $\partial(\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{B})/\partial t = \partial \boldsymbol{P}/\partial t \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{P} \times \partial \boldsymbol{B}/\partial t$，$\boldsymbol{P} \times \partial \boldsymbol{B}/\partial t = -\boldsymbol{P} \times (\nabla \times \boldsymbol{E})$，因此体积力密度为

$$
\boldsymbol{f}^e = \rho_e \boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} + (\nabla \otimes \boldsymbol{E}) \cdot \boldsymbol{P} + (\nabla \otimes \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{M} + (\partial \boldsymbol{P}/\partial t) \times \boldsymbol{B}
$$

上式还可以写成

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{f}^e = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^e - \epsilon_0 \partial(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})/\partial t \\
\boldsymbol{\sigma}^e = (\boldsymbol{D} \otimes \boldsymbol{E} + \boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{H}) - \frac{1}{2}(\epsilon_0 E^2 + \mu_0^{-1} B^2 - 2\boldsymbol{M} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{I}
\end{gathered} \tag{2-84}
$$

式(2-82)，(2-75)和(2-84)本质上是一致的，但各项的具体划分是不同的，三者的电磁应力张量是不同的，这也表明，单纯从 Maxwell 方程出发，不同的方法可以得到不同的电磁应力，不是唯一的，这一问题还需要继续深入研究。

2.4.5 电磁场作用在介质上的力偶

由式(2-83)出发可得对矢径为 $\boldsymbol{r}$ 的一点的力矩为：

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{C}^{(r)} = & \int_V \boldsymbol{r} \times [(\rho_e - \nabla \cdot \boldsymbol{P})\boldsymbol{E} + (\boldsymbol{J} + \partial \boldsymbol{P}/\partial t + \nabla \times \boldsymbol{M}) \times \boldsymbol{B}] \mathrm{d}V + \\
& \int_a \boldsymbol{r} \times [(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{P})\boldsymbol{E} \mathrm{d}a + \boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{M})] \mathrm{d}a
\end{aligned} \tag{2-85}
$$

计及

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{r} \times [(\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{P})\boldsymbol{E}] = -\boldsymbol{n} \cdot [(\boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{E}) \times \boldsymbol{r}] \\
\boldsymbol{r} \times [\boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{n} \times \boldsymbol{M})] = \boldsymbol{n} \cdot [(\boldsymbol{B} \otimes \boldsymbol{M}) \times \boldsymbol{r}] - \boldsymbol{n} \times [(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{M}) \cdot \boldsymbol{r}] \\
\nabla \cdot [(\boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{E}) \times \boldsymbol{r}] = [\nabla \cdot (\boldsymbol{P} \otimes \boldsymbol{E})] \times \boldsymbol{r} - [(\boldsymbol{P} \cdot \nabla \cdot)\boldsymbol{r}] \times \boldsymbol{E} \\
(\boldsymbol{P} \cdot \nabla) \cdot \boldsymbol{r} = \boldsymbol{P},\ \nabla \times \boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}
\end{gathered}
$$

则式(2-85)可化为

$$
\boldsymbol{C}^{(r)} = \int_V \boldsymbol{r} \times \rho \boldsymbol{f}^e \mathrm{d}V + \int_V (\boldsymbol{P} \times \boldsymbol{E} + \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{B}) \mathrm{d}V
$$

式中第一项为体积力产生的力矩，第二项为电磁力偶产生的力矩，所以电磁场与介质相互作用的单位体积的力偶为

$$
\boldsymbol{C}^e = \boldsymbol{P} \times \boldsymbol{E} + \boldsymbol{M} \times \boldsymbol{B} \tag{2-86}
$$

上式和偶极子理论推出的式(2-60)、(2-65)相同。

2.4.6 有关电磁力的几个例题

1）**双电介质界面上受到的力**

设电介质Ⅰ和Ⅱ的介电系数分别为ϵ_{I}和ϵ_{II}，它们之间存在界面，现求在电场作用下界面上受到的力。这可如下求之：在界面作一极薄的单位面积的微圆柱，其上表面S_{I}在介质Ⅰ内，法线为$\boldsymbol{n}'_{\mathrm{I}}$，下表面$S_{\mathrm{II}}$在介质Ⅱ内，法线为$\boldsymbol{n}'_{\mathrm{II}}$，上下表面均平行于界面（图2-10），由于圆柱极薄，其侧表面可略去不计。按式(2-79)，上、下表面上的Maxwell应力分别为

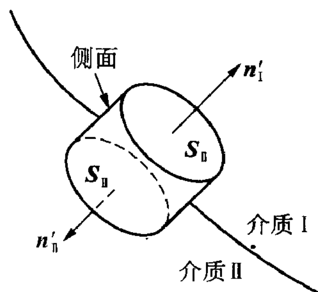


图2-10 电场在界面上产生的面力

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{n}'_{\mathrm{I}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{I}} = (\boldsymbol{n}'_{\mathrm{I}} \cdot \boldsymbol{D}_{\mathrm{I}})\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{D}_{\mathrm{I}} \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{n}'_{\mathrm{I}}$$

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{II}} = \boldsymbol{n}'_{\mathrm{II}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{II}} = (\boldsymbol{n}'_{\mathrm{II}} \cdot \boldsymbol{D}_{\mathrm{II}})\boldsymbol{E}_{\mathrm{II}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{D}_{\mathrm{II}} \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{n}'_{\mathrm{II}}$$

注意到$\boldsymbol{n}'_{\mathrm{II}} = -\boldsymbol{n}'_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{n}_{\mathrm{I}}$，其中$\boldsymbol{n}_{\mathrm{I}}$是介质Ⅰ界面的外法线，即由介质Ⅰ的界面指向介质Ⅱ的界面，因而作用在界面上的力为

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{M}} = (\boldsymbol{T}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{T}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{II}}) = (\boldsymbol{n}_{\mathrm{I}} \cdot \boldsymbol{D}_{\mathrm{II}})\boldsymbol{E}_{\mathrm{II}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{D}_{\mathrm{II}} \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{n}_{\mathrm{I}} - (\boldsymbol{n}_{\mathrm{I}} \cdot \boldsymbol{D}_{\mathrm{I}})\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{D}_{\mathrm{I}} \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{n}_{\mathrm{I}} \tag{2-87}$$

如介质Ⅰ是导体，导体表面的电荷面密度为σ_s，用来保证导体内部的电场强度为0，所以导体Ⅰ内的$\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{0}$，故其表面$\boldsymbol{E}$的切向分量$E_{\mathrm{I}t} = 0$，只有法向分量$E_{\mathrm{I}n}$。由此推出$E_{\mathrm{II}t} = 0$，令$|E_{\mathrm{II}n}| = E$。设介质Ⅱ的介电系数为$\epsilon$，由式(2-87)可知，作用在导体表面的面力为

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{M}} = DE\boldsymbol{n}_{\mathrm{I}}/2 = \epsilon E^2\boldsymbol{n}_{\mathrm{I}}/2 = \sigma_s E\boldsymbol{n}_{\mathrm{I}}/2, \ \sigma_s = \epsilon E \tag{2-88}$$

上式表明，电磁场作用在导体表面的面力总是沿着导体的外法线方向，把导体拉向电介质，这和下面电容器得到的结果是一致的。

如果我们直接采用2.4.3节的方法讨论，并注意到$\boldsymbol{n}_{\mathrm{II}} = -\boldsymbol{n}_{\mathrm{I}}$，则电场作用在介质分界面上的应力应当是

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{I}} = -\boldsymbol{n}_{\mathrm{I}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{I}} = -(\boldsymbol{n}_{\mathrm{I}} \cdot \boldsymbol{D}_{\mathrm{I}})\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{D}_{\mathrm{I}} \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{n}_{\mathrm{I}}$$

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{II}} = -\boldsymbol{n}_{\mathrm{II}} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{II}} = -(\boldsymbol{n}_{\mathrm{II}} \cdot \boldsymbol{D}_{\mathrm{II}})\boldsymbol{E}_{\mathrm{II}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{D}_{\mathrm{II}} \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{n}_{\mathrm{II}}$$

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{M}} = \boldsymbol{T}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{T}^{\mathrm{M}}_{\mathrm{II}} = (\boldsymbol{n}_{\mathrm{I}} \cdot \boldsymbol{D}_{\mathrm{II}})\boldsymbol{E}_{\mathrm{II}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{D}_{\mathrm{II}} \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{n}_{\mathrm{I}} - (\boldsymbol{n}_{\mathrm{I}} \cdot \boldsymbol{D}_{\mathrm{I}})\boldsymbol{E}_{\mathrm{I}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{D}_{\mathrm{I}} \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{n}_{\mathrm{I}}$$

式中$\boldsymbol{n}_{\mathrm{I}}$是介质Ⅰ的外法线，上式和式(2-87)是相同的。

2）**作用在平板电容器极板上的力**

图2-11a示一平板电容器，它是由两块长l、宽b、相隔较小距离h的两块平板电极充以介电常数为ϵ的电介质（或空气）组成，极板和介质之间没有外力作用，上、下电极表面分别充以正、负电荷。两块平板电极上不同的正负电荷产生吸引力，这种吸引力有多种不同的求法。选取正电极表面的法线为$\boldsymbol{n}$，它是指向电介质的。由于电极面的尺寸相对于其间隔大得多，故其

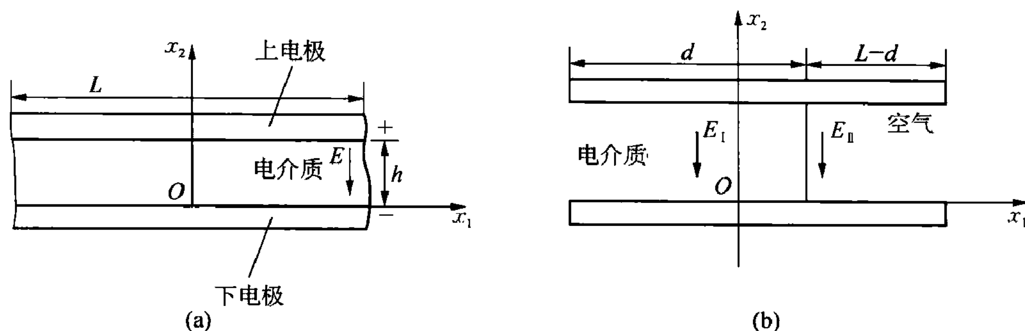


图 2-11　作用在平板电容器极板上的力

间的电场可认为是均匀的，且只存在 E_2 分量，即 $\boldsymbol{E}=E_2\boldsymbol{n}$。根据式(2-88)，作用在电极上的 Maxwell 应力是沿电极的外法线 $\boldsymbol{n}$，把电极拉向电介质，即

$$\boldsymbol{T}^{\mathrm{M}}=\boldsymbol{T}_2^{\mathrm{M}}\boldsymbol{n}=\left[\epsilon E_2^2-\frac{1}{2}\epsilon E_2^2\right]\boldsymbol{n}=\frac{1}{2}\epsilon E_2^2\boldsymbol{n} \tag{2-89}$$

因而介质内的机械应力是压应力。从而电场作用在电容器极板间的单位面积上的力是使电介质受到压缩，实际上它是极板之间正负电荷的吸引力。应当指出，如极板间的电介质为空气，由于空气不能承受外力，所以此时极板必须由外加支撑支持。

另一种方法是采用能量法。按式(2-70)存贮在电容器中的电能密度为

$$u=\int_0^D\boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{D}=\epsilon\int_0^E\boldsymbol{E}\cdot\delta\boldsymbol{E}=\frac{1}{2}\epsilon E_2^2=\frac{1}{2}D_2E_2$$

考虑到单位电极面积上的电荷 $q_e=D_in_i=D_2$。所以单位面积极板之间的电能为

$$U^0=uh=\frac{1}{2}D_2E_2h=\frac{1}{2}q_e\varphi=\frac{1}{2}C\varphi^2=\frac{1}{2}\frac{q_e^2}{C} \tag{2-90}$$

式中 $\varphi=E_2h$ 为两极板间的电势差，$C=q_e/\varphi=\epsilon/h$ 为极板单位面积产生的电容。

我们知道，若下极板不动，给上极板一个虚位移，则电容产生一个虚变动，因此存贮在介质中的电能要产生变化，同时要计及电场作用在极板上的面力 T_2 所做的机械功，现在我们采用能量原理来讨论这一问题，首先讨论电容器系统没有外加机械力的情况。

① 如果虚位移使极板间距离增加，则要保持电容器极板间的电势差不变，必须增加电荷 δq，电源供给电容器能量。按式(2-90)，电介质电能密度增加 $\frac{1}{2}\delta(q_e\varphi)=\frac{1}{2}\varphi\delta q_e=\frac{1}{2}\varphi^2\delta C$，克服电场作用在极板上的面力 T_2 所做的机械功为 $T_2\delta h$，而电源做功 $\varphi\delta q_e=\varphi^2\delta C$，所以由能量原理，当电势不变时有

$$\frac{1}{2}\varphi^2\delta C+T_2\delta h=\varphi^2\delta C\quad\Rightarrow T_2=\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{1}{2}\varphi^2\delta C\right)=\frac{1}{2}\varphi^2\frac{\partial C}{\partial h}=-\frac{\epsilon}{2h^2}\varphi^2 \tag{a}$$

② 如果切断电源，保持电荷不变，则电源不供给能量。介质的应变能将由电场供给能量，从而使电容器存贮的能量减少。当电极绝缘，其上电荷不变时有

$$\frac{1}{2}q_e^2\delta\frac{1}{C}+T_2\delta h=0\quad\Rightarrow T_2=-\frac{1}{2}q_e^2\frac{\partial}{\partial h}\left(\frac{1}{C}\right)=\frac{1}{2C^2}q_e^2\frac{\partial C}{\partial h}=\frac{1}{2}\varphi^2\frac{\partial C}{\partial h}=-\frac{\epsilon}{2h^2}\varphi^2 \tag{b}$$

上面几种方法得到的结果是一致的。

如果存在外加机械力 F_2 引起电极距离的增加，那么机械功要和电源提供的电能一起考虑。当电势不变时有

$$\frac{1}{2}\varphi^2\delta C + T_2\delta h = \varphi^2\delta C + F_2\delta h \quad \Rightarrow T_2 = \frac{1}{2}\varphi^2\frac{\partial C}{\partial h} + F_2 = -\frac{\epsilon}{2h^2}\varphi^2 + F_2 \tag{c}$$

当电荷不变时有

$$\frac{1}{2}q_e^2\delta\frac{1}{C} + T_2\delta h = F_2\delta h \quad \Rightarrow T_2 = -\frac{\epsilon}{2h^2}\varphi^2 + F_2 \tag{d}$$

由式(c)和(d)知，外加拉应力将抵消极板间的部分吸引力，相反，外加在极板上的压应力将增加极板间的相互拉力。

现讨论另外一个例题。设极板上的电荷保持常数，如果用一介电系数 ϵ 的电介质填入长 d 的一段极板之间，那么介质片上受到的力又是多少呢(图 2-11b)。首先在未放入电介质之前，电容器空气中的电场强度为 $E_0 = q_e/\epsilon_0 = Q/(\epsilon_0 lb)$，电介质放入后，在空气Ⅱ和电介质Ⅰ中的场强分别为 $E_{\text{Ⅱ}} = \sigma_{s\text{Ⅱ}}/\epsilon_0$ 和 $E_{\text{Ⅰ}} = \sigma_{s\text{Ⅰ}}/\epsilon$，其中 $\sigma_{s\text{Ⅱ}}$ 为和空气接触的电极部分上的面电荷，$\sigma_{s\text{Ⅰ}}$ 为和电介质接触的电极部分上的面电荷。注意到在电介质和空气接触的界面上(该界面垂直于极板)，电场强度的切向分量相同，在本问题中也就是电场强度本身相同，即有 $E_{\text{Ⅰ}} = E_{\text{Ⅱ}}$，从而极板上的总电荷为 $Q = [\sigma_{s\text{Ⅰ}}d + \sigma_{s\text{Ⅱ}}(1-d)]b = E_{\text{Ⅰ}}[\epsilon d + \epsilon_0(1-d)]b$，由此推出 $E_{\text{Ⅱ}} = E_{\text{Ⅰ}} = Q/\{[\epsilon d + \epsilon_0(1-d)]b\}$，从而电容器因放入电介质引起的能量增加为

$$U = \frac{1}{2}[\epsilon_0 E_{\text{Ⅱ}}^2(l-d) + \epsilon E_{\text{Ⅰ}}^2 d - \epsilon_0 E_0^2 l]bh = \frac{Q^2}{2}\left\{\frac{\epsilon_0(l-d)+\epsilon d}{[\epsilon d+\epsilon_0(l-d)]^2 b^2} - \epsilon_0 l\frac{1}{(\epsilon_0 lb)^2}\right\}bh =$$
$$\frac{Q^2}{2}\frac{h}{[\epsilon d+\epsilon_0(l-d)]b} - \frac{Q^2 h}{2\epsilon_0 lb} = \frac{Q^2 h}{2\epsilon_0 lb}\left\{\frac{\epsilon_0 l}{[\epsilon d+\epsilon_0(l-d)]} - 1\right\} =$$
$$-\frac{Q^2 h}{2\epsilon_0 lb}\frac{(\epsilon-\epsilon_0)d}{[\epsilon d+\epsilon_0(l-d)]}$$

按式(b)，电容器内电场作用到电介质片上的力是

$$F = -\frac{\partial U}{\partial d} = \frac{Q^2 h}{2\epsilon_0 lb}\left\{\frac{(\epsilon-\epsilon_0)}{[\epsilon d+\epsilon_0(l-d)]} - \frac{(\epsilon-\epsilon_0)d(\epsilon-\epsilon_0)}{[\epsilon d+\epsilon_0(l-d)]^2}\right\} =$$
$$\frac{Q^2 h}{2b}\frac{(\epsilon-\epsilon_0)}{[\epsilon d+\epsilon_0(l-d)]^2}$$

此力力图把电介质片拉入电容器内。

同样这一问题也可用 Maxwell 应力方法来处理。由于现在只有一个电场分量，且垂直于电介质和空气的界面，设界面的法线 $\boldsymbol{n}_{\text{Ⅰ}}$ 沿 x_1 轴的正向，即由介质Ⅰ指向空气Ⅱ。按式(2-87)有

$$\boldsymbol{T}^{\text{M}} = (\boldsymbol{n}_{\text{Ⅰ}}\cdot\boldsymbol{D}_{\text{Ⅱ}})\boldsymbol{E}_{\text{Ⅱ}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{D}_{\text{Ⅱ}}\cdot\boldsymbol{E}_{\text{Ⅱ}}\boldsymbol{n}_{\text{Ⅰ}} - (\boldsymbol{n}_{\text{Ⅰ}}\cdot\boldsymbol{D}_{\text{Ⅰ}})\boldsymbol{E}_{\text{Ⅰ}} + \frac{1}{2}\boldsymbol{D}_{\text{Ⅰ}}\cdot\boldsymbol{E}_{\text{Ⅰ}}\boldsymbol{n}_{\text{Ⅰ}} =$$
$$\frac{1}{2}\boldsymbol{D}_{\text{Ⅰ}}\cdot\boldsymbol{E}_{\text{Ⅰ}}\boldsymbol{n}_{\text{Ⅰ}} - \frac{1}{2}\boldsymbol{D}_{\text{Ⅱ}}\cdot\boldsymbol{E}_{\text{Ⅱ}}\boldsymbol{n}_{\text{Ⅰ}} = (\epsilon-\epsilon_0)E_{\text{Ⅰ}}^2\boldsymbol{n}_{\text{Ⅰ}}/2$$

所以界面上的力是 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{T}^{\text{M}}bh$，和上面的结果相同。

3) 导线中恒定电流与磁场的相互作用力

实验表明两个导线中流过电流时，它们之间存在相互作用力。这是因为电流在其周围能产生磁场，因此第二个导线中的电流在第一个导线处产生的磁场和第一个导线中的电流相互作用便产生了力。恒定电流在其周围产生磁场由式(2-66)表示，在自由空间中产生的磁通密度为

$$\boldsymbol{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\oint_C \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}^0}{r^2},\ \boldsymbol{r}^0=\frac{\boldsymbol{r}}{r},\ r=|\boldsymbol{r}|$$

式中 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 表示电流回路的微元，其正方向和电流方向一致，$\boldsymbol{r}$ 表示由微元 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 到观察点的距离，并指向观察点。按式(2-31)磁场作用到回路微元的作用力为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{F}=I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{B} \tag{2-91}$$

由上两式知，如自由空间存在两个闭合回路 C_1 和 C_2，其中分别流过电流 I_1 和 I_2，则电流 I_2 的回路 C_2 作用到电流 I_1 的回路 C_1 上力为

$$\boldsymbol{F}_{21}=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_1\times(\mathrm{d}\boldsymbol{l}_2\times\boldsymbol{r}_{21}^0)}{r_{21}^2},\quad \boldsymbol{F}_{12}=-\boldsymbol{F}_{21} \tag{2-92}$$

上式常称为 Biot-Savart(比奥-沙伐尔)定律。

对于载有电流 I_1 和 I_2 的两个相距 h 的无限长平行直导线，它们之间的作用力可如下求得。电流 I_1 在电流 I_2 导线上任一点产生的磁场，按式(2-67)，其大小为 $B_1=\mu_0 I_1/2\pi h$，其方向垂直由 I_1 和 I_2 组成的平面，且垂直 I_2 导线。因此作用于导线 I_2 的单位长度上的力，大小为 $F=\mu_0 I_1 I_2/2\pi h$。按式(2-91)，两电流方向相同时为引力，相反时为斥力。

在双磁介质中，介质Ⅰ中载有电流 I 的无限长导线在介质Ⅰ中产生的磁场，和介质Ⅰ占满整个空间时，其中有两个相距 $2h$ 的载有大小分别为 I 和 βI 的导线所形成的磁场相同(见2.3.7节)，所以单位厚度界面上合力的大小为 $F=\mu_{\mathrm{I}}\beta I^2/4\pi h$。如 $\beta>0$，则两电流方向相同，故为吸力；如 $\beta<0$，则两电流方向相反，故为斥力。因此如介质Ⅰ为空气，介质Ⅱ为钢时，由式(2-68b)知，此时 $\beta>0$，故电流导线被吸向钢的表面，单位厚度钢板上合力的大小为 $F=\mu_{\mathrm{I}}\beta I^2/4\pi h\approx\mu_0 I^2/4\pi h$。

这一问题还可用 Maxwell 应力的方法求解。式(2-87)讨论的是电场，但若把 $\boldsymbol{D}$ 换为 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{E}$ 换为 $\boldsymbol{H}$，则对磁场也成立。所以作用在界面上的力为

$$\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{n}_{\mathrm{I}}\cdot\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}})\boldsymbol{H}_{\mathrm{II}}-\frac{1}{2}\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{n}_{\mathrm{I}}-(\boldsymbol{n}_{\mathrm{I}}\cdot\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}})\boldsymbol{H}_{\mathrm{I}}+\frac{1}{2}\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\cdot\boldsymbol{H}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{n}_{\mathrm{I}} \tag{2-93}$$

参看图(2-9)，本例上式中的 $\boldsymbol{n}_{\mathrm{I}}=-\boldsymbol{i}_2$ 为沿界面法线，由Ⅰ指向Ⅱ，按式(2-68)有

$$H_{\mathrm{I}t}=\alpha\frac{\sin\theta}{2\pi r},\quad H_{\mathrm{II}t}=\alpha I\frac{\sin\theta}{2\pi r},\quad B_{\mathrm{I}n}=\mu_{\mathrm{I}}(1+\beta)I\frac{\cos\theta}{2\pi r},\quad B_{\mathrm{II}n}=\mu_{\mathrm{II}}\alpha I\frac{\cos\theta}{2\pi r}$$

式中 $\cos\theta=\sqrt{r^2-h^2}/r$，$\sin\theta=h/r$。代入式(2-93)得界面单位厚度上的面应力 $\boldsymbol{T}$ 和作用在界面单位厚度上的合力 $\boldsymbol{F}$ 分别为

$$\boldsymbol{T}=-\frac{1}{\mu_{\mathrm{II}}}(B_{\mathrm{II}n}^2\boldsymbol{i}_2+B_{\mathrm{II}n}B_{\mathrm{II}t}\boldsymbol{i}_1)+\frac{1}{2\mu_{\mathrm{II}}}(B_{\mathrm{II}n}^2+B_{\mathrm{II}t}^2)\boldsymbol{i}_2+\frac{1}{\mu_{\mathrm{I}}}(B_{\mathrm{I}n}^2\boldsymbol{i}_2+B_{\mathrm{I}n}B_{\mathrm{I}t}\boldsymbol{i}_1)-$$
$$\frac{1}{2\mu_{\mathrm{I}}}(B_{\mathrm{I}n}^2+B_{\mathrm{I}t}^2)\boldsymbol{i}_2=$$
$$\frac{I^2}{8\pi^2r^2}\{[(\mu_{\mathrm{II}}-\mu_{\mathrm{I}})\alpha^2\sin^2\alpha]+[-\mu_{\mathrm{II}}\alpha^2+\mu_{\mathrm{I}}(1+\beta)^2]\cos^2\alpha\}\boldsymbol{i}_2$$

$$\boldsymbol{F}=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{T}\mathrm{d}x_1=\boldsymbol{i}_2\frac{I^2}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\mu_{\mathrm{II}}-\mu_{\mathrm{I}})\alpha^2h^2-[\mu_{\mathrm{II}}\alpha^2-\mu_{\mathrm{I}}(1+\beta)^2]x_1^2}{(h^2+x_1^2)^2}\mathrm{d}x_1=\frac{\mu_{\mathrm{I}}\beta I^2}{4\pi h}\boldsymbol{i}_2$$

上式和前面的结果完全一致。

2.5 狭义相对论电动力学介绍[4, 19, 21]

2.5.1 Minkowski(闵可夫斯基)空间与 Lorentz 变换

Einstein(爱因斯坦)1905 年提出的狭义相对论有两条基本假设:

(1) 相对性原理:所有的惯性坐标系是等价的,惯性坐标系中物理规律均具有相同的形式;

(2) 光速不变原理:所有惯性坐标系中,真空中的光速是常数 c,且与光源是否运动无关。在相对论中,时间和空间紧密相关,组成四维空间,广泛采用 Minkowski 空间。四维 Minkowski 空间的坐标为

$$x_\alpha=x_i,\ \alpha,\ i=1,\ 2,\ 3;\quad x_\alpha=\mathrm{i}ct,\ \alpha=4 \tag{2-94}$$

式中希腊字母下标取值 1, 2, 3, 4,拉丁字母下标取值 1, 2, 3。Minkowski 空间的距离或间隔为

$$(\mathrm{d}s)^2=\mathrm{d}x_\alpha\mathrm{d}x_\alpha=(\mathrm{d}x_1)^2+(\mathrm{d}x_2)^2+(\mathrm{d}x_3)^2-c^2(\mathrm{d}t)^2 \tag{2-95}$$

在 Minkowski 空间中,时空距离可正可负,这和 Euclid(欧几里得)空间不同。

Lorentz 变换要求保持四维时空中的间隔不变。设不动时空系 ϕ 和运动时空系 $\bar{\phi}$ 的坐标轴相互平行,$\bar{\phi}$ 以常速 $\boldsymbol{v}$ 沿 x_1 轴相对于 ϕ 运动,则时空系 ϕ 到 $\bar{\phi}$ 的特殊 Lorentz 变换为

$$\bar{\boldsymbol{x}}=\boldsymbol{L}\boldsymbol{x},\quad \bar{x}_\alpha=L_{\alpha\beta}x_\beta,\quad \boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}=\boldsymbol{I}_4,\quad L_{\lambda\alpha}L_{\lambda\beta}=\delta_{\alpha\beta}$$
$$\boldsymbol{L}=\begin{bmatrix}\gamma & 0 & 0 & \mathrm{i}\beta\gamma\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -\mathrm{i}\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma\end{bmatrix},\ \beta=\frac{v}{c},\ \gamma=\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{2-96}$$

式中 $\boldsymbol{I}_4$ 是四阶的单位张量,且 $\boldsymbol{L}^{-1}=\boldsymbol{L}^{\mathrm{T}}$。由上知,Lorentz 变换是四维空间的正常正交变换。

2.5.2 电动力学方程的四维形式

引入四维反对称二阶电磁张量 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$,则

$$\boldsymbol{F}=\begin{bmatrix}0 & cB_3 & -cB_2 & -\mathrm{i}E_1\\ -cB_3 & 0 & cB_1 & -\mathrm{i}E_2\\ cB_2 & -cB_1 & 0 & -\mathrm{i}E_3\\ \mathrm{i}E_1 & \mathrm{i}E_2 & \mathrm{i}E_3 & 0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{G}=\begin{bmatrix}0 & H_3 & -H_2 & -\mathrm{i}cD_1\\ -H_3 & 0 & H_1 & -\mathrm{i}cD_2\\ H_2 & -H_1 & 0 & -\mathrm{i}cD_3\\ \mathrm{i}cD_1 & \mathrm{i}cD_2 & \mathrm{i}cD_3 & 0\end{bmatrix} \tag{2-97}$$

$$F_{\alpha\beta}=-F_{\beta\alpha},\quad G_{\alpha\beta}=-G_{\beta\alpha}$$

和四维矢量

$$j = [\boldsymbol{J},\ \mathrm{i}c\rho_e]^{\mathrm{T}} \tag{2-98}$$

则 Maxwell 方程组(2-32)式可以写成

$$F_{\beta\alpha,\lambda} + F_{\lambda\beta,\alpha} + F_{\alpha\lambda,\beta} = 0 \tag{2-99}$$

$$G_{\alpha\lambda,\lambda} = j_\alpha \tag{2-100}$$

上式中的 λ，α，β 取不同值时才有非平凡表达式。式(2-32)中的第三和第二式分别相当于式(2-99)中(λ，α，β)取[1，2，3]和[(2，3，4)，(3，4，1)，(4，1，2)]；式(2-32)中的第一和第四式分别相当于式(2-100)中的 α 取 4 和(1，2，3)。

式(2-30)也可借助电磁张量表示，即有

$$f^0_\beta = c^{-1} F_{\beta\alpha} j_\alpha \tag{2-101}$$

上式的头三式正是式(2-30)，而第四式则为 $f^0_4 = \mathrm{i}\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{J}/c$。

2.5.3 电磁能量动量张量和 Maxwell 应力

用 $F_{\beta\alpha}$ 乘式(2-100)，并利用式(2-99)便得

$$\begin{aligned} F_{\beta\alpha} j_\alpha = F_{\beta\alpha} G_{\alpha\lambda,\lambda} = (F_{\beta\alpha} G_{\alpha\lambda})_{,\lambda} - G_{\alpha\lambda} F_{\beta\alpha,\lambda} = \\ (F_{\beta\alpha} G_{\alpha\lambda})_{,\lambda} - \frac{1}{2} G_{\lambda\alpha}(F_{\alpha\beta,\lambda} + F_{\beta\lambda,\alpha}) = \\ (F_{\beta\alpha} G_{\alpha\lambda})_{,\lambda} + \frac{1}{2} G_{\lambda\alpha} F_{\lambda\alpha,\beta} \end{aligned} \tag{2-102}$$

由于 $2G_{\lambda\alpha}F_{\lambda\alpha,\beta} = (F_{\lambda\alpha}G_{\lambda\alpha})_{,\beta} + (G_{\lambda\alpha}F_{\lambda\alpha,\beta} - F_{\lambda\alpha}G_{\lambda\alpha,\beta})$，所以上式又可写成

$$F_{\beta\alpha} j_\alpha = -(G_{\lambda\alpha}F_{\beta\alpha} - \delta_{\lambda\beta}F_{\xi\alpha}G_{\xi\alpha}/4)_{,\lambda} + (G_{\lambda\alpha}F_{\lambda\alpha,\beta} - F_{\lambda\alpha}G_{\lambda\alpha,\beta})/4 \tag{2-103}$$

定义 Minkowski 电磁能量动量张量 $S^{(e)}_{\lambda\beta}$ 为

$$S^{(e)}_{\lambda\beta} = c^{-1}\left(G_{\lambda\alpha}F_{\beta\alpha} - \frac{1}{4}\delta_{\lambda\beta}F_{\xi\alpha}G_{\xi\alpha}\right),\quad \boldsymbol{S}^{(e)} = [S^{(e)}_{\lambda\beta}] = \begin{bmatrix} -\sigma^{\mathrm{M}}_{kj} & \mathrm{i}c^{-1}S_k \\ \mathrm{i}cg_j & -W \end{bmatrix} \tag{2-104}$$

式中 $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}$ 是 Maxwell 应力，$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}$ 和 $\boldsymbol{g}^{\mathrm{M}}$ 由式(2-76)定义，$\boldsymbol{S} = \boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}$ 由式(2-72)定义，$W = (\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D} + \boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{B})/2$ 由式(2-71)定义。由此，式(2-103)可以改写成

$$S^{(e)}_{\lambda\beta,\lambda} = -c^{-1}F_{\beta\alpha}j_\alpha + (4c)^{-1}(G_{\lambda\alpha}F_{\lambda\alpha,\beta} - F_{\lambda\alpha}G_{\lambda\alpha,\beta}) \tag{2-105}$$

式(2-105)的空间部分($\beta = 1，2，3$)便是动量方程(2-75)，时间部分($\beta = 4$)便是能量方程(2-72)。

Minkowski 假设电磁场作用在等速运动物体上的体积力为电磁能量动量张量的负散度，即

$$f^{(e)}_\beta = -S^{(e)}_{\lambda\beta,\lambda} = c^{-1}F_{\beta\alpha}j_\alpha - (4c)^{-1}(G_{\lambda\alpha}F_{\lambda\alpha,\beta} - F_{\lambda\alpha}G_{\lambda\alpha,\beta}) \tag{2-106}$$

利用 $c^{-1}F_{\beta\alpha}j_\alpha = f^0_\beta$ 和

$$(4c)^{-1}(G_{\lambda\alpha}F_{\lambda\alpha,\beta} - F_{\lambda\alpha}G_{\lambda\alpha,\beta}) = (\boldsymbol{B}_{,\beta}\cdot\boldsymbol{H} - \boldsymbol{E}_{,\beta}\cdot\boldsymbol{D} - \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{H}_{,\beta} + \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}_{,\beta})/2$$

则由式(2－106)可推出

$$
\begin{aligned}
f_j^{(e)} &= \rho_e E_j + (\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B})_j - \frac{1}{2}(\boldsymbol{B}_{,j}\cdot\boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}_{,j}\cdot\boldsymbol{B}) - \frac{1}{2}(\boldsymbol{D}_{,j}\cdot\boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_{,j}\cdot\boldsymbol{D}) \\
\mathrm{i}cf_4^{(e)} &= -\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{H} - \frac{\partial\boldsymbol{H}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{B} + \frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{E} - \frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot\boldsymbol{D}\right)
\end{aligned}
\tag{2-107}
$$

式(2－107)中的 $f_j^{(e)}$ 和(2－76)中第三式的 f_j^{M} 相同,只不过本处改变了符号。利用对任一函数 G 有 $G_{,t}=\mathrm{i}cG_{,4}$，按式(2－104),式(2－106)还可写成

$$
\sigma_{kj,k}^{\mathrm{M}} - f_j^{(e)} = g_{j,t}, \quad S_{k,k} + W_{,t} = \mathrm{i}cf_4^{(e)}, \quad g_{j,t} = \mathrm{i}cg_{j,4}, \; W_{,t} = \mathrm{i}cW_{,4} \tag{2-108}
$$

由于在真空中 $\boldsymbol{D}=\epsilon_0\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{H}$, 所以有 $\boldsymbol{G}=\sqrt{\epsilon_0/\mu_0}\cdot\boldsymbol{F}$, 式(2－106)中的项 $G_{\lambda\alpha}F_{\lambda\alpha,\beta}-F_{\lambda\alpha}G_{\lambda\alpha,\beta}=0$，从而在真空中有 $S_{\lambda\beta,\lambda}^{(e)}=-c^{-1}F_{\beta\alpha}j_\alpha$，这也可由式(2－107)和(2－108)直接得出。

2.5.4 运动坐标系中的电动力学方程

式(2－96)是一种特殊坐标系中的 Lorentz 变换,现在来讨论一般情形的 Lorentz 变换。设运动坐标系 $\tilde{\phi}$,其 $\tilde{x}_1$ 轴和物体的运动方向的速度 $\boldsymbol{v}=v\boldsymbol{n}$ 同向,$\boldsymbol{v}$(或 $\boldsymbol{n}$)和 ϕ 坐标系中 x_i 轴夹角的方向余弦为 n_i。这一普遍情况下的 Lorentz 变换 $\boldsymbol{L}_v$ 为

$$
\bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{L}_v\boldsymbol{x}, \quad \boldsymbol{L}_v^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}_v = \boldsymbol{I}_4
$$

$$
\boldsymbol{L}_v = \begin{bmatrix}
1+\Gamma\beta_1^2 & \Gamma\beta_1\beta_2 & \Gamma\beta_1\beta_3 & \mathrm{i}\beta_1\gamma \\
\Gamma\beta_1\beta_2 & 1+\Gamma\beta_2^2 & \Gamma\beta_2\beta_3 & \mathrm{i}\beta_2\gamma \\
\Gamma\beta_1\beta_3 & \Gamma\beta_2\beta_3 & 1+\Gamma\beta_3^2 & \mathrm{i}\beta_3\gamma \\
-\mathrm{i}\beta_1\gamma & -\mathrm{i}\beta_2\gamma & -\mathrm{i}\beta_3\gamma & \gamma
\end{bmatrix} \tag{2-109}
$$

式中 $\Gamma=(\gamma-1)/\beta^2$, $\beta=|\boldsymbol{\beta}|$, $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{v}/c$, $\beta_j=\beta n_j=v_j/c$。若令上式中的 $\boldsymbol{\beta}$ 沿 x_1 轴方向,则 $\beta=\beta_1$, $\beta_2=\beta_3=0$, $1+\Gamma\beta_1^2=\gamma$, 从而式(2－109)化为(2－96)。

式(2－99)和(2－100)是四维空间中的二阶张量组成的方程,因此按照相对论理论,在 Lorentz 变换下其形式不变,即有

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial\bar{F}_{\beta\alpha}}{\partial\bar{x}_\lambda} + \frac{\partial\bar{F}_{\lambda\beta}}{\partial\bar{x}_\alpha} + \frac{\partial\bar{F}_{\alpha\lambda}}{\partial\bar{x}_\beta} = 0, \quad \frac{\partial\bar{G}_{\alpha\lambda}}{\partial\bar{x}_\lambda} = \bar{j}_\alpha \\
\bar{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{LFL}^{\mathrm{T}}, \quad \bar{\boldsymbol{G}} = \boldsymbol{LGL}^{\mathrm{T}}, \quad \bar{\boldsymbol{j}} = \boldsymbol{Lj}, \quad \bar{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Lx}
\end{gathered}
\tag{2-110}
$$

由上式中的物理量在运动坐标系和不动坐标系中的变换关系,可推出

$$
\begin{aligned}
&\bar{\boldsymbol{E}} = \gamma(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) - (\gamma-1)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}), \quad \bar{\boldsymbol{D}} = \gamma(\boldsymbol{D}+c^{-2}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}) - (\gamma-1)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}) \\
&\bar{\boldsymbol{H}} = \gamma(\boldsymbol{H}-\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{D}) - (\gamma-1)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n}), \quad \bar{\boldsymbol{B}} = \gamma(\boldsymbol{B}-c^{-2}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}) - (\gamma-1)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n}) \\
&\bar{\boldsymbol{J}} = \gamma(\boldsymbol{J}-\boldsymbol{v}\rho_e) + (\gamma-1)[\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J})-\boldsymbol{J}], \; \bar{\rho}_e = \gamma(\rho_e - c^{-2}\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{J})
\end{aligned}
\tag{2-111}
$$

可用下述三个分量的例子来说明上式的正确:

$$\overline{F}_{41} = \mathrm{i}\,\overline{E}_1 = -\mathrm{i}\beta_1\gamma[cB_3A\beta_1\beta_2 - cB_2A\beta_1\beta_3 + E_1\beta_1\gamma] - \mathrm{i}\beta_2\gamma[-cB_3(1+A\beta_1^2) + cB_1A\beta_1\beta_3 + E_2\beta_1\gamma] - \mathrm{i}\beta_3\gamma[cB_2(1+A\beta_1^2) - cB_1A\beta_1\beta_2 + E_3\beta_1\gamma] + \gamma[\mathrm{i}E_1(1+A\beta_1^2) + \mathrm{i}E_2A\beta_1\beta_2 + \mathrm{i}E_3A\beta_1\beta_3] =$$
$$-\mathrm{i}\beta_1\gamma E_1\beta_1\gamma + \mathrm{i}\beta_2\gamma cB_3 - \mathrm{i}\beta_2\gamma E_2\beta_1\gamma - \mathrm{i}\beta_3\gamma cB_2 - \mathrm{i}\beta_3\gamma E_3\beta_1\gamma + \mathrm{i}\gamma E_1 + A[\mathrm{i}E_1\beta_1^2\gamma + \mathrm{i}E_2\beta_1\beta_2\gamma + \mathrm{i}E_3\beta_1\beta_3\gamma]$$

$$\overline{E}_1 = \gamma(E_1 + v_2B_3 - v_3B_2) + \gamma(A-\gamma)\beta_1(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E})$$
$$\overline{\boldsymbol{E}} = \gamma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) + \gamma(A-\gamma)\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{E})$$

$$\overline{F}_{12} = (1+A\beta_1^2)[cB_3(1+A\beta_2^2) - cB_2A\beta_2\beta_3 + E_1\beta_2\gamma] + A\beta_1\beta_2(-cB_3A\beta_1\beta_2 + cB_1A\beta_2\beta_3 + E_2\beta_2\gamma) + A\beta_1\beta_3[cB_2A\beta_1\beta_2 - cB_1(1+A\beta_2^2) + E_3\beta_2\gamma] + \mathrm{i}\beta_1\gamma[\mathrm{i}E_1A\beta_1\beta_2 + \mathrm{i}E_2(1+A\beta_2^2) + \mathrm{i}E_3A\beta_2\beta_3] =$$
$$cB_3 - E_2\beta_1\gamma + E_1\beta_2\gamma + AcB_3(\beta_1^2+\beta_2^2) - Ac\beta_3(B_1\beta_1 + B_2\beta_2) =$$
$$\gamma cB_3 + \gamma(E_1\beta_2 - E_2\beta_1) - Ac\beta_3(B_1\beta_1 + B_2\beta_2 + B_3\beta_3)$$

$$\overline{B}_3 = \gamma[B_3 + c^{-2}(E_1v_2 - E_2v_1)] - (\gamma-1)n_3(B_1n_1 + B_2n_2 + B_3n_3) =$$
$$\gamma[B_3 + c^{-2}(E_1v_2 - E_2v_1)] - (\gamma-1)n_3(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n})$$
$$\overline{\boldsymbol{B}} = \gamma(\boldsymbol{B} - c^{-2}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{E}) - (\gamma-1)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{n})$$

和

$$\overline{J}_1 = (1+A\beta_1^2)J_1 + A\beta_1\beta_2J_2 + A\beta_1\beta_3J_3 - \beta_1\gamma c\rho_e =$$
$$J_1 + A\beta_1(\beta_1J_1 + \beta_2J_2 + \beta_3J_3) - \gamma v_1\rho_e =$$
$$J_1 + A\beta_1(\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{J}) - \gamma v_1\rho_e =$$
$$\gamma J_1 - \gamma v_1\rho_e - (\gamma-1)J_1 + (\gamma-1)n_1(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J})$$
$$\overline{\boldsymbol{J}} = \gamma(\boldsymbol{J} - \boldsymbol{v}\rho_e) + (\gamma-1)[\boldsymbol{n}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{J}) - \boldsymbol{J}]$$

根据形式不变理论，运动坐标系和不动坐标系中的本构关系分别为

$$\overline{\boldsymbol{D}} = \epsilon_0\overline{\boldsymbol{E}} + \overline{\boldsymbol{P}} = \epsilon\overline{\boldsymbol{E}},\quad \overline{\boldsymbol{B}} = \mu_0(\overline{\boldsymbol{H}} + \overline{\boldsymbol{M}}) = \mu\overline{\boldsymbol{H}},\quad \overline{\boldsymbol{J}} = \sigma\overline{\boldsymbol{E}}$$
$$\boldsymbol{D} = \epsilon_0\boldsymbol{E} + \boldsymbol{P} = \epsilon\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{B} = \mu_0(\boldsymbol{H} + \boldsymbol{M}) = \mu\boldsymbol{H},\quad \boldsymbol{J} = \sigma\boldsymbol{E} \tag{2-112}$$

由此得

$$\gamma(\boldsymbol{D} + c^{-2}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}) - (\gamma-1)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}) = \epsilon_0[\gamma(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}) - (\gamma-1)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n})] + \overline{\boldsymbol{P}}$$

由此可推出

$$\overline{\boldsymbol{P}} = \gamma[(\boldsymbol{D} - \epsilon_0\boldsymbol{E}) + \boldsymbol{v}\times(c^{-2}\boldsymbol{H} - \epsilon_0\boldsymbol{B})] - (\gamma-1)[\boldsymbol{n}(\boldsymbol{D} - \epsilon_0\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{n}] =$$
$$\gamma(\boldsymbol{P} - c^{-2}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{M}) - (\gamma-1)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{n}) \tag{2-113}$$
$$\overline{\boldsymbol{M}} = \gamma(\boldsymbol{M} + \boldsymbol{v}\times\boldsymbol{P}) - (\gamma-1)\boldsymbol{n}(\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{n})$$

2.5.5 低速运动下变形介质中的中的电动力学方程

式(2-109)～(2-113)给出了等速惯性坐标系中的运动方程，既可用运动坐标系中的物

理量表示，也可用不动坐标系中的物理量表示。当相对于光速而言，物体的运动速度 v 远低于光速，$|\boldsymbol{v}|\ll c$ 时，略去含 v^2/c^2 的项，电动力学方程仍具有很高的精度。此时有

$$
\begin{aligned}
&\overline{\boldsymbol{D}}=\boldsymbol{D},\quad \overline{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{B},\quad \bar{\rho}_e=\rho_e,\quad \overline{\boldsymbol{P}}=\boldsymbol{P},\quad \overline{\boldsymbol{J}}=\boldsymbol{J}-\boldsymbol{v}\rho_e\\
&\overline{\boldsymbol{E}}=\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B},\quad \overline{\boldsymbol{H}}=\boldsymbol{H}-\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{D},\quad \overline{\boldsymbol{M}}=\boldsymbol{M}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{P}
\end{aligned}
\tag{2-114}
$$

从而在低速运动惯性坐标系中的运动方程近似为

$$
\begin{aligned}
&\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_e && \oint_a\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}=\int_V\rho_e\mathrm{d}V\\
&\nabla\times\overline{\boldsymbol{E}}=-\hat{\boldsymbol{B}} && \oint_c\overline{\boldsymbol{E}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}\\
&\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0 && \int_a\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}=0\\
&\nabla\times\overline{\boldsymbol{H}}=\hat{\boldsymbol{D}}+\overline{\boldsymbol{J}} && \oint_c\overline{\boldsymbol{H}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\int_a\overline{\boldsymbol{J}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}\\
&\nabla\cdot\overline{\boldsymbol{J}}+\frac{\partial\rho_e}{\partial t}+\nabla\cdot(\boldsymbol{v}\rho_e)=0 && \oint_a\overline{\boldsymbol{J}}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{a}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_a\rho_e\mathrm{d}V=0
\end{aligned}
\tag{2-115}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{B}}&=\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}+\nabla\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{v})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})-(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\\
\hat{\boldsymbol{D}}&=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}+\nabla\times(\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{v})+\rho_e\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{D}}{\mathrm{d}t}+\boldsymbol{D}(\nabla\cdot\boldsymbol{v})-(\boldsymbol{D}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}
\end{aligned}
\tag{2-116}
$$

推导上式的过程中，已使用了 $\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho_e$，$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$。上述公式也可应用到介质有限变形的情况。在变形介质中，上式中的 $\hat{\boldsymbol{B}}$，$\hat{\boldsymbol{D}}$ 正是在随介质一起变形的随体坐标系中 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{D}$ 的随体导数。

同样可推出，边界条件(2-49)和(2-50)不变，而式(2-51)和(2-52)相应地变为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{n}\times(\overline{\boldsymbol{H}}_2-\overline{\boldsymbol{H}}_1)&=\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)+(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)=\overline{\boldsymbol{J}}_{\text{ext}}\\
\boldsymbol{n}\times(\overline{\boldsymbol{E}}_2-\overline{\boldsymbol{E}}_1)&=\boldsymbol{n}\times(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)-(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{v})(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)=-\nabla(\bar{\pi}_s/\varepsilon)
\end{aligned}
\tag{2-117}
$$

式(2-104)、(2-107)和(2-108)中的诸量分别为

$$
\bar{\boldsymbol{g}}^{\mathrm{M}}=\boldsymbol{g}^{\mathrm{M}}=\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{B},\quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{M}}=(\boldsymbol{D}\otimes\overline{\boldsymbol{E}}+\boldsymbol{B}\otimes\overline{\boldsymbol{H}})-\frac{1}{2}(\overline{\boldsymbol{E}}\cdot\boldsymbol{D}+\overline{\boldsymbol{H}}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{I}
$$

$$
\bar{\boldsymbol{f}}^{\mathrm{M}}=\rho_e\overline{\boldsymbol{E}}+\overline{\boldsymbol{J}}\times\boldsymbol{B}-\frac{1}{2}[(\nabla\otimes\boldsymbol{D})\cdot\overline{\boldsymbol{E}}-(\nabla\otimes\overline{\boldsymbol{E}})\cdot\boldsymbol{D}]-\frac{1}{2}[(\nabla\otimes\boldsymbol{B})\cdot\overline{\boldsymbol{H}}](\nabla\otimes\overline{\boldsymbol{H}}\cdot\boldsymbol{B}]
\tag{2-118}
$$

2.5.6 低速运动下变形介质中的中的总能量动量张量

略去含 v^2/c^2 的项，机械系统的相对论力学和 Newton 力学是一致的。对于这种低速运动情形，不考虑温度效应时，动量和能量方程可以写成

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \boldsymbol{v}) + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{f}$$

$$\frac{\partial \mathscr{U}}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{v} \otimes \mathscr{U} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{v}) = \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} + \dot{\mathscr{A}} \tag{2-119}$$

$$\mathscr{U} = (\rho \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} + u)/2$$

式中 $\mathscr{U}$ 为单位体积的总能量，u 为单位体积的机械内能，$\mathscr{A}$ 为除机械源外的其他能量源。$\rho \boldsymbol{v}$ 为动量，$(\rho \boldsymbol{v} \otimes \boldsymbol{v} - \boldsymbol{\sigma})$ 为动量流，$(\boldsymbol{v} \otimes \mathscr{U} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{v})$ 为能量流。利用质量守恒方程，见第 3 章式(3-8)，$\partial\rho/\partial t + \nabla \cdot (\rho v) = 0$ 和速度全导数的表达式 $dv/dt = \partial v/\partial t + v_k v_{,k}$，上式易于化到通常的形式。式(2-119)可以组成四维空间的机械能量动量张量 $\boldsymbol{S}^{(m)}$ 的方程

$$S^{(m)}_{\alpha\beta,\alpha} = f^{(m)}_{\beta}, \quad -icf^{(m)}_{4} = \dot{\mathscr{A}} + f_n v_n$$

$$\boldsymbol{S}^{(m)} = [S^{(m)}_{\alpha\beta}] = \begin{bmatrix} \rho v_j v_k - \sigma_{kj} & ic^{-1}(\mathscr{U} v_k - \sigma_{kn} v_n) \\ ic\rho v_j & -\mathscr{U} \end{bmatrix}, \quad [f^{(m)}_{\beta}] = \begin{Bmatrix} f^{(m)}_j \\ ic^{-1}(\dot{\mathscr{A}} + f^{(m)}_n v_n) \end{Bmatrix} \tag{2-120}$$

为了研究电磁场和物质的相互作用，现讨论由物质和电磁场共同组成的物理系统，如不计热效应，则此物理系统可以看成由机械和电磁两个独立的子系统组成(如果存在热或其他的效应，便需要增加新的子系统)，从而总能量动量张量为两个独立子系统的能量动量张量的叠加，即

$$S_{\alpha\beta} = S^{(m)}_{\alpha\beta} + S^{(e)}_{\alpha\beta} \tag{2-121}$$

如果总系统的总能量动量张量守恒，那么称此系统是保守系统，否则为非保守系统。如果 $f^{(m)}_{\beta} \neq 0$ 且是非有势的，则系统是非保守的。总系统的动量和能量方程可以写成

$$S_{\alpha\beta,\alpha} = S^{(m)}_{\alpha\beta,\alpha} + S^{(e)}_{\alpha\beta,\alpha} = f^{(m)}_{\beta}$$

或

$$(\rho v_j v_k - \sigma_{kj})_{,k} + ic\rho v_{j,4} - \sigma^{M}_{kj,k} + icg_{j,4} = f^{(m)}_j \tag{2-122a}$$

$$ic^{-1}(\mathscr{U} v_k - \sigma_{kn} v_n)_{,k} - \mathscr{U}_{,4} + ic^{-1} S_{k,k} - W_{,4} = f^{(m)}_4$$

上式还可写成

$$\begin{aligned} (\sigma_{kj} + \sigma^{M}_{kj})_{,k} - g_{j,t} + f^{(m)}_j &= d(\rho v_j)/dt + [\rho v_j v_{k,k}] \\ d\mathscr{U}/dt + [\mathscr{U} v_{k,k}] + S_{k,k} + W_{,t} &= \sigma_{kn} v_{n,k} + \sigma_{kn,k} v_n - icf^{(m)}_4 \end{aligned} \tag{2-122b}$$

上式括弧中的项是和体积改变相关的小量，可以略去。利用式(2-108)，上式又可写成

$$\sigma_{kj,k} + f^{(e)}_j + f^{(m)}_j = d(\rho v_j)/dt$$

$$\frac{du}{dt} = \sigma_{kj} v_{j,k} + f^{(m)}_j v_j - f^{(e)}_j v_j + \dot{\mathscr{A}} + \boldsymbol{J} \cdot \boldsymbol{E} + \frac{1}{2}(\boldsymbol{D}_{,t} \cdot \boldsymbol{E} - \boldsymbol{E}_{,t} \cdot \boldsymbol{D} + \boldsymbol{B}_{,t} \cdot \boldsymbol{H} - \boldsymbol{H}_{,t} \cdot \boldsymbol{B}) \tag{2-123}$$

式(2-122)和(2-123)中的头三式是动量方程的不同表现形式。对比这两组方程可知，Maxwell 应力虽称应力，但实际是电磁力的表现，或许改称 Maxwell 外应力较好。

对于保守系统，由动量矩守恒可得

$$(x_i S_{kj} - x_j S_{ki})_{,k} = 0, \text{或 } S_{ij} = S_{ji}; \quad S_{jk} = \rho v_j v_k - \sigma_{jk} - \sigma^{M}_{jk} \tag{2-124}$$

由上式推得

$$\sigma_{jk}+\sigma_{jk}^{M}=\sigma_{kj}+\sigma_{kj}^{M} \tag{2-125}$$

即 Cauchy 应力和 Maxwell 应力之和是对称的，而

$$\sigma_{jk}-\sigma_{kj}=\sigma_{kj}^{M}-\sigma_{jk}^{M}=-2\eta_{jk}$$
$$\eta_{jk}=\frac{1}{2}(D_jE_k-D_kE_j)+\frac{1}{2}(B_jH_k-H_kB_j) \tag{2-126}$$

由此推得体积力偶为

$$C_i=\epsilon_{ijk}\eta_{jk},\quad \boldsymbol{C}=\boldsymbol{D}\times\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{E}+\mu_0\boldsymbol{M}\times\boldsymbol{H} \tag{2-127}$$

2.6 电磁场的微观理论[4, 19]

2.6.1 复合粒子产生的微观电磁场

本节仅对微观理论做一简单介绍，详细内容可参阅有关书籍。设电磁介质由复合粒子组成，而每个复合粒子由若干个带电粒子组成。第 k 个复合粒子的质心 O_k 到坐标原点 O 的位置矢量为 $\boldsymbol{r}_k$，其中带有电量 q_{ki} 的第 i 个电子到 O 点的位置矢量为 $\boldsymbol{r}_{ki}$，到 O_k 点的内部位置矢量为 $\boldsymbol{\xi}_{ki}$，$\boldsymbol{r}_{ki}=\boldsymbol{r}_k+\boldsymbol{\xi}_{ki}$，设观察点到 O 点的位置矢量为 $\boldsymbol{x}$。现在来讨论所有复合粒子在观察点所产生的电磁场(图 2 - 12)。这一 Lorentz 模型的基本假设是，复合粒子在观察点所产生的微观电磁场量 $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{b}$ 可用自由空间中的 Maxwell 方程来描写，即

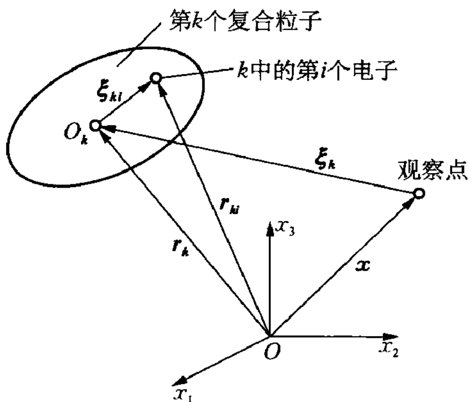


图 2 - 12 复合粒子产生的微观电磁场的 Lorentz 模型

$$\begin{gathered}
\nabla\cdot\boldsymbol{b}=0,\quad \nabla\times\boldsymbol{e}+\frac{\partial\boldsymbol{b}}{\partial t}=\boldsymbol{0}\\
\epsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{e}=\sum_k\sum_i q_{ki}\delta(\boldsymbol{r}_{ki}-\boldsymbol{x})\\
\mu_0^{-1}\nabla\times\boldsymbol{b}-\epsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{e}}{\partial t}=\sum_k\sum_i q_{ki}\dot{\boldsymbol{r}}_{ki}\delta(\boldsymbol{r}_{ki}-\boldsymbol{x})\\
\dot{\boldsymbol{r}}_{ki}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_{ki}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\boldsymbol{r}_{ki}}{\partial t}
\end{gathered} \tag{2-128}$$

式中 $q_{ki}\dot{\boldsymbol{r}}_{ki}$ 是第 k 个复合粒子中的第 i 个带电粒子产生的徙动电流。当观察点位于复合粒子之外，且 $|\boldsymbol{\xi}_{ki}|\ll|\boldsymbol{\xi}_k|=|\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{x}|$ 时，δ 函数可展成内部位置矢量 $\boldsymbol{\xi}_{ki}$ 的幂级数

$$\delta(\boldsymbol{r}_{ki}-\boldsymbol{x})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}(\boldsymbol{\xi}_{ki}\cdot\nabla_k)^n\delta(\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{x}),\ \nabla_k=\partial/\partial\boldsymbol{r}_k \tag{2-129}$$

把上式代入式(2 - 128)可得

$$\nabla \cdot \boldsymbol{b} = 0, \quad \nabla \times \boldsymbol{e} + \frac{\partial \boldsymbol{b}}{\partial t} = \boldsymbol{0}$$

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{e} = \rho_q - \nabla \cdot \boldsymbol{p}, \quad \mu_0^{-1} \nabla \times \boldsymbol{b} - \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial t} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial t} + \nabla \times \boldsymbol{m} \tag{2-130}$$

精确到 ξ_{ki} 量级，上式中的诸量为

$$\rho_q = \sum_k q_k \delta(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{p} = \sum_k \boldsymbol{p}_k \delta(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{x})$$

$$\boldsymbol{j} = \sum_k q_k v_k \delta(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{m} = \sum_k (\boldsymbol{p}_k \times \boldsymbol{v}_k + \boldsymbol{m}_k) \delta(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{x}) \tag{2-131}$$

式中

$$\boldsymbol{v}_k = \dot{\boldsymbol{r}}_k, \quad q_k = \sum_i q_{ki}, \quad \boldsymbol{p}_k = \sum_i q_{ki} \xi_{ki}, \quad \boldsymbol{m}_k = \frac{1}{2} \sum_i q_{ki} \xi_{ki} \dot{\xi}_{ki} \tag{2-132}$$

分别代表第 k 个复合粒子的质心速度和其中的总电荷、电偶极矩和磁矩。推导式(2－130)时，使用了下列公式：

$$\boldsymbol{m}_k \cdot \nabla_k \delta(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{x}) = - \boldsymbol{m}_k \cdot \nabla \delta(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{x}) = - \nabla [\boldsymbol{m}_k \delta(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{x})], \ \nabla \cong \partial / \partial \boldsymbol{x}$$

同时在推导 $\partial \boldsymbol{p} / \partial t$ 时保留 $\boldsymbol{p}$ 中含 ξ_{ki} 的二阶项，以便求导后保留形如 $\xi_{ki}\dot{\xi}_{ki}$ 的项，即取用

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \sum_i q_{ki} \left[\xi_{ki} \delta(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{x}) + \frac{1}{2} \xi_{ki} (\xi_{ki} \cdot \nabla) \delta(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{x}) \right] \right\}$$

如所有接近 $\boldsymbol{x}$ 的粒子都具有相同的速度 $\boldsymbol{v}$，即 $\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{v}$，则有

$$\boldsymbol{m} = \sum_k (\boldsymbol{p}_k \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{m}_k) \delta(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{p} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{m}^{\mathrm{L}}, \ \boldsymbol{m}^{\mathrm{L}} = \sum_k \boldsymbol{m}_k \delta(\boldsymbol{r}_k - \boldsymbol{x})$$

$$\mu_0^{-1} \nabla \times \boldsymbol{b} - \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial t} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial t} + \nabla \times (\boldsymbol{p} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{m}^{\mathrm{L}}) \tag{2-133}$$

2.6.2 复合粒子产生的微观电磁场力

设复合粒子在外加电磁场 $\boldsymbol{E}_0$ 和 $\boldsymbol{B}_0$ 中运动，并设外加电磁场满足自由空间的 Maxwell 方程，即有

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}_0 = 0, \quad \nabla \times \boldsymbol{E}_0 + \frac{\partial \boldsymbol{B}_0}{\partial t} = \boldsymbol{0}$$

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \boldsymbol{E}_0 = 0, \quad \mu_0^{1} \nabla \times \boldsymbol{B}_0 - \epsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}_0}{\partial t} = \boldsymbol{0} \tag{2-134}$$

位于 $\boldsymbol{r}_{lj}$ 带有电荷 q_{lj} 的单个带电粒子在 $\boldsymbol{x}$ 处产生的电磁场 $\boldsymbol{e}_{lj}$ 和 $\boldsymbol{b}_{lj}$ 可由式(2－128)解得

$$\boldsymbol{e}_{lj}(\boldsymbol{x}) = - \nabla \left(\frac{q_{lj}}{4\pi\epsilon_0 |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}_{lj}|} \right), \quad \boldsymbol{b}_{lj}(\boldsymbol{x}) = \nabla \times \left(\frac{q_{lj} \dot{\boldsymbol{r}}_{lj}}{4\pi\epsilon_0 c^2 |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{r}_{lj}|} \right) \tag{2-135}$$

因此，第 k 个复合粒子中的第 i 个带电粒子到 O 点的位置矢量为 $\boldsymbol{r}_{ki}$，该处的总电磁场为

$$e_t(\boldsymbol{r}_{ki})=\sum_{j\neq i}\boldsymbol{e}_{kj}(\boldsymbol{r}_{ki})+\sum_{l\neq k}\sum_{j}\boldsymbol{e}_{lj}(\boldsymbol{r}_{ki})+\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}_{ki})$$
$$\boldsymbol{b}_t(\boldsymbol{r}_{ki})=\sum_{j\neq i}\boldsymbol{b}_{kj}(\boldsymbol{r}_{ki})+\sum_{l\neq k}\sum_{j}\boldsymbol{b}_{lj}(\boldsymbol{r}_{ki})+\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r}_{ki}) \tag{2-136}$$

上式中的右边第一项是第 k 个复合粒子内部带电粒子产生的，第二项是复合粒子相互间作用产生的。因为复合粒子内部全部粒子产生的合力为零，而 $\dot{\boldsymbol{r}}_{ki}\times\boldsymbol{b}_{lj}(\boldsymbol{r}_{ki})$ 与 $|\dot{\boldsymbol{r}}_{ki}|^2/c$ 同一量级，故可略去，从而作用在第 k 个复合粒子上的总力为

$$\boldsymbol{f}_k=\sum_i\boldsymbol{f}_{ki}=\sum_i q_{ki}[\boldsymbol{e}_t(\boldsymbol{r}_{ki})+\dot{\boldsymbol{r}}_{ki}\times\boldsymbol{b}_t(\boldsymbol{r}_{ki})]=$$
$$\sum_i q_{ki}\Big[\sum_{l\neq k}\sum_j\boldsymbol{e}_{lj}(\boldsymbol{r}_{ki})+\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}_{ki})+\dot{\boldsymbol{r}}_{ki}\times\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r}_{ki})\Big] \tag{2-137}$$

上式中等式右边的第一项是复合粒子间的相互间作用力，第二和第三项表示外加电磁场的作用力。因为 $\boldsymbol{r}_{ki}=\boldsymbol{r}_k+\boldsymbol{\xi}_{ki}$，$|\boldsymbol{\xi}_{ki}|\ll|\boldsymbol{r}_k|$，所以外加电磁场引起的作用力可展成 $\boldsymbol{\xi}_{ki}$ 的幂级数；当 $|\boldsymbol{\xi}_{ki}|$，$|\boldsymbol{\xi}_{lj}|\ll|\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{r}_l|$ 时，复合粒子间的相互间作用力也可展成 $\boldsymbol{\xi}_{ki}$ 的幂级数。这两部分构成长程作用力 $\boldsymbol{f}_k^{(l)}$，剩下的部分构成短程作用力 $\boldsymbol{f}_k^{(s)}$。我们有

$$\rho_k\ddot{\boldsymbol{r}}_k=\boldsymbol{f}_k=\boldsymbol{f}_k^{(l)}+\boldsymbol{f}_k^{(s)}$$
$$\boldsymbol{f}_k^{(l)}=(q_k+\boldsymbol{p}_k\cdot\nabla_k)[\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}_k)+\dot{\boldsymbol{r}}_k\times\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r}_k)]+(\dot{\boldsymbol{p}}_k+\boldsymbol{m}_k\times\nabla_k)\times\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r}_k)+\boldsymbol{f}'_k=$$
$$q_k(\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{v}_k\times\boldsymbol{B}_0)+(\nabla_k\otimes\boldsymbol{E}_0)\boldsymbol{p}_k+(\nabla_k\otimes\boldsymbol{B}_0)(\boldsymbol{m}_k+\boldsymbol{p}_k\times\boldsymbol{v}_k)+$$
$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)(\boldsymbol{p}_k\times\boldsymbol{B}_0)+\boldsymbol{f}'_k \tag{2-138}$$
$$\boldsymbol{f}_k^{(s)}=\sum_{l\neq k}\sum_i\sum_j q_{ki}\boldsymbol{e}_{lj}(\boldsymbol{r}_{ki})-\boldsymbol{f}'_k$$
$$\boldsymbol{f}'_k=\sum_{l\neq k}(q_kq_l+q_l\boldsymbol{p}_k\cdot\nabla_k+q_k\boldsymbol{p}_l\cdot\nabla_l)\nabla_k(4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{r}_l|)^{-1}$$

式中 $\rho_k=\sum_i\rho_{ki}$，$\rho_k\ddot{\boldsymbol{r}}_k=\sum_i\rho_{ki}\ddot{\boldsymbol{r}}_{ki}$ 分别为第 k 个粒子的电子总质量和总动量。类似地，作用在第 k 个复合粒子上的力偶为

$$\boldsymbol{C}_k=\sum_i\boldsymbol{C}_{ki}=\sum_i\boldsymbol{\xi}_{ki}\times\boldsymbol{f}_{ki}=\boldsymbol{C}_k^{(l)}+\boldsymbol{C}_k^{(s)}$$
$$\boldsymbol{C}_k^{(l)}=\boldsymbol{p}_k\times[\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}_k)+\boldsymbol{v}_k\times\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r}_k)]+\boldsymbol{m}_k\times\boldsymbol{B}_0(\boldsymbol{r}_k)+\boldsymbol{C}'_k$$
$$\boldsymbol{C}_k^{(s)}=\sum_{l\neq k}\sum_i\sum_j\boldsymbol{\xi}_{ki}\times q_{ki}\boldsymbol{e}_{lj}-\boldsymbol{C}'_k$$
$$\boldsymbol{C}'_k=-\sum_{l\neq k}\sum_i\sum_j\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{n!m!}\boldsymbol{\xi}_{ki}\times\left[(\boldsymbol{\xi}_{ki}\cdot\nabla_k)^n(\boldsymbol{\xi}_{lj}\cdot\nabla_l)^m\nabla_k\frac{q_{ki}q_{lj}}{4\pi\epsilon_0|\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{r}_l|}\right]\right\} \tag{2-139}$$

作用在第 k 个复合粒子上的电磁力产生的功率为

$$\dot{W}_k=\sum_i\boldsymbol{v}_{ki}\cdot\boldsymbol{f}_{ki}=\sum_i q_{ki}\boldsymbol{v}_{ki}\cdot[\boldsymbol{e}_t(\boldsymbol{r}_{ki})+\boldsymbol{v}_{ki}\times\boldsymbol{b}_t(\boldsymbol{r}_{ki})]=$$
$$\sum_i q_{ki}\boldsymbol{v}_{ki}\cdot\Big[\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}_{ki})+\sum_{l\neq k}\sum_j\boldsymbol{e}_{lj}(\boldsymbol{r}_{ki})\Big] \tag{2-140}$$

推导上式时已应用了 $\boldsymbol{v}_{ki}\cdot(\boldsymbol{v}_{ki}\times\boldsymbol{b}_t)=0$，表示磁场作用在运动电荷上的力垂直于运动方向，故

而不做功。等式右边第一项表示外加电磁场产生的功率，第二项表示复合粒子内部电场产生的功率。

2.6.3 电磁场的统计平均理论

利用统计平均方法，由上面的微观理论可以导出介质地宏观理论。在统计力学中，任一微观量 φ 的统计平均量 Φ 为

$$\Phi(\boldsymbol{x},\ t)=\langle\varphi\rangle=\int_{\tau}\varphi(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{r})f(t;\ \boldsymbol{r})\mathrm{d}\boldsymbol{\tau} \tag{2-141}$$

式中 f 是 φ 的概率分布密度，由于运动方程涉及到不同位置的两个粒子，所以 f 是两点分布函数；$\boldsymbol{\tau}$ 表示广义动量空间($\boldsymbol{r}_k$，$\dot{\boldsymbol{r}}_k$，$\boldsymbol{\xi}_{ki}$，$\dot{\boldsymbol{\xi}}_{ki}$)，可以认为广义动量空间是相空间的推广，相空间仅由位置矢量和经典动量构成，而广义动量空间的微元是 $\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}=\mathrm{d}\boldsymbol{r}_k\mathrm{d}\,\dot{\boldsymbol{r}}_k\prod\mathrm{d}\boldsymbol{\xi}_{ki}\mathrm{d}\,\dot{\boldsymbol{\xi}}_{ki}$。$f\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}$ 是在广义动量空间微元 $\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}$ 中找到 φ 的概率。对跟随广义动量空间的点一起运动的观察者而言，$f\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}$ 是不随时间变化的，故有

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\varphi\rangle=\frac{\partial}{\partial t}\int\varphi f\,\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}=\int\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}f\,\mathrm{d}\boldsymbol{\tau}=\left\langle\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right\rangle \tag{2-142}$$

即微分和平均符号可以交换次序。又设 f 不依赖于 $\boldsymbol{x}$，则有

$$\nabla\langle\varphi\rangle=\langle\nabla\varphi\rangle,\ \nabla\triangleq\partial/\partial\boldsymbol{x} \tag{2-143}$$

令电磁场的宏观量为微观量的统计平均值，则得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{E}=\langle\boldsymbol{e}\rangle,\quad \boldsymbol{B}=\langle\boldsymbol{b}\rangle,\quad \boldsymbol{H}=\langle\boldsymbol{h}\rangle,\quad \boldsymbol{D}=\langle\boldsymbol{d}\rangle\\&\boldsymbol{P}=\langle\boldsymbol{p}\rangle,\quad \boldsymbol{M}=\langle\boldsymbol{m}\rangle,\quad \boldsymbol{J}=\langle\boldsymbol{j}\rangle,\quad \rho_e=\langle\rho_q\rangle\end{aligned} \tag{2-144}$$

应用上面诸式，并由式(2-130)，可得

$$\begin{aligned}&\epsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho_e-\nabla\cdot\boldsymbol{p},\quad \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\\&\mu_0^{-1}\nabla\times\boldsymbol{B}-\epsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t}+\nabla\times\boldsymbol{M}\end{aligned} \tag{2-145}$$

若令 $\boldsymbol{D}=\epsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{B}=\mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M})$，上式就是 Maxwell 方程组(2-32)。若用式(2-133)的最后一式代替(2-130)中的第四式，则式(2-145)中的第四式变为

$$\mu_0^{-1}\nabla\times\boldsymbol{B}-\epsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{P}}{\partial t}+\nabla\times\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{v}+\nabla\times\boldsymbol{M}^{\mathrm{L}},\ \boldsymbol{M}^{\mathrm{L}}=\langle\boldsymbol{m}^{\mathrm{L}}\rangle \tag{2-146}$$

2.6.4 质量和动量的统计平均理论

设介质的宏观质量密度为 $\rho(\boldsymbol{x},\ t)$，质心速度为 $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\ t)$，局部脉动速度为 $\tilde{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{v}_k-\boldsymbol{v}$，按统计平均理论有

$$\rho=\left\langle\sum_k\rho_k\delta(\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{x})\right\rangle,\quad \rho\boldsymbol{v}=\left\langle\sum_k\rho_k\boldsymbol{v}_k\delta(\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{x})\right\rangle \tag{2-147}$$

利用 $\langle\rho\tilde{\boldsymbol{v}}\rangle=0$ 和

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\delta(\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{x})=\dot{\boldsymbol{r}}_k\nabla_k\delta(\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{x})=-\nabla[\boldsymbol{v}_k\delta(\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{x})]$$

由式(2-147)、(2-142)和(2-143),可得质量守恒方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\nabla[\boldsymbol{v}_k\delta(\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{x})]=-\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) \tag{2-148}$$

和动量方程

$$\begin{gathered}\frac{\partial\rho\boldsymbol{v}}{\partial t}=-\nabla\Big[\sum_k\rho_k\boldsymbol{v}_k\otimes\boldsymbol{v}_k\delta(\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{x})\Big]+\sum_k\rho_k\dot{\boldsymbol{v}}_k\delta(\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{x})=\\-\nabla(\rho\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{v}+\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{k})})+\rho\boldsymbol{f}^{(\mathrm{l})}+\rho\boldsymbol{f}^{(\mathrm{s})}\\\rho\boldsymbol{f}^{(\mathrm{l})}=\sum_k\boldsymbol{f}_k^{(\mathrm{l})}\delta(\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{x}),\quad\rho\boldsymbol{f}^{(\mathrm{s})}=\sum_k\boldsymbol{f}_k^{(\mathrm{s})}\delta(\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{x}),\quad\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{k})}=\sum_k\rho_k\tilde{\boldsymbol{v}}_k\otimes\tilde{\boldsymbol{v}}_k\delta(\boldsymbol{r}_k-\boldsymbol{x})\end{gathered} \tag{2-149}$$

利用前面的公式和繁冗的推导,式(2-149)中的动量方程可化为

$$\begin{gathered}\rho\boldsymbol{f}^{(\mathrm{e})}=\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{e})}-\epsilon_0\,\partial(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B})/\partial t\\\boldsymbol{\sigma}^{(\mathrm{e})}=(\boldsymbol{D}\otimes\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{H})+\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{B}-\frac{1}{2}(\epsilon_0\boldsymbol{E}^2+\mu_0^{-1}B^2-2\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{I}\end{gathered} \tag{2-150}$$

上式和式(2-84)是类似的。其他关于能量密度和偶应力等可类似地讨论。

第3章

电弹性的基本理论与等温变分原理

3.1 经典热力学与物理变分原理[4, 23~25]

3.1.1 基本概念

研究热力学问题时，通常把被研究的若干物体称为系统，系统周围物体形成的集合称为环境。称系统和环境之间没有物质和能量交换的系统为孤立系统；如只有能量交换而无物质交换，则称为封闭系统；如既有能量交换又有物质交换，则称为开放系统。如系统和环境之间没有热量交换则称为绝热系统。描写系统所处状态的参数称为状态参数，如密度 ρ，比容 $1/\rho$，温度 T，比熵 s，应力 $\boldsymbol{\sigma}$，应变 $\boldsymbol{\varepsilon}$，电场强度 $\boldsymbol{E}$，电位移 $\boldsymbol{D}$ 等。如系统内各点的状态参数都相同，则称为均匀系统，否则为非为均匀系统；如状态参数不随时间变化，则称为平衡系统。如状态参数随时间变化，则这些变化状态的总和称为过程。经典热力学研究均匀系统的平衡和准静态过程，所谓准静态过程是指无限缓慢的过程，其中的每一步都是平衡的，因而也是可逆的。本书中还研究偏离平衡态不远的非平衡系统。系统中可用作状态参数的量很多，但不都是独立的，它们之间存在一些关系，服从一些方程，这些方程在热力学中称为状态方程，而在力学中称为本构方程。如把每一个独立的状态参数看成是一个坐标，独立状态参数的全体便形成一个状态空间，物体的一种状态可用状态空间的一个代表点表示，代表点在状态空间的运动形成的一条曲线，便代表一个过程。

3.1.2 经典热力学基本定律

热力学第一定律：对均匀系统的准静态过程，环境对系统所做的功 W 和供给系统的热量 Q 之和等于系统内能 U 的增加，其中内能是一个状态函数，即

$$U - U_0 = W + Q \tag{3-1}$$

式中 U_0 是一个参考值，无实质性作用。或写成微分形式

$$\mathrm{d}U = \mathrm{d}W + \mathrm{d}Q \tag{3-2}$$

热力学第一定律是能量守恒定律，对于可逆和不可逆过程都同样成立。它首先由 Joule（焦耳）的实验所证实，从未为地球上的任何过程所违背。上式中 W 和 Q 一般不是状态函数。

热力学第二定律：热力学第二定律是说明自然过程进行方向的定律，它有多种说法，其中 Clausius（克劳休斯）的说法是：热不能自动由低温传到高温。由此可推出 Caratheodory（卡若希奥道热）的说法：对任一给定平衡态的附近，总存在这样的态，它不能由其他的平衡态经绝热过程达到。由这一说法可推出温度 T 和另一个态函数熵 S 的存在，且存在关系

$$dQ = TdS \tag{3-3}$$

把经典热力学推广到连续电介质时,电介质中的电弹性过程一般是非均匀的且存在运动。对于动态过程,把介质无限细分,每一微元体有它自己的内能和动能,整个物体的内能和动能可由各微元体的内能和动能叠加得到,谓之总能量。我们设想过程是无限缓慢进行的,每一步都是平衡的。对于非均匀系统,需要采用单位体积的内能 u 和熵 s。在电弹性分析中,u 是应变 $\boldsymbol{\varepsilon}$、电位移 $\boldsymbol{D}$ 和熵 s 的函数。对于可逆过程的单元体有

$$du = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + E_i dD_i + Tds \tag{3-4}$$

因为 u 是状态函数,所以由式(3-4)可以推出

$$\sigma_{ij} = \partial u/\partial\varepsilon_{ij}, \quad E_i = \partial u/\partial D_i, \quad T = \partial u/\partial s \tag{3-5}$$

3.1.3 物理变分原理[26, 27, 29, 30]

我们进一步提出式(3-2)还包含另一种自然规律,即

$$\delta\Pi = \delta U - \delta W(\text{含惯性力所做的功}) - \delta Q = 0 \tag{3-6}$$

式中 δ 表示变分;但对动态过程,和真实过程的能量原理不同的是,要按 D'Alembert(达朗贝尔)原理引进的惯性力,且把惯性力和外力算在一起,而不是把动能和内能算在一起;也可以这样认为,D'Alembert 原理恰好适应了物理变分原理的需要。上式表示在所有可能的虚过程中,真实的过程取极值,稳定过程取极小值,其他的任何过程都会使上式大于零,否则便违背了热力学第一定律。式(3-6)是物理学中一切变分原理的物理基础,或称为物理变分原理。

按照这一原理,只要列出 δU, δW(含惯性力),δQ 的表达式,便自动得到了变分公式,无需另找变分泛函。因此热力学第一定律包含了两个原理,一个是能量守恒原理,其中包含动能,即能量原理中包含的都是和能量相关的量;另一个是物理变分原理,它代表动量原理,其中包含惯性力,即变分原理中包含的都是和力和位移相关的量。

3.1.4 热力学特性函数

由式(3-5)知,知道了 u,则系统的状态(σ_{ij}, E_i, T)便完全确定。通常称某一热力学函数为特性函数,是指只要知道了它,均匀系统的平衡性质便完全确定,内能 u 便是特性函数。u 是以(ε_{ij}, D_i, s)为自变量,实际上从三组变量(σ_{ij}, ε_{ij}),(E_i, D_i),(T, s)中的每一组中选取一个做自变量,都可以构成特性函数,因而可以构造 8 个特性函数,它们是

$$\begin{aligned}
&\text{内能 } u && du = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + E_i dD_i + Tds \\
&\text{自由能 } f && f = u - Ts, \quad df = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + E_i dD_i - sdT \\
&\text{吉布斯函数 } G && g^g = f - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - E_i D_i, \quad dg^g = -\varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} - D_i dE_i - sdT \\
&\text{电吉布斯函数 } g && g = f - E_i D_i, \quad dg = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} - D_i dE_i - sdT \\
&\text{弹性吉布斯函数 } g^{el} && g^{el} = f - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}, \quad dg^{el} = -\varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} + E_i dD_i - sdT \\
&\text{热焓 } h && h = u - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - E_i D_i, \quad dh = -\varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} - D_i dE_i + Tds \\
&\text{电焓 } h^e && h^e = u - E_i D_i, \quad dh^e = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} - D_i dE_i + Tds
\end{aligned} \tag{3-7}$$

弹性焓 h^{el} $\qquad h^{el}=u-\sigma_{ij}\varepsilon_{ij},\quad \mathrm{d}h^{el}=-\varepsilon_{ij}\mathrm{d}\sigma_{ij}+E_i\mathrm{d}D_i+T\mathrm{d}s$

本书中主要取用内能 $u(\varepsilon_{ij}, D_i, T)$ 和电 Gibbs(吉布斯)函数(或电 Gibbs 自由能)$g(\varepsilon_{ij}, E_i, T)$,特别是电 Gibbs 函数在使用中更为方便。由式(3-7)看出,对于等温可逆过程,内能和自由能是相同的,Gibbs 函数和热焓是相同的,电 Gibbs 函数和电焓是相同的。

3.2 电弹性力学普适方程

3.2.1 普适基本方程

普适基本方程是所有连续介质动力学都必须服从的基本规律,现在来讨论在机械、电和热学联合作用下的变形固体电介质中的部分普适基本方程。

1) *质量守恒方程*

$$\partial\rho/\partial t+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=\dot{\rho}+\rho\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0,\quad \dot{\rho}+\rho v_{k,k}=0,\ \dot{\rho}=\partial\rho/\partial t+v_k\rho_{,k} \tag{3-8}$$

2) *动量方程*

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+(\boldsymbol{f}^{m}+\boldsymbol{f}^{e})=\rho\dot{\boldsymbol{v}},\quad \sigma_{ij,i}+(f_j^{m}+f_j^{e})=\rho\dot{v}_j \tag{3-9}$$

式中 $\boldsymbol{f}^{m}$, $\boldsymbol{f}^{e}$ 分别为单位体积的机械和电体积力。

3) *动量矩平衡方程*

$$\boldsymbol{e}:\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{C}^{e}=0,\quad e_{kij}\sigma_{ij}+C_k^{e}=0 \tag{3-10}$$

式中 $\boldsymbol{C}^{e}$ 为单位体积的体积力偶密度。按式(2-86),$\boldsymbol{C}^{e}=\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{E}$。由式(3-10)推知,应力的不对称部分是由电场引起的二级效应。记 $\boldsymbol{\sigma}$ 的对称部分为 $\boldsymbol{\sigma}^{s}$,不对称部分为 $\boldsymbol{\sigma}^{a}$,则有

$$\sigma_{kl}=\sigma_{kl}^{s}+\sigma_{kl}^{a},\ \sigma_{lk}^{s}=\frac{1}{2}(\sigma_{kl}+\sigma_{lk}),\ \sigma_{kl}^{a}=\frac{1}{2}(\sigma_{kl}-\sigma_{lk})=\frac{1}{2}(E_kP_l-E_lP_k) \tag{3-11}$$

3.2.2 经典连续介质热力学[4, 23~25]

1) *连续介质热力学第一定律(能量守恒方程)*

在连续介质热力学中,物体是可以运动的,所以在式(3-2)中要加入动能一项,从而能量守恒的一般表达式为

$$\dot{U}+\dot{K}=\dot{W}+\dot{Q} \tag{3-12}$$

式中 $\dot{U}$ 为物体的内能变化率,$\dot{K}$ 为物体的动能变化率,$\dot{W}$ 为外力(含电势等)对物体所做的功,$\dot{Q}$ 为环境供给物体热量的速率,且有

$$\begin{aligned}
&U=\int_V u\,\mathrm{d}V,\quad K=\int_V\frac{1}{2}\rho\dot{u}_i\dot{u}_i\mathrm{d}V\\
&\dot{W}=\int_a\boldsymbol{T}^{(n)}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}a+\int_V\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V+\int_V\varphi\,\dot{\rho}_e\mathrm{d}V+\int_a\varphi\,\dot{\sigma}\,\mathrm{d}a\\
&\dot{Q}=-\oint_a\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a+\int_V\dot{r}\,\mathrm{d}V=\int_V\dot{q}\,\mathrm{d}V,\ \dot{q}=-q_{i,i}+\dot{r}
\end{aligned} \tag{3-13}$$

式中$\dot{q}$是环境供给介质单位体积的热量速率。由式(3-13)可得

$$\dot{W}+\dot{Q}=\int_a \boldsymbol{T}^{(n)}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}a+\int_V \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V+\int_V \varphi\,\dot{\rho}_e\mathrm{d}V+\int_a \varphi\,\dot{\sigma}\,\mathrm{d}a-\oint_a \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a+\int_V \dot{r}\,\mathrm{d}V=$$
$$\int_a \sigma_{ij}n_jv_i\mathrm{d}a+\int_V f_iv_i\mathrm{d}V+\int_V\varphi\,\dot{\rho}_e\mathrm{d}V-\int_a\varphi\,\dot{D}_in_i\mathrm{d}a-\oint_a q_in_i\mathrm{d}a+\int_V\dot{r}\,\mathrm{d}V=$$
$$\int_V(\sigma_{ij}v_i)_{,j}\mathrm{d}V+\int_V f_iv_i\mathrm{d}V+\int_V\varphi\,\dot{\rho}_e\mathrm{d}V-\int_V(\varphi\dot{D}_i)_{,i}\mathrm{d}V-\int_V q_{i,i}\mathrm{d}V+\int_V\dot{r}\,\mathrm{d}V=$$
$$\int_V\rho\,\ddot{u}_iv_i\mathrm{d}V+\int_V(\sigma_{ij}v_{i,j}-\varphi_{,i}\dot{D}_i-q_{i,i}+\dot{r})\mathrm{d}V=\dot{K}+\dot{U}$$

由上式立刻可以得到下列局部形式

$$\dot{u}=\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}+\boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{D}}-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{q}+\dot{r}=\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}+\boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{D}}+\dot{q}=\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}+\boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{D}}-q_{i,i}+\dot{r}\quad(3-14)$$

式中$\dot{u}$为单位体积的内能变化率，$\dot{r}$为单位体积的热源强度，$\boldsymbol{q}$为热流矢量，$\dot{q}$为单位时间内环境供给介质内部单位体积的总热量。如存在电流，则等式右端还需加上一项$\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}$，电场对电流所作的功率，往往转化为热量。式中采用了符号“:”，它为双点积，有$\boldsymbol{A}:\boldsymbol{B}=A_{ij}B_{ij}$。上式表示一般过程虽是不可逆过程，但能量原理总是成立的。

2) **连续介质热力学第二定律(Clausius-Duhem(克劳休斯-德海姆)不等式)**

不可逆过程中，除环境供给热量外，介质内部的耗散能也产生热量。所以系统的熵S由可逆部分$S^{(r)}$和不可逆部分$S^{(i)}$组成。环境供给电介质的熵是可逆的，而耗散热量产生的熵是不可逆的。环境供给介质的熵由两部分组成，一部分由通过表面的熵流矢量$\dot{\boldsymbol{\eta}}=\boldsymbol{q}/T$产生，一部分由单位体积内热源强度$\dot{r}$产生，在热传导问题的一阶近似中，假设由这两部分产生的熵是可逆的，即

$$\dot{S}^{(r)}=\int_V\dot{s}^{(r)}\mathrm{d}V=\int_V\frac{\dot{r}}{T}\mathrm{d}V-\int_a\dot{\boldsymbol{\eta}}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a=\int_V\left[\frac{\dot{r}}{T}-\left(\frac{q_i}{T}\right)_{,i}\right]\mathrm{d}V=\int_V\frac{1}{T}(\dot{r}-q_{i,i}+\dot{\eta}_iT_{,i})\mathrm{d}V$$
$$\dot{s}^{(r)}=\frac{\dot{r}}{T}-\dot{\eta}_{i,i}=\frac{1}{T}[\dot{r}-q_{i,i}+\dot{\eta}_iT_{,i})],\ \dot{\boldsymbol{\eta}}=\frac{\boldsymbol{q}}{T},\ \boldsymbol{\eta}=\int_0^t\frac{\boldsymbol{q}}{T}\mathrm{d}\tau\quad(3-15)$$

称式中的$\boldsymbol{\eta}$为熵位移矢量，$\dot{\boldsymbol{\eta}}$为熵流矢量。令$\dot{s}^{(i)}$为单位体积介质内部因热传导等的耗散功产生的不可逆熵增率，称为熵产率，则

$$\dot{S}^{(i)}=\int_V\dot{s}^{(i)}\mathrm{d}V=\int_V\dot{s}\,\mathrm{d}V-\int_V\dot{s}^{(r)}\mathrm{d}V\quad(3-16a)$$

由于体积的任意性，可得

$$\dot{s}^{(i)}=\dot{s}-\dot{s}^{(r)}=\dot{s}-\frac{\dot{r}}{T}+\frac{q_{i,i}}{T}-\frac{q_iT_{,i}}{T^2}\geqslant 0,\quad\text{或 }T\dot{s}^{(i)}=T\dot{s}-\dot{r}+q_{i,i}-\dot{\eta}_iT_{,i}\geqslant 0\quad(3-16b)$$

在一级近似理论中，通常设

$$T\dot{s}=\dot{r}-q_{i,i},\quad T\dot{s}^{(i)}=-\dot{\eta}_iT_{,i}\geqslant 0\quad(3-16c)$$

对于可逆过程$\dot{s}^{(i)}=0$，不可逆过程$\dot{s}^{(i)}>0$。更详细的讨论参见文献[4,24,25]。当温度变化不大时，令$T=T_0+\vartheta$，其中T_0为环境的温度。则式(3-16b)可近似为

$$T\dot{s}^{(i)}=T_0\left(1+\frac{\vartheta}{T_0}\right)\dot{s}-\dot{r}+q_{i,i}-\frac{q_iT_{,i}}{T_0(1+\vartheta/T_0)}\approx T_0\dot{s}-\dot{r}+q_{i,i}-\frac{q_i\vartheta_{,i}}{T_0}\geqslant 0$$

(3-17)

把式(3-14)中的$\dot{r}$代入式(3-16b),可得

$$T\dot{s}^{(i)}=\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}+\boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{D}}+T\dot{s}-\dot{u}-\dot{\boldsymbol{\eta}}\cdot\nabla T\geqslant 0 \tag{3-18a}$$

利用电 Gibbs 函数,则上式可写成

$$T\dot{s}^{(i)}=\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-\boldsymbol{D}\cdot\dot{\boldsymbol{E}}-s\dot{T}-\dot{g}-\dot{\boldsymbol{\eta}}\cdot\nabla T\geqslant 0 \tag{3-19a}$$

式(3-18a)和(3-19a)通常称为 Clausius-Duhem 不等式。

3.2.3 不可逆热力学简介

在热传导问题的一阶近似中,式(3-18a)和(3-16b)可写成下列形式

$$\dot{u}=\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}+\boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{D}}+T\dot{s},\quad \dot{h}=T\dot{s}^{(i)}=-T_{,i}\dot{\eta}_i,\quad T\dot{s}=\dot{r}-q_{i,i} \tag{3-18b}$$

式中$\dot{h}$是耗散能率。利用 Legendre(勒让德)变换,可得电 Gibbs 函数 g 为

$$g=u-Ts-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D},\quad \dot{g}=\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}-\boldsymbol{D}\cdot\dot{\boldsymbol{E}}-s\dot{T},\quad \dot{h}'=\dot{h}+(\eta_iT_{,i})^{\cdot}=\eta_i\dot{T}_{,i}$$

(3-19b)

按不可逆热力学理论,不可逆力 $T_{,i}$(或$\dot{\eta}_i$)和不可逆流$\dot{\eta}_i$(或 $T_{,i}$)存在函数关系,即存在第二类本构方程

$$\dot{\eta}_i=\dot{\eta}_i(T_{,j}),\quad 或\ T_{,i}=T_{,i}(\dot{\eta}_j) \tag{3-20}$$

在通常的热传导理论中,当温度变化不太大时,上式可写成下列线性关系

$$\dot{\eta}_i=-\lambda_{ij}T^{-1}T_{,j},\ T_{,j}=-\lambda_{ji}^{-1}T\dot{\eta}_i=-\hat{\lambda}_{ij}T\dot{\eta}_i,\quad 或\ q_i=-\lambda_{ij}T_{,j} \tag{3-21}$$

上式和由实验得到的 Fourier(傅里叶)热传导定律一致,式中 $\boldsymbol{\lambda}$ 是热传导系数。式(3-20)还可更一般地写为

$$(\eta_i,\dot{\eta}_i)=\eta_i(T,\dot{T},T_{,j}),\quad 或(q_i,\dot{q}_j)=q_i(\dot{T},T_{,j}) \tag{3-22}$$

上式拓宽了不可逆力与不可逆流的通常的线性理论式(3-20),即认为可以包含不可逆流和力的时间导数,但和温度梯度的时间导数无关。有时可称这一理论为广义热传导理论,其线性形式为

$$q_i+\tau_{ij}\dot{q}_j=b\dot{T}-\lambda_{ij}T_{,j} \tag{3-23}$$

3.3 电弹性本构关系

3.3.1 本构方程

一般情况下,弹性电介质有三组共 6 种变量:$(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\varepsilon})$,$(\boldsymbol{E},\boldsymbol{D})$,$(\vartheta,s)$,其中 $\vartheta=T-T_0$,

T_0 为参考温度。三组变量中任一组中的一种都可以当作自变量，剩下的用作因变量，因变量是自变量的函数，组成本构方程。因此原则上有 8 种本构关系，这正好和 8 个热力学特性函数相对应，但 8 种本构关系中的 4 个和另外的 4 个是互逆的，即因变量和自变量互换位置。对于等温或等熵过程则有 4 种本构关系，其中的两个和另外的两个是互逆的。对于等温或等熵的纯弹性过程则有两种，即 $\boldsymbol{\sigma}$ 是 $\boldsymbol{\varepsilon}$ 的函数或反之，实质上只有一种。通常假设在自然状态下有 $\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\varepsilon}=\boldsymbol{E}=\boldsymbol{D}=\mathbf{0},\ T=T_0,\ s=0$。由于我们讨论电弹性问题，所以从热力学特性函数推导本构关系较为方便。对一般情况，本书中主要采用两种形式，即由内能和电 Gibbs 函数推导的两种本构关系，其他形式的本构关系只在需要时加以讨论。

工程中采用的材料通常具有一定的对称性，常用的电弹性分析的电 Gibbs 函数 g 和内能 u 分别为

$$\begin{aligned} g(\varepsilon_{kl},\ E_k,\ \vartheta) = {} & \frac{1}{2}C_{ijkl}^{E,T}\varepsilon_{ji}\varepsilon_{lk} - e_{kij}^{T}E_k\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}\epsilon_{ij}^{\varepsilon,T}E_iE_j - \alpha_{ij}^{E}\varepsilon_{ij}\vartheta - \tau_i^{\varepsilon}E_i\vartheta - \frac{1}{2T_0}C^{\varepsilon,E}\vartheta^2 + \\ & \frac{1}{3}C_{ijklmn}^{E,T}\varepsilon_{ji}\varepsilon_{lk}\varepsilon_{nm} - \frac{1}{2}e_{mijkl}^{T}E_m\varepsilon_{ji}\varepsilon_{lk} - \frac{1}{3}\epsilon_{ijm}^{\varepsilon,T}E_iE_jE_m - \frac{1}{2}(l_{ijkl}^{T}E_iE_j + \bar{l}_{lm}^{T}E_mE_k)\varepsilon_{lk} \end{aligned} \tag{3-24}$$

$$\begin{aligned} u(\varepsilon_{kl},\ D_k,\ s) = {} & \frac{1}{2}C_{ijkl}^{D,s}\varepsilon_{ji}\varepsilon_{lk} - h_{kij}^{s}D_k\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}\beta_{ij}^{\varepsilon,s}D_iD_j - \alpha'^{D}_{ij}\varepsilon_{ji}s - \tau'^{\varepsilon}_{i}D_is + \frac{T_0}{2}C'^{s,D}s^2 + \\ & \frac{1}{3}C_{ijklmn}^{D,s}\varepsilon_{ji}\varepsilon_{lk}\varepsilon_{nm} + \frac{1}{2}h_{mijkl}^{s}D_m\varepsilon_{ji}\varepsilon_{lk} + \frac{1}{3}\beta_{ijm}^{\varepsilon,s}D_iD_jD_m + \frac{1}{2}(\bar{l}'^{s}_{ijkl}D_iD_j + \bar{l}'^{s}_{lm}D_mD_k)\varepsilon_{lk} \end{aligned} \tag{3-25}$$

上式已略去含温度和熵的三次项。式中 $C_{ijkl}^{E,T}$，$C_{ijklmn}^{E,T}C_{ijkl}^{D,s}$，$C_{ijklmn}^{D,s}$ 分别为 $\boldsymbol{E}$，T 和 $\boldsymbol{D}$，s 不变时的四阶和六阶弹性系数，e_{kij}^{T} 为等温压电系数，$\epsilon_{ij}^{\varepsilon,T}$，$\epsilon_{ijm}^{\varepsilon,T}$ 为等温等应变时的二阶和四阶介电系数，e_{mijkl}^{T} 为等温电弹性系数，α_{ij}^{E} 为等电场时的热弹性系数，τ_i^{ε} 为等应变时的热电效应系数，$C^{\varepsilon,E}$ 为等应变等电场时的比热，l_{ijkl}^{T} 为等温电致伸缩系数，$\bar{l}_{ij}^{T}$ 为引起应力不对称的等温电致伸缩系数，其他的系数有类似的意义。通常称等 $\boldsymbol{E}$ 时的系数为短路系数，等 $\boldsymbol{D}$ 时的系数为开路系数。各种系数都存在一些对称性，在较一般的情况下有

$$\begin{gathered} C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij},\quad e_{kij} = e_{kji},\quad h_{kij} = h_{kji},\quad \epsilon_{ij} = \epsilon_{ji}, \\ \beta_{ij} = \beta_{ji},\quad \alpha_{ij} = \alpha_{ji} \\ l_{ijkl} = l_{jikl} = l_{ijlk} = l_{klij} \end{gathered} \tag{3-26}$$

C_{ijklmn}，e_{mijkl}，…有相类似的关系

由于我们限于讨论机械和电过程是可逆的情形，所以按热力学原理，和式(3-24)与(3-25)相对应的最一般的电弹性分析的本构方程分别为

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl}^{E,T}\varepsilon_{kl} - e_{kij}^{T}E_k - \alpha_{ij}^{E}\vartheta - \frac{1}{2}(l_{ijkl}^{T}E_kE_l + \bar{l}_{im}^{T}E_mE_j) + \\ &\qquad C_{ijklmn}^{E,T}\varepsilon_{lk}\varepsilon_{nm} - e_{mijkl}^{T}E_m\varepsilon_{lk} \\ D_i &= -\frac{\partial g}{\partial E_i} = \left[\epsilon_{ij}^{\varepsilon,T} + l_{ijkl}^{T} + \frac{1}{2}(\bar{l}_{mi}^{T}\varepsilon_{mj} + \bar{l}_{mj}^{T}\varepsilon_{mi})\right]E_j + e_{ikl}^{T}\varepsilon_{kl} + \tau_i^{\varepsilon}\vartheta + \\ &\qquad \frac{1}{2}e_{imnkl}^{T}\varepsilon_{nm}\varepsilon_{lk} + \epsilon_{ijm}^{\varepsilon,T}E_jE_m \\ s &= -\frac{\partial g}{\partial \vartheta} = \alpha_{ij}^{E}\varepsilon_{ij} + \tau_i^{\varepsilon}E_i + C^{\varepsilon,E}\vartheta/T_0 \end{aligned} \tag{3-27}$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl}^{D,s}\varepsilon_{kl} - h_{kij}^{s}D_k - \alpha'^{D}_{ij}s + C_{ijklmn}^{D,s}\varepsilon_{lk}\varepsilon_{nm} + \frac{1}{2}h_{mijkl}^{s}D_m\varepsilon_{lk} + \\
&\quad \frac{1}{2}(l'^{s}_{ijkl}D_kD_l + \bar{l}'^{s}_{im}D_mD_j) \\
E_i &= \frac{\partial u}{\partial D_i} = \left[\beta_{ij}^{\varepsilon,s} + l'^{s}_{ijkl}\varepsilon_{kl} + \frac{1}{2}(\bar{l}'^{s}_{mi}\varepsilon_{mj} + \bar{l}'^{s}_{mj}\varepsilon_{mi})\right]D_j - h_{ikl}^{s}\varepsilon_{kl} - \tau'^{\varepsilon}_{i}s + \\
&\quad \frac{1}{2}a_{imnkl}^{s}\varepsilon_{nm}\varepsilon_{lk} + \beta_{ijm}^{\varepsilon,s}D_jD_m \\
\vartheta &= \frac{\partial u}{\partial s} = -\alpha'^{D}_{ij}\varepsilon_{ji} - \tau'^{\varepsilon}_{i}D_i + T_0C'^{\varepsilon,D}s
\end{aligned} \tag{3-28}
$$

对于线性热释电材料，按式(3-27)，其本构方程为

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{E,T}\varepsilon_{kl} - e_{kij}^{T}E_k - \alpha_{ij}^{E}\vartheta, \quad s = \alpha_{ij}^{E}\varepsilon_{ij} + \tau_i^{\varepsilon}E_i + C^{\varepsilon,E}\vartheta/T_0 \\
&D_i = \epsilon_{ij}^{\varepsilon,T}E_j + e_{ikl}^{T}\varepsilon_{kl} + \tau_i^{\varepsilon}\vartheta
\end{aligned} \tag{3-29a}
$$

按式(3-28)，线性热释电体的本构方程为

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{D,s}\varepsilon_{kl} - h_{kij}^{s}D_k - \alpha'^{D}_{ij}s, \quad \vartheta = \frac{\partial u}{\partial s} = -\alpha'^{D}_{ij}\varepsilon_{ji} - \tau'^{\varepsilon}_{i}D_i + T_0C'^{\varepsilon,D}s \\
&E_i = \beta_{ij}^{\varepsilon,s}D_j - h_{ikl}^{s}\varepsilon_{kl} - \tau'^{\varepsilon}_{i}s
\end{aligned} \tag{3-30a}
$$

如采用 Voigt 记号，上两式可分别写成

$$
\begin{aligned}
&\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j - e_{ij}E_j - \alpha_i\vartheta, \quad s = \alpha_i\varepsilon_i + \tau_iE_i + C\vartheta/T_0, \quad D_i = \epsilon_{ij}E_j + e_{ij}\varepsilon_j + \tau_i\vartheta \\
&\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{e}^{T}\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\alpha}\vartheta, \quad s = \boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\tau}\boldsymbol{E} + C\vartheta/T_0, \quad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{e}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{\tau}\vartheta
\end{aligned} \tag{3-29b}
$$

$$
\begin{aligned}
&\sigma_i = C_{ij}\varepsilon_j - h_{ij}D_j - \alpha'_i s, \quad \vartheta = -\alpha'_i\varepsilon_i - \tau'_iD_i + T_0Cs, \quad E_i = \beta_{ij}D_j - h_{ij}\varepsilon_j - \tau'_i s \\
&\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{h}^{T}\boldsymbol{D} - \boldsymbol{\alpha}'s, \quad \vartheta = -\boldsymbol{\alpha}'\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\tau}'\boldsymbol{D} + T_0Cs, \quad \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{h}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{D} - \boldsymbol{\tau}'s
\end{aligned} \tag{3-30b}
$$

和式(3-7)相应，因自变量不同，热释电材料有 8 种不同形式的本构方程，读者可自行讨论。但对压电材料，只有 4 种，在式(3-29)和(3-30)中不考虑温度的影响时，通常称为第二和第四类压电本构方程；除上述两种常用的压电本构方程外，还有第一和第三两种压电本构方程。压电体的四种本构方程为

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{E}\varepsilon_{kl} - e_{kij}^{\varepsilon}E_k, \quad D_i = e_{ikl}^{E}\varepsilon_{kl} + \epsilon_{ij}^{\varepsilon}E_j \\
&\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{D}\varepsilon_{kl} - h_{kij}^{E}D_k, \quad E_i = -h_{ikl}^{D}\varepsilon_{kl} + \beta_{ij}^{\varepsilon}D_j \\
&\varepsilon_{ij} = s_{ijkl}^{E}\sigma_{kl} - d_{kij}^{\sigma}E_k, \quad D_i = d_{ijk}^{D}\sigma_{jk} + \epsilon_{ij}^{\sigma}E_j \\
&\varepsilon_{ij} = s_{ijkl}^{D}\sigma_{kl} - g_{kij}^{\sigma}D_k, \quad E_i = -g_{ijk}^{D}\sigma_{jk} + \beta_{ij}^{\sigma}D_j
\end{aligned} \tag{3-31}
$$

式中 $\boldsymbol{s}$ 为弹性柔度张量矩阵。如采用张量符号记法或 Voigt 矢量符号，上式可写成

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{e}^{T}\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{e}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{E}; \quad \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{h}^{T}\boldsymbol{D},\ \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{h}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{D} \\
&\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{s}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{d}^{T}\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{d}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\epsilon}\boldsymbol{E}; \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{s}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{g}^{T}\boldsymbol{D},\ \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{g}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{D}
\end{aligned} \tag{3-32}
$$

应当注意，上述本构方程中的某些系数虽然采用了相同的符号，但对不同的本构方程应在不同的条件下测量，如式(3-24)～(3-31)所表明的。

表 3-1 给出具有压电性的 20 类点群晶体的压电常数矩阵 $\boldsymbol{d}$ 中不为零的元素。

表 3-1　具有压电性的 20 类点群晶体的压电常数矩阵[1]（$\boldsymbol{D}=\boldsymbol{d}:\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{E}$ 中的矩阵 $\boldsymbol{d}$）

晶系	点群	压电常数	晶系	点群	压电常数
三斜晶系	1	$\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} & d_{15} & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} & d_{25} & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} & d_{35} & d_{36} \end{bmatrix}$	单斜晶系	2	$\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & d_{16} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & 0 & d_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{34} & 0 & d_{36} \end{bmatrix}$
单斜晶系	m	$\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & d_{26} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & d_{35} & 0 \end{bmatrix}$	正交晶系	222	$\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{25} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{bmatrix}$
正交晶系	$2mm$	$\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{24} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	四方晶系	$\bar{4}$	$\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d_{15} & d_{14} & 0 \\ d_{31} & -d_{31} & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{bmatrix}$
四方晶系	4	$\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & -d_{14} & 0 \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	四方晶系	422	$\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
四方晶系	$4mm$	$\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	四方晶系	$\bar{4}2m$	$\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{36} \end{bmatrix}$
三方晶系	3	$\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix} d_{11} & -d_{11} & 0 & d_{14} & d_{15} & -2d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & d_{15} & -d_{14} & -2d_{11} \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	三方晶系	32	$\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix} d_{11} & -d_{11} & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -d_{14} & -2d_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
三方晶系	$3m$	$\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & -2d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	六方晶系	6	$\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & -d_{14} & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
六方晶系	$\bar{6}$	$\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix} d_{11} & -d_{11} & 0 & 0 & 0 & -2d_{22} \\ -d_{22} & d_{22} & 0 & 0 & 0 & -2d_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	六方晶系	622	$\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
六方晶系	$6mm$	$\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{36} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	六方晶系	$\bar{6}m2$	$\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix} d_{11} & -d_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2d_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
立方晶系	23 $\bar{4}3m$	$\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{14} \end{bmatrix}$	压电陶瓷	多晶	$\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d_{15} & 0 & 0 \\ d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

对于具有对称中心的电致伸缩材料，所有带奇数下指标的系数消失，式(3-27)和(3-28)分别化为

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= C_{ijkl}^{\mathrm{E,T}}\varepsilon_{kl} - \alpha_{ij}^{\mathrm{E}}\vartheta - \frac{1}{2}(l_{ijkl}^{\mathrm{T}}E_kE_l + \bar{l}_{jm}^{\mathrm{T}}E_mE_i), \quad s = \alpha_{ij}^{\mathrm{E}}\varepsilon_{ij} + C^{\varepsilon,\mathrm{E}}\vartheta/T_0 \\
D_i &= \left[\epsilon_{ij}^{\varepsilon,\mathrm{T}} + l_{ijkl}^{\mathrm{T}} + \frac{1}{2}(\bar{l}_{ml}\varepsilon_{mk} + \bar{l}_{mk}\varepsilon_{ml})\right]E_j
\end{aligned} \tag{3-33}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= C_{ijkl}^{\mathrm{D,s}}\varepsilon_{kl} - \alpha'^{\mathrm{D}}_{ij}s + \frac{1}{2}(\bar{l}'^{\mathrm{s}}_{ijkl}D_kD_l + \bar{l}'^{\mathrm{s}}_{im}D_mD_j), \quad \vartheta = -\alpha'^{\mathrm{D}}_{ij}\varepsilon_{ji} + T_0C'^{\varepsilon,\mathrm{D}}s \\
E_i &= \left[\beta_{ij}^{\varepsilon,\mathrm{s}} + \bar{l}'^{\mathrm{s}}_{klij}\varepsilon_{ji} + \frac{1}{2}(\bar{l}'^{\mathrm{s}}_{ml}\varepsilon_{mk} + \bar{l}'^{\mathrm{s}}_{mk}\varepsilon_{ml})\right]D_j - h_{ikl}^{\mathrm{s}}\varepsilon_{kl}
\end{aligned} \tag{3-34}
$$

一般情况下，工程上很少考虑应力的不对称部分。对于各向同性的电致伸缩材料，有

$$
\begin{aligned}
C_{ijkl}^{\mathrm{E,T}} &= \lambda^{\mathrm{E,T}}\delta_{ij}\delta_{kl} + G^{\mathrm{E,T}}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}), \quad \epsilon_{ij}^{\varepsilon,\mathrm{T}} = \epsilon^{\varepsilon,\mathrm{T}}\delta_{ij}, \quad \alpha_{ij}^{\mathrm{E}} = \alpha^{\mathrm{E}}\delta_{ij} \\
l_{ijkl}^{\mathrm{T}} &= \frac{1}{2}b_1^{\mathrm{T}}(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + a_2^{\mathrm{T}}\delta_{ij}\delta_{kl}
\end{aligned} \tag{3-35}
$$

以及式(3－34)表示的本构关系中系数的类似关系，从而式(3－33)和(3－34)分别化为

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= \lambda^{\mathrm{E,T}}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2G^{\mathrm{E,T}}\varepsilon_{ij} - \alpha^{\mathrm{E}}\vartheta\delta_{ij} - \frac{1}{2}(a_1^{\mathrm{T}}E_iE_j + a_2^{\mathrm{T}}E_kE_k\delta_{ij}) \\
D_i &= (\epsilon^{\varepsilon,\mathrm{T}}\delta_{ij} + a_1^{\mathrm{T}}\varepsilon_{ij} + a_2^{\mathrm{T}}\varepsilon_{kk}\delta_{ij})E_j, \quad s = \alpha^{\mathrm{E}}\varepsilon_{kk} + C^{\varepsilon,\mathrm{E}}\vartheta/T_0
\end{aligned} \tag{3-36a}
$$

$$
\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= \lambda^{\mathrm{D,s}}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2G^{\mathrm{D,s}}\varepsilon_{ij} - \alpha'^{\mathrm{D}}\vartheta\delta_{ij} - \frac{1}{2}(a'^{\mathrm{s}}_1D_iD_j + a'^{\mathrm{s}}_2D_kD_k\delta_{ij}) \\
E_i &= (\beta^{\varepsilon,\mathrm{s}}\delta_{ij} + a'^{\mathrm{s}}_1\varepsilon_{ij} + a'^{\mathrm{s}}_2\varepsilon_{kk}\delta_{ij})D_j, \quad \vartheta = -\alpha'^{\mathrm{D}}\varepsilon_{kk} + T_0C'^{\varepsilon,\mathrm{D}}s
\end{aligned} \tag{3-36b}
$$

此时压电效应和热电效应消失，但电致伸缩效应依然存在。高介电常数材料和温度略高于居里点的铁电材料等的电致伸缩效应明显。对典型的电致伸缩材料 PMN($Pb(Mg_{1/3}Nb_{2/3}O_3)$)和它与 $PbTiO_3$ 的固溶体(PMN－PT)，当外电场为 1 MV/m 时，电致伸缩应变可达 10^{-5} 量级，只当电压达 10^8 V/m 时，电致伸缩应变才能和压电效应产生的应变相比，更高电致伸缩效应的材料正在不断出现。在高电场作用下，PMN 材料的滞迟回线较 PZT 等陶瓷材料要小。

3.3.2 本构系数之间的关系

现在来讨论不同本构方程中的系数之间存在的关系。对于线性压电材料，把式(3－30)中的 $\boldsymbol{D}$ 和 s 代入式(3－31)中的 $\boldsymbol{\sigma}$，再和式(3－30)中的 $\boldsymbol{\sigma}$ 比较，以及其他类似的讨论，最终可得

$$
\begin{aligned}
C_{ijkl}^{\mathrm{E,T}} &= C_{ijkl}^{\mathrm{D,s}} - h_{nij}^{\mathrm{s}}e_{nkl}^{\mathrm{T}} - \alpha'^{\mathrm{D}}_{ij}\alpha_{kl}^{\mathrm{E}}, \quad e_{nij}^{\mathrm{T}} = h_{kij}^{\mathrm{s}}\epsilon_{kn}^{\varepsilon,\mathrm{T}} + \alpha'^{\mathrm{D}}_{ij}\tau_n^{\varepsilon}, \quad \alpha_{ij}^{\mathrm{E}} = h_{kij}^{\mathrm{s}}\tau_k^{\varepsilon} + \alpha'^{\mathrm{D}}_{ij}C^{\varepsilon,\mathrm{E}}/T_0 \\
\beta_{ij}^{\varepsilon,\mathrm{s}}e_{jkl}^{\mathrm{T}} &= h_{ikl}^{\mathrm{s}} + \tau'^{\varepsilon}_i\alpha_{kl}^{\mathrm{E}}, \quad \beta_{ij}^{\varepsilon,\mathrm{s}}\epsilon_{jk}^{\varepsilon,\mathrm{T}} = \delta_{ik} + \tau'^{\varepsilon}_i\tau_k^{\varepsilon}, \quad \beta_{ij}^{\varepsilon,\mathrm{s}}\tau_j^{\varepsilon} = \tau'^{\varepsilon}_iC^{\varepsilon,\mathrm{E}}/T_0 \\
T_0C'^{\varepsilon,\mathrm{D}}\alpha_{kl}^{\mathrm{E}} &= \alpha'^{\mathrm{D}}_{kl} + \tau'^{\varepsilon}_ie_{ikl}^{\mathrm{T}}, \quad T_0C'^{\varepsilon,\mathrm{D}}\tau_j^{\varepsilon} = \tau'^{\varepsilon}_i\epsilon_{ij}^{\varepsilon,\mathrm{T}}, \quad C'^{\varepsilon,\mathrm{D}}C^{\varepsilon,\mathrm{E}} = \tau'^{\varepsilon}_i\tau_i^{\varepsilon} + 1
\end{aligned} \tag{3-37}
$$

线性压电情形共有常数 $C_{ijkl}^{\mathrm{E,T}}$，e_{kij}^{T}，α_{ij}^{E}，τ_i^{ε}，$C^{\varepsilon,\mathrm{E}}$，$\epsilon_{ij}^{\varepsilon,\mathrm{T}}$等 55 个，而上式共有 76 个线性方程，其中的 55 个可用来解出它们之间一一对应的关系，多余的 21 个方程可用作校核。但是对于电致伸缩材料，由式(3－35)和(3－36)可知，由于本构关系的非线性性质，不同本构方程中系数之间的关系是非线性的，因此很难用有限形式表示出来。

对于线性压电材料，$\vartheta = 0$ 的等温过程的本构方程可由式(3－30)求得

$$
\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{\mathrm{E,T}}\varepsilon_{kl} - e_{kij}^{\mathrm{T}}E_k, \quad D_i = \epsilon_{ij}^{\varepsilon,\mathrm{T}}E_j + e_{ikl}^{\mathrm{T}}\varepsilon_{kl}, \quad s = \alpha_{ij}^{\mathrm{E}}\varepsilon_{ij} + \tau_i^{\varepsilon}E_i \tag{3-38a}
$$

而对等熵过程，由式(3-28)知，其本构方程由 $s=0$ 解出 ϑ 后再代入其余两个方程，便得

$$\sigma_{ij}=C_{ijkl}^{E,s}\varepsilon_{kl}-e_{kij}^{s}E_k,\quad D_i=\varepsilon_{ij}^{\varepsilon,s}E_j+e_{ikl}^{s}\varepsilon_{kl},\quad s=0 \tag{3-38b}$$

因而两种情况下的材料系数之间存在关系

$$C_{ijkl}^{E,s}=C_{ijkl}^{E,T}+T_0\alpha_{ij}^{E}\alpha_{kl}^{E}/C^{\varepsilon,E},\quad e_{ikl}^{s}=e_{ikl}^{T}-T_0\alpha_{ij}^{E}\tau_k^{\varepsilon}/C^{\varepsilon,E},\quad \epsilon_{ij}^{\varepsilon,s}=\epsilon_{ij}^{\varepsilon,T}-T_0\tau_i^{\varepsilon}\tau_k^{\varepsilon}/C^{\varepsilon,E} \tag{3-39}$$

完全的可逆过程是等温和等熵的。非等温过程一定是不可逆的，但通常假设温度变化范围不很大，也可借鉴上述方法讨论。对于工程上不是以电-热转换为目的的情况，一般讲来，电一热和机械一热效应的耦合较弱，等温和等熵常数相差不明显。

3.4 铁电体的基本物理性质

3.4.1 概述

绝大多数的压电陶瓷材料（如 $BaTiO_3$，$PbTiO_3$，$Pb(Zr_{l-x}Ti_x)O_3$）都具有 ABO_3 型钙钛矿结构。以 $BaTiO_3$ 为例(图 3-1)，在居里温度或居里点 120℃以上为顺电相的立方结构，Ba 位于晶胞顶点，Ti 位于中心，O 离子位于面心构成的氧八面体，边长 a_0 约 0.4 nm，此时正、负电荷的中心重合，呈电中性，无铁电性。120℃以下，晶体结构稍有畸变，为铁电相的四方结构，Ba_{2+} 和 Ti_{4+} 相对于 O_{2-} 产生微位移，使得正负电荷中心不重合，产生了极化。实验发现 120℃到 5℃自发极化沿 c 轴[001]方向；5℃到-80℃为斜方晶系，自发极化沿[011]方向，-80℃以下为菱形结构，自发极化沿[111]方向。一般讲来，压电体和铁电体等材料都较脆，变形不能很大，所以机械性质都作弹性处理；但施加的电场可以较大，因而在许多情况下，要考虑电饱和问题，本处将作一简单讨论。

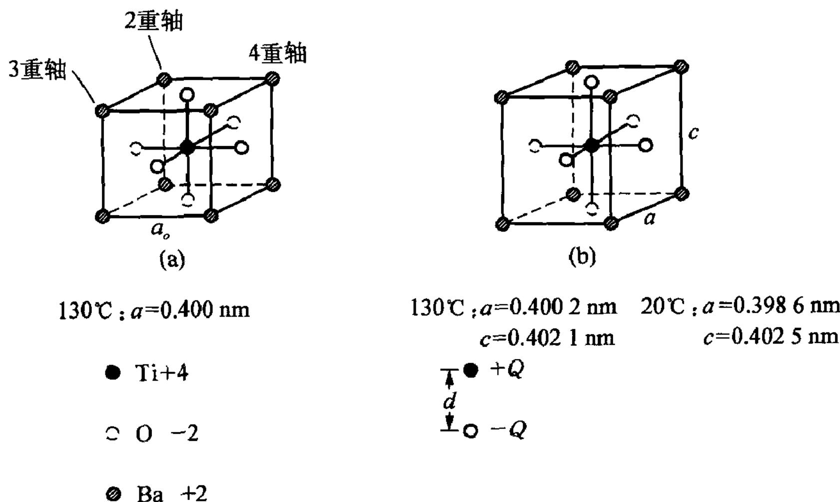


图 3-1 $BaTiO_3$ 的晶胞

(a) 立方；(b) 四方

3.4.2 $P-E$ 电滞回线

图3-2给出掺加少量Nd_2O_3的软PZT陶瓷无外应力时的单轴$P-E$电滞回线。通常约定和材料极化方向一致的$\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$为正值,反之为负值。施加电场前,电畴呈无序状态,铁电体的整体极化强度$P=0$,此时$E=0$, $P=0$,对应于图上的O点。在电场作用下,原有畴壁转向,新畴形成,导致电畴向电场方向排列,整体呈现极化。起始的OA段,电场较弱,$P-E$呈线性关系,畴壁移动是可逆的。PZT随E的增加,畴壁移动变成不可逆的,P随E的增长比线性段要快,在B点极化趋于饱和,晶体基本上成为单畴的。过B点后进入饱和区,继续加大E,总极化因存在感应极化而仍有增长,$P-E$又呈线性关系,如BC段。由C减小E,极化回线将沿$CBDFGH$变化,GH表示反向饱和段。再增加E,曲线沿$HKGMBC$变化,电场在正负饱和值之间循环一周时形成电滞回线,电滞回线所围面积的大小,表征能量损耗的大小。曲线和过O点平行于P轴的轴线的交点D(和K)处$E=0$,该P值称为晶体的剩余极化强度P_r;如把饱和的线性部分CB延长到该轴线上,交点L处的P值称为饱和极化强度P_s,它代表电畴原有的自发极化强度。P_r和P_s相差愈小,晶体愈易成为单畴。$P=0$时的E值称为矫顽电场E_c。但若E_c大于晶体的击穿强度,则该晶体也不能看成铁电体。和图3-2相比,实际材料的电滞回线更为复杂,往往不对称,即正负矫顽电场不相同。因为$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P}$,所以$D-E$和$P-E$曲线是类似的。

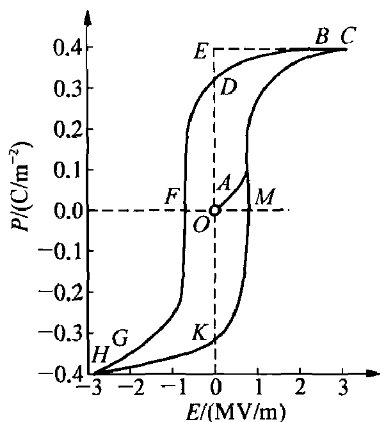


图3-2 软PZT的电滞回线

3.4.3 $\varepsilon-E$ 蝴蝶状曲线

图3-3给出软PZT陶瓷无外应力时的单轴$\varepsilon-E$蝴蝶状曲线。设初始状态时$E=0$, $\varepsilon=0$。开始施加电场后,当$E<E_c$时,变形是弹性的,当$E>E_c$后,晶体发生电畴极化转换和不可逆变形,整体出现极化和压电应变。伴随出现90°的电畴转换,便发生不可逆的剩余应变,在B点极化达到饱和,不可逆畴变应变结束,继续加大电场,只发生可逆性的压电应变。从B点减小电场,应变的可逆部分将恢复,在$E=0$的D点存在明显的剩余应变ε_r。电场反向后,应变继续降低,直至$E=-E_c$的F点,开始反向极化,应变转而增加,G点达到反向饱和。继续降低E值,又发生可逆性的压电应变。若由G点增加E值,在K点E又降为0, K和D点有相同的ε_r值。随后在M点$E=E_c$,再次反向极化。这一曲线形似蝴蝶,故称蝴蝶状曲线。

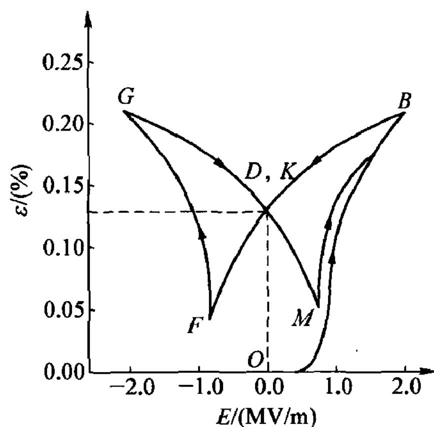


图3-3 软PZT的$\varepsilon-E$蝴蝶状曲线

3.4.4 铁弹性曲线

图3-4是PZT陶瓷在$E=0$时的单轴应力-应变曲线,也称铁弹性曲线。铁弹性曲线的

主要特异之处是当应力达到某个临界值 σ_c 后，电畴会发生 90° 的畴变，伴随着较大的不可逆畴变应变，畴变应变是等体积的，即泊松比为 0.5。在畴变之前和畴变之后，应力-应变关系都是线性的。

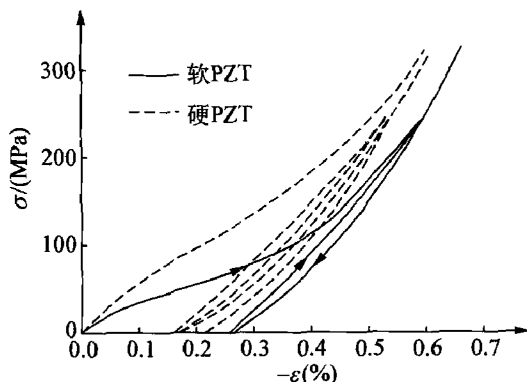


图 3-4 PZT 在 $E=0$ 时的压应力-应变曲线

3.4.5 已极化铁电体的应力-应变曲线

图 3-5 是 8/65/35PLZT 材料预先极化到 $P_r = 0.25\ C/m^2$，$\varepsilon_r = 0.14\%$，再施加垂直于极化方向的单轴压应力时的应力-应变和应力-电位移曲线，图中清楚地表明压应力存在退极化效应。

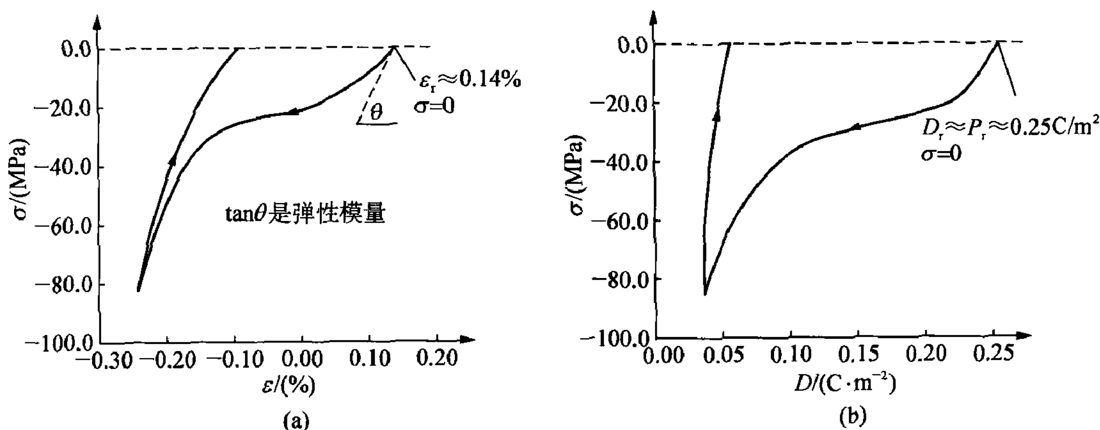


图 3-5 8/65/35PLZT 存在预极化和预应变时的
(a) 单轴 $\sigma-\varepsilon$ 和(b) $\sigma-D$ 曲线

上述诸实验是在低于 Curie 温度地室温和低频(如 0.02 Hz)时做的。升高温度将减小电滞回线面积，直至消失。电滞回线和外加电场速率和应力率相关。同时指出，顺电相是没有电滞回线的。

3.4.6 极化转换准则

以钙钛矿型铁电体为例，讨论建立极化转换准则的微观方法。当晶胞由非极性立方($m3m$)转变为极性四方晶胞($4mm$)时有 6 种形式，如图 3-6 所示。在外电场作用下有 180°和

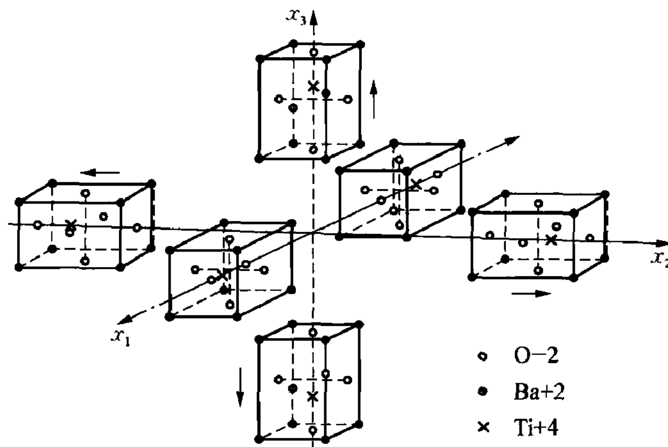


图 3-6　四方晶系晶胞中的 6 种极化方式

90°两种方式的转换，在应力作用下只有 90°的极化转换。设初始极化方向沿直角坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 的 Ox_3 正向，由晶体学理论知，对 180°极化转换，P_s 和 ε_s(ε_r 的理论值)的改变为

$$\Delta \boldsymbol{P}_s = \boldsymbol{P}_s[0,\ 0,\ -2P_s]^{\mathrm{T}},\quad \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_s = \boldsymbol{0} \tag{3-40}$$

对于 90°的极化转换，沿 Ox_1，Ox_2 的正负方向都能发生，故有

$$\Delta \boldsymbol{P}_s = \begin{Bmatrix} \pm P_s \\ 0 \\ -P_s \end{Bmatrix} 或 \begin{Bmatrix} 0 \\ \pm P_s \\ -P_s \end{Bmatrix},\quad \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_s = \varepsilon_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} 或\ \varepsilon_0 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{3-41}$$

式中 $\varepsilon_0 = (c-a)/a$，其中 c 和 a 分别为四方晶胞沿极化和垂直极化方向的边长。

电畴转换要引起 P_s 和 ε_s 的改变，因此需要消耗一定的临界能量，只有外界提供的能量大于这个临界能量 G^c，电畴转换才能发生。从而理想化的极化转换准则可设想为

$$\boldsymbol{\sigma} : \Delta \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{E} : \Delta \boldsymbol{P} \geqslant G^c \tag{3-42}$$

在 180°的电畴转换时，需要克服电畴 180°反向所消耗的功，而在 90°的电畴转换时，需要克服电畴 90°旋转和晶胞变形所消耗的功，两者是不同的。在初步理论中，通常设 $G^c = 2P_sE_c$，实际的问题要复杂得多，这还是一个需要深入探讨的问题。

3.5　等温电介质中电 Gibbs(吉布斯)函数物理变分原理

3.5.1　电 Gibbs 函数

3.1.3 节中曾指出，从热力学第一定律可以派生出普适的物理变分原理，因而物理变分原理也是自然界的基本原理，式(3-6)给出这一原理的数学表述。本节将从这一原理出发，讨论电弹性的完整控制方程组。一般情况下，小变形时的本构方程和广义几何方程可取为

$$\sigma_{kl} = C_{ijkl}\varepsilon_{ij} - e_{jkl}E_j - \frac{1}{2}l_{ijkl}E_iE_j - \frac{1}{2}\bar{l}_{lm}E_mE_k, \quad e_{kl} = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k})$$
$$D_k = \tilde{\epsilon}_{kl}E_l + e_{kij}\varepsilon_{ij}, \ \tilde{\epsilon}_{kl} = \epsilon_{kl} + l_{klij}\varepsilon_{ji} + \frac{1}{2}(\bar{l}_{ml}\varepsilon_{mk} + \bar{l}_{mk}\varepsilon_{ml}), \ E_k = -\varphi_{,k} \tag{3-43}$$
$$l_{ijkl} = l_{jikl} = l_{ijlk} = l_{klij}, \quad C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}, \quad e_{kij} = e_{kji}$$

式中 C_{ijkl}，e_{kij}，ϵ_{kl}，l_{ijkl}和$\bar{l}_{kl}$是短路弹性刚度系数、压电、夹持介电、电致伸缩和引起应力不对称的电致伸缩系数。其中ϵ和$\bar{l}$ 可以是不对称的。由上式可知 $E_{k,j} = E_{j,k} = -\varphi_{,jk}$。

令 σ^s_{kl}和σ^a_{kl}分别为σ_{kl}的对称和反对称部分,则由上式可导出

$$\sigma_{kl} = \sigma^s_{kl} + \sigma^a_{kl}, \ \sigma^s_{lk} = \frac{1}{2}(\sigma_{kl} + \sigma_{lk}), \ \sigma^a_{kl} = \frac{1}{2}(\sigma_{kl} - \sigma_{lk})$$
$$\sigma^s_{kl} = \sigma^s_{lk} = C_{ijkl}\varepsilon_{ij} - e_{jkl}E_j - \frac{1}{2}l_{ijkl}E_iE_j + \frac{1}{4}(\bar{l}_{lm}E_mE_k + \bar{l}_{km}E_mE_l) \tag{3-44}$$
$$\sigma^a_{kl} = -\sigma^a_{lk} = \frac{1}{4}(\bar{l}_{lm}E_mE_k - \bar{l}_{km}E_mE_l)$$

由上式知,应力的反对称部分可由新引入的本构参数$\bar{l}_{ij}$ 得到,这和 3.2 节中用式(3-11) 表示的现有理论不同,这一理论还需用实验验证。但如令 $\bar{l}_{kl} = -2(\epsilon_{kl} - \epsilon_0\delta_{kl})$ 并略去一些高阶项后,由上式可得

$$\sigma^a_{kl} = -\sigma^a_{lk} = \frac{1}{2}(P_kE_l - P_lE_k) = \frac{1}{2}(D_kE_l - D_lE_k) \tag{3-45}$$

上式正是通常偶极子理论的结果。但一般情形,$\bar{l}_{kl}$ 应看成由试验确定的新的常数,这一理论还需实验验证。若 $\bar{l}_{kl} = 0$，$\epsilon_{kl} = \epsilon_{lk}$,则 $\sigma^a_{kl} = 0$,且有 $\sigma_{kl} = \partial g/\partial\varepsilon_{kl}$，$D_k = -\partial g/\partial E_k$,本书只讨论这种情形,此时电 Gibbs 函数为

$$g = \frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{ji}\varepsilon_{lk} - \frac{1}{2}\epsilon_{kl}E_kE_l - e_{kij}E_k\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}l_{ijkl}E_iE_j\varepsilon_{lk} \tag{3-46}$$

利用式(3-43),式(3-46)可化为

$$g(\varepsilon_{kl}, E_k) = (1/2)C_{ijkl}\varepsilon_{ji} + g^e, \ g^e = -(1/2)(D_kE_k + e_{mkl}E_m\varepsilon_{lk}) \tag{3-47}$$

对各向同性情形,式(3-43)可化为

$$\varepsilon_{kl} = \varepsilon\delta_{kl}, \quad \alpha_{kl} = \alpha\delta_{kl}, \quad l_{ijkl} = \frac{1}{2}\hat{a}_1(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + a_2\delta_{ij}\delta_{kl}$$
$$\sigma_{kl} = \lambda e_{ii}\delta_{kl} + 2Ge_{kl} - \frac{1}{2}(a_1E_kE + a_2E_iE_i\delta_{kl}), \quad D_k = (\varepsilon\delta_{kl} + a_1e_{kl} + a_2e_{ii}\delta_{kl})E_l \tag{3-48}$$

式中λ和G是 Lamé 常数，$a_1 = \hat{a}_1 - 2\alpha$ 和a_2 是各向同性电介质的电致伸缩系数。此时 $\sigma^a_{kl} = 0$，且无压电效应。除电致伸缩材料外,今后也不考虑含 l_{ijkl}的项。

3.5.2 标准电 Gibbs 函数变分原理[26, 27]

因为电场存在于所有介质中,所以一般情况下需要考虑环境的影响,此时电介质需要和环

境一起考虑。目前工程上很少考虑非对称应力。设电介质中的位移和电势在 a_u，a_φ 上和环境中的位移和电势在 a_u^{env}，a_φ^{env} 上都分别满足各自的边界条件，在它们共同的边界 a^{itf} 上满足界面连接条件 $u = u^{env}$，$\varphi = \varphi^{env}$，则电 Gibbs 函数变分原理可用图 3-7 表示：

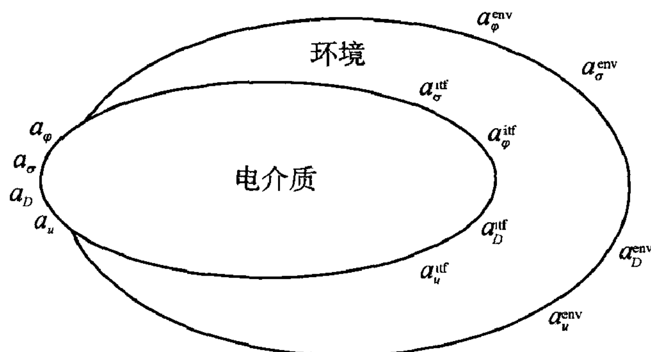


图 3-7　电介质和环境之间的关系图解

$$
\begin{aligned}
&\delta\Pi_g = \delta\Pi_{g1} + \delta\Pi_{g2} - \delta W_g^{itf} = 0\\
&\delta\Pi_{g1} = \int_V \delta g \mathrm{d}V + \int_V g^e \delta u_{k,k} \mathrm{d}V - \delta W^*\\
&\delta\Pi_{g2} = \int_{V^{env}} \delta g^{env} \mathrm{d}V + \int_V g^{env\,e} \delta u_{k,k}^{env} \mathrm{d}V - \delta W^{*\,env}\\
&\delta W^* = \int_V (f_k - \rho\, \ddot{u}_k)\delta u_k \mathrm{d}V - \int_V \rho_e \delta\varphi \mathrm{d}V + \int_{a_\sigma} T_k^* \delta u_k \mathrm{d}a - \int_{a_D} \sigma^* \delta\varphi \mathrm{d}a\\
&\delta W^{*\,env} = \int_{V^{env}} (f_k^{env} - \rho^{env}\, \ddot{u}_k^{env})\delta u_k^{env} \mathrm{d}V - \int_{V^{env}} \rho_e^{env} \delta\varphi^{env} \mathrm{d}V + \int_{a_\sigma^{env}} T_k^{*\,env} \delta u_k^{env} \mathrm{d}a - \int_{a_D^{env}} \sigma^{*\,env} \delta\varphi^{env} \mathrm{d}a\\
&\delta W_g^{itf} = \int_{a^{itf}} T_k^{*\,itf} \delta u_k \mathrm{d}a - \int_{a^{itf}} \sigma^{*\,itf} \delta\varphi \mathrm{d}a
\end{aligned}
\tag{3-49}
$$

式中 f_k，T_k^*，ρ_e 和 σ^* 分别是电介质中的单位体积的体积力、表面 a_σ 上规定的单位面积上的外力，单位体积的体电荷密度和表面 a_D 上规定的单位面积上的电荷。变量右上方的上标“env”表示环境中的物理量，变量右上方的上标“itf”表示界面上的量。$T_k^{*\,itf}$ 和 $\sigma^{*\,itf}$ 分别是界面上给定的面力和面电荷密度。变分时需要注意虚位移不仅引起应变的变化，且引起电势的变化，这正是非线性电弹性介质变分的特点，通常电势变化引起应变的变化是高一阶小量，不予计算，即

$$
\begin{aligned}
&\delta\varphi = \delta_\varphi \varphi + \delta_u \varphi, \quad \delta_u \varphi = \varphi_{,p} \delta u_p = - E_p \delta u_p\\
&\delta E_i = \delta_\varphi E_i + \delta_u E_i, \quad \delta_u E_i = E_{i,p} \delta u_p = E_{p,i} \delta u_p
\end{aligned}
\tag{3-50}
$$

式中已应用了 $E_{k,j} = E_{j,k} = - \varphi_{,jk}$。式(3-50)中 $\delta_\varphi \varphi$ 和 $\delta_\varphi E_i$ 是虚电势产生的，分别称为电势和电场强度的经典或局部变分；$\delta_u \varphi = - E_p \delta u_p$ 和 $\delta_u E_i = E_{p,i} \delta u_p$ 是虚位移产生的，分别称为电势和电场强度的迁移变分。迁移变分引起的电能改变，可用作用在电介质上的等效电力所做的功代替。变分需要考虑虚位移时的虚体积变化，因虚体积变化引起的能量变化，往往和迁移变分引起的能量变化是同量级的，这就是在式(3-49)中引入 $\int_V g^e \delta u_{k,k} \mathrm{d}V$，$\int_V g^{env\,e} \delta u_{k,k}^{env} \mathrm{d}V$ 的原因。式(3-49)表示存在迁移变分时的非线性物理变分原理，是经典连续介质力学变分原理的推广。

对于小变形情形还有

$$\int_V \delta g \mathrm{d}V + \int_V g^e \delta u_{k,k} \mathrm{d}V \approx \int_V \delta g \mathrm{d}V + \int_V g \delta u_{k,k} \mathrm{d}V = \delta \int_V g \mathrm{d}V \tag{3-51}$$

利用式(3－43)、(3－44)、(3－50)和 Gauss 散度定理,可得

$$\begin{aligned}
&\int_V \delta g \mathrm{d}V = \int_V \frac{\partial g}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} \mathrm{d}V + \int_V \frac{\partial g}{\partial E_i} \delta E_i \mathrm{d}V = \int_V \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \mathrm{d}V - \int_V D_i \delta E_i \mathrm{d}V = \\
&\quad \int_a \sigma_{ij} n_j \delta u_i \mathrm{d}a - \int_V \sigma_{ij,j} \delta u_i \mathrm{d}V + \int_a D_i n_i \delta_\varphi \varphi \mathrm{d}a - \int_V D_{i,i} \delta_\varphi \varphi \mathrm{d}V - \int_V D_i E_{p,i} \delta u_p \mathrm{d}V \\
&\int_V g^e \delta u_{k,k} \mathrm{d}V = -\frac{1}{2} \int_V (D_k E_k + e_{mkl} E_m \varepsilon_{lk}) \delta u_{k,k} \mathrm{d}V \approx -\frac{1}{2} \int_V D_k E_k \delta u_{k,k} \mathrm{d}V = \\
&\quad -\frac{1}{2} \int_a D_m E_m n_k \delta u_k \mathrm{d}a + \frac{1}{2} \int_V (D_m E_m)_{,k} \delta u_k \mathrm{d}V
\end{aligned} \tag{3-52}$$

注意到

$$\begin{aligned}
&-\int_V D_i E_{p,i} \delta u_p \mathrm{d}V - \int_V \rho_e E_p \delta u_p \mathrm{d}V - \int_{a_D} \sigma^* E_p \delta u_p \mathrm{d}a - \int_a \frac{1}{2} D_m E_m n_k \delta u_k \mathrm{d}V + \int_V \frac{1}{2} (D_m E_m)_{,k} \delta u_k \mathrm{d}V = \\
&\quad -\int_a D_i E_p n_i \delta u_p \mathrm{d}a + \int_V (D_i \delta u_p)_{,i} E_p \mathrm{d}V - \int_V \rho_e E_p \delta u_p \mathrm{d}V - \int_{a_D} \sigma^* E_p \delta u_p \mathrm{d}a - \\
&\quad \int_a \frac{1}{2} D_m E_m n_k \delta u_k \mathrm{d}V + \int_V \frac{1}{2} (D_m E_m)_{,k} \delta u_k \mathrm{d}V = \\
&\quad -\int_{a_D} (D_i n_i + \sigma^*) E_p \delta u_p \mathrm{d}a + \int_V D_i E_p \delta u_{p,i} \mathrm{d}V - \int_{a^{\mathrm{itf}}} D_i n_i E_p \delta u_p \mathrm{d}a + \\
&\quad \int_V (D_{i,i} - \rho_e) E_p \delta u_p \mathrm{d}V - \int_a \frac{1}{2} D_m E_m n_k \delta u_k \mathrm{d}V + \int_V \frac{1}{2} (D_m E_m)_{,k} \delta u_k \mathrm{d}V = \\
&\quad \int_{a_D} (D_i n_i + \sigma^*) \delta_u \varphi \mathrm{d}a + \int_{a^{\mathrm{itf}}} D_i n_i \delta_u \varphi \mathrm{d}a - \int_V (D_{i,i} - \rho_e) \delta_u \varphi \mathrm{d}V + \int_{a_\sigma} \sigma_{ij}^{\mathrm{M}} n_i \delta u_j \mathrm{d}a - \\
&\quad \int_V \sigma_{ij,j}^{\mathrm{M}} \delta u_i \mathrm{d}V
\end{aligned} \tag{3-53}$$

式中 $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}$ 是由虚位移引起的电场变化而产生的“应力”,通常称为 Maxell 应力,它是作用在介质上的“外应力”,是外力。Cauchy 应力是介质内部引起材料破坏的应力。进一步研究表明,对存在电磁体积力偶的情形,$\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}$ 的表达式不变。引入伪总应力 $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{\mathrm{M}}, \quad \sigma_{ij}^{\mathrm{M}} = D_i E_j - \frac{1}{2} D_m E_m \delta_{ij} \tag{3-54}$$

把式(3－52)和(3－53)代入式(3－49)中的 $\delta \Pi_{g1}$,同时注意到变分时外加的 $\rho_e \mathrm{d}V$ 和 $\sigma^* \mathrm{d}a$ 保持不变,$a = a_\sigma + a_u + a^{\mathrm{int}} = a_\rho + a_\varphi + a^{\mathrm{int}}$。从而式(3－49)中的 $\delta \Pi_{g1}$ 可以写成

$$\begin{aligned}
\delta \Pi_{g1} = &\int_{a_\sigma} (\tilde{\sigma}_{ij} n_j - T_i^*) \delta u_i \mathrm{d}a + \int_{a^{\mathrm{itf}}} \tilde{\sigma}_{ij} n_j \delta u_i \mathrm{d}a - \int_V (\tilde{\sigma}_{ij,j} + f_i - \rho \ddot{u}_i) \delta u_i \mathrm{d}V + \\
&\int_{a_D} (D_i n_i + \sigma^*) \delta \varphi \mathrm{d}a + \int_{a^{\mathrm{itf}}} D_i n_i \delta \varphi \mathrm{d}a - \int_V (D_{i,i} - \rho_e) \delta \varphi \mathrm{d}V = 0
\end{aligned} \tag{3-55}$$

根据 $\delta \Pi_g = 0$,顾及 $\delta \boldsymbol{u}$,$\delta \varphi$ 在 V 和 a_σ,a_D 上的变分任意性,便得

$$\tilde{\sigma}_{kl,l} + f_k = \rho \ddot{u}_k,\ D_{k,k} = \rho_e (\text{在电介质内})$$
$$\tilde{\sigma}_{kl} n_l = T_k^* (\text{在 } a_\sigma \text{ 上}),\quad D_k n_k = -\sigma^* (\text{在 } a_D \text{ 上}) \tag{3-56}$$

利用上式可得

$$\delta \Pi_{g1} = \int_{a^{\text{itf}}} \tilde{\sigma}_{ij} n_j \delta u_i \mathrm{d}a + \int_{a^{\text{itf}}} D_i n_i \delta\varphi \mathrm{d}a \tag{3-57}$$

环境中存在类似的公式：

$$\tilde{\sigma}_{ij,j}^{\text{env}} + f_i^{\text{env}} = \rho \ddot{u}_i^{\text{env}},\ D_{i,i}^{\text{env}} = \rho_e^{\text{env}} (\text{在 } V^{\text{env}} \text{ 中})$$
$$\tilde{\sigma}_{ij}^{\text{env}} n_j^{\text{env}} = T_i^{*\text{env}} (\text{在 } a_\sigma^{\text{env}} \text{ 上}),\quad D_i^{\text{env}} n_i^{\text{env}} = -\sigma^{*\text{env}} (\text{在 } a_D^{\text{env}} \text{ 上}) \tag{3-58}$$
$$\delta \Pi_{g2} = \int_{a^{\text{itf}}} \tilde{\sigma}_{ij}^{\text{env}} n_j^{\text{env}} \delta u_i \mathrm{d}a + \int_{a^{\text{itf}}} D_i^{\text{env}} n_i^{\text{env}} \delta\varphi \mathrm{d}a$$

把式(3-57)和(3-58)代入式(3-49)，并注意到 $n_i^{\text{env}} = -n_i$，$u_i = u_i^{\text{env}}$，便可得到界面上的连接条件

$$(\tilde{\sigma}_{ij} - \tilde{\sigma}_{ij}^{\text{env}}) n_j = T_i^{*\text{itf}},\ (D_i - D_i^{\text{env}}) n_i = -\sigma^{*\text{itf}} (\text{在 } a^{\text{itf}} \text{ 上}) \tag{3-59}$$

上面的变分原理已预先假设位移和电势满足边界条件和界面上的连接条件，所以控制方程中还需加入

$$u_i = u_i^* (\text{在 } a_u \text{ 上}),\quad \varphi = \varphi^* (\text{在 } a_\varphi \text{ 上})$$
$$u_i^{\text{env}} = u_i^{*\text{env}} (\text{在 } a_u^{\text{env}} \text{ 上}),\quad \varphi^{\text{env}} = \varphi^{*\text{env}} (\text{在 } a_\varphi^{\text{env}} \text{ 上}) \tag{3-60}$$
$$u_i = u_i^{\text{env}},\quad \varphi = \varphi^{\text{env}} (\text{在 } a^{\text{itf}} \text{ 上})$$

式中 u_i^*，φ^* 是给定的边界值。方程(3-56)、(3-58)、(3-59)和(3-60)便是非线性电弹性分析中的完整控制方程组。如果电介质完全被环境所包围，则式(3-56)中不存在边界条件。如果环境可以略去不计，则只存在式(3-56)。

以往一些文献认为 Maxwell 应力不是唯一的，不同的作者采用不同的公式。其原因可能是：①不同的作者采用不同的材料模型；②某些理论不符合物理变分原理；③某些理论只从电磁场的场方程讨论，没有涉及边界条件；④以往 Maxwell 应力是对无变形的刚性介质提出的，对变形介质中的静电力缺乏研究。我们从热力学能量变分原理出发，考虑变形介质的场方程和边界条件，把刚体看成变形体的极限情形。对于无内耗的、不考虑内部电磁力矩的材料，在二阶精度范围内，所有电 Gibbs 函数都可表示为式(3-46)，在这个意义上，所有变形电介质中的 Maxwell 应力都可表示为相同的公式，且和无变形刚性体的相同。但内耗和存在内部电磁力矩的材料，电 Gibbs 函数不能表为式(3-46)，Maxwell 应力尚需进一步研究。

3.5.3 放松边界条件的一般变分原理

电介质的位移和电势在 a_u，a_φ 上和环境的位移和电势在 a_u^{env}，a_φ^{env} 上都不预设满足边界条件，且在 a^{int} 上也不预设满足界面连续条件。此时电吉布斯函数的一般变分原理可表为

$$\delta \Pi'_g = \delta \Pi'_{g1} + \delta \Pi'_{g2} - \delta W'^{\text{itf}}_g = 0$$
$$\delta \Pi'_{g1} = \delta \int_V g \mathrm{d}V - \int_V (f_k - \rho \ddot{u}_k) \delta u_k \mathrm{d}V + \int_V \rho_e \delta\varphi \mathrm{d}V - \int_{a_\sigma} T_k^* \delta u_k \mathrm{d}a +$$
$$\int_{a_D} \sigma^* \delta\varphi \mathrm{d}a - \delta \int_{a_u} \widetilde{T}_k (u_k - u_k^*) \mathrm{d}a + \delta \int_{a_\varphi} \sigma (\varphi - \varphi^*) \mathrm{d}a$$

$$
\begin{aligned}
\delta \Pi'_{g2} = & \delta\int_{V^{\mathrm{env}}} g^{\mathrm{env}} \mathrm{d}V - \int_{V^{\mathrm{env}}} (f_k^{\mathrm{env}} - \rho^{\mathrm{env}}\ \ddot{u}_k^{\mathrm{env}}) \delta u_k^{\mathrm{env}} \mathrm{d}V + \int_{V^{\mathrm{env}}} \rho_e^{\mathrm{env}} \delta\varphi^{\mathrm{env}} \mathrm{d}V - \\
& \int_{a_\sigma^{\mathrm{env}}} T_k^{*\,\mathrm{env}} \delta u_k^{\mathrm{env}}\, \mathrm{d}a + \int_{a_D^{\mathrm{env}}} \sigma^{*\,\mathrm{env}} \delta\varphi^{\mathrm{env}} \mathrm{d}a - \delta\int_{a_u^{\mathrm{env}}} \widetilde{T}_k^{\mathrm{env}} (u_k^{\mathrm{env}} - u_k^{*\,\mathrm{env}}) \mathrm{d}a + \\
& \delta\int_{a_\varphi^{\mathrm{env}}} \sigma^{\mathrm{env}} (\varphi^{\mathrm{env}} - \varphi^{*\,\mathrm{env}}) \mathrm{d}a
\end{aligned} \tag{3-61}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta W'^{\mathrm{itf}}_g = & \delta\int_{a^{\mathrm{itf}}} \widetilde{T}_k (u_k - u_k^{\mathrm{env}}) \mathrm{d}a - \delta\int_{a^{\mathrm{itf}}} \sigma(\varphi - \varphi^{\mathrm{env}}) \mathrm{d}a + \\
& \int_{a^{\mathrm{itf}}} T_k^{*\,\mathrm{itf}} \delta[\beta u_k + (1-\beta) u_k^{\mathrm{env}}] \mathrm{d}a - \int_{a^{\mathrm{itf}}} \sigma^{*\,\mathrm{itf}} \delta[\beta' \varphi + (1-\beta')\varphi^{\mathrm{env}}] \mathrm{d}a
\end{aligned}
$$

完成式(3-61)的变分后得

$$
\begin{aligned}
& \tilde{\sigma}_{kl,l} + f_k = \rho\, \ddot{u}_k,\ D_{k,k} = \rho_e (\text{在电介质内}) \\
& \tilde{\sigma}_{kl,l}^{\mathrm{env}} + f_k^{\mathrm{env}} = \rho^{\mathrm{env}}\ \ddot{u}_k^{\mathrm{env}},\ D_{i,i}^{\mathrm{env}} = \rho_e^{\mathrm{env}} (\text{在环境内}) \\
& \tilde{\sigma}_{kl} n_l = T_k^* (\text{在 } a_\sigma \text{ 上}),\quad D_k n_k = -\sigma^* (\text{在 } a_D \text{ 上}) \\
& \tilde{\sigma}_{ij}^{\mathrm{env}} n_j^{\mathrm{env}} = T_i^{*\,\mathrm{env}} (\text{在 } a_\sigma^{\mathrm{env}} \text{ 上}),\quad D_i^{\mathrm{env}} n_i^{\mathrm{env}} = -\sigma^{*\,\mathrm{env}} (\text{在 } a_D^{\mathrm{env}} \text{ 上}) \\
& u_k = u_k^*,\ \tilde{\sigma}_{kl} n_l = \widetilde{T}_k (\text{在 } a_u \text{ 上}) \\
& \varphi = \varphi^*,\ D_k n_k = -\sigma (\text{在 } a_\varphi \text{ 上}) \\
& u_k^{\mathrm{env}} = u_k^{*\,\mathrm{env}},\ \tilde{\sigma}_{ij}^{\mathrm{env}} n_j^{\mathrm{env}} = \widetilde{T}_i^{\mathrm{env}} (\text{在 } a_u^{\mathrm{env}} \text{ 上}) \\
& \varphi^{\mathrm{env}} = \varphi^{*\,\mathrm{env}},\ D_i^{\mathrm{env}} n_i^{\mathrm{env}} = -\sigma^{*\,\mathrm{env}} (\text{在 } a_\varphi^{\mathrm{env}} \text{ 上}) \\
& u_k = u_k^{\mathrm{env}},\ \tilde{\sigma}_{kl} n_l - \tilde{\sigma}_{kl}^{\mathrm{env}} n_l = T_k^{*\,\mathrm{itf}} (\text{在 } a^{\mathrm{itf}} \text{ 上}) \\
& \varphi = \varphi^{\mathrm{env}},\ D_k n_k - D_k^{\mathrm{env}} n_k = -\sigma^{*\,\mathrm{itf}} (\text{在 } a^{\mathrm{itf}} \text{ 上})
\end{aligned} \tag{3-62}
$$

式(3-62)是完整的控制方程组，工程中常用的方程都可从该式推出。利用 Lagrange 乘子法[28]和二变量和三变量的变分原理亦可求得，此处省略。

3.5.4 Hamilton(汉密尔顿)原理

Hamilton 原理可以容易地由上述变分原理推出。我们在时间间隔$[t_0,\ t_f]$考虑变分原理，并设初始时刻 $\delta u_{k0} = 0$ 和终了时刻 $\delta u_{kf} = 0$，则有

$$
\begin{aligned}
\delta\int_{t_0}^{t_f}\int_V K\,\mathrm{d}V\mathrm{d}t = & \delta\int_{t_0}^{t_f}\int_V \frac{1}{2}\rho\,\dot{u}_k\,\dot{u}_k \mathrm{d}V\mathrm{d}t = \int_{t_0}^{t_f}\int_V \rho\,\dot{u}_k \delta\,\dot{u}_k \mathrm{d}V\mathrm{d}t = \\
& \int_V\int_{t_0}^{t_f} [\rho\mathrm{d}(\dot{u}_k \delta u_k)/\mathrm{d}t - \rho\,\ddot{u}_k \delta u_k] \mathrm{d}t\mathrm{d}V = -\int_{t_0}^{t_f}\int_V \rho\,\ddot{u}_k \delta u_k \mathrm{d}V\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{3-63}
$$

式中 $K = \rho\dot{u}_k\,\dot{u}_k/2$ 是动能。把式(3-63)代入式(3-49)，再对时间积分，便得 Hamilton 原理

$$
\begin{aligned}
& \delta H = \delta H_1 + \delta H_2 - \int_{t_0}^{t_f} \delta W^{*\,\mathrm{itf}} \mathrm{d}t = 0 \\
& \delta H_1 = \delta\int_{t_0}^{t_f}\int_V g\,\mathrm{d}V\mathrm{d}t - \delta\int_{t_0}^{t_f}\int_V K\,\mathrm{d}V\mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_f} \delta W_1^*\,\mathrm{d}t \\
& \delta H_2 = \delta\int_{t_0}^{t_f}\int_{V^{\mathrm{env}}} g^{\mathrm{env}} \mathrm{d}V\mathrm{d}t - \delta\int_{t_0}^{t_f}\int_{V^{\mathrm{env}}} K^{\mathrm{env}} \mathrm{d}V\mathrm{d}t - \int_{t_0}^{t_f} \delta W_2^*\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta W_1^* &= \int_V f_k \delta u_k \mathrm{d}V - \int_V \rho_e \delta\varphi \mathrm{d}V + \int_{a_\sigma} T_k^* \delta u_k \mathrm{d}a - \int_{a_D} \sigma^* \delta\varphi \mathrm{d}a \\
\delta W_2^* &= \int_{V^{\mathrm{env}}} f_k^{\mathrm{env}} \delta u_k^{\mathrm{env}} \mathrm{d}V - \int_{V^{\mathrm{env}}} \rho_e^{\mathrm{env}} \delta\varphi^{\mathrm{env}} \mathrm{d}V + \int_{a_\sigma^{\mathrm{env}}} T_k^{*\mathrm{env}} \delta u_k^{\mathrm{env}} \mathrm{d}a - \int_{a_D^{\mathrm{env}}} \sigma^{*\mathrm{env}} \delta k^{\mathrm{env}} \mathrm{d}a \\
\delta W^{*\mathrm{itf}} &= \int_{a^{\mathrm{int}}} T_k^{*\mathrm{itf}} \delta u_k \mathrm{d}a - \int_{a^{\mathrm{int}}} \sigma^{*\mathrm{itf}} \delta\varphi \mathrm{d}a
\end{aligned}
\tag{3-64}
$$

由上式可见，在满足 $\delta u_{k0} = \delta u_{kf} = 0$ 的条件下，变分原理是对一段时间间隔的积分取变分，即取 $\delta\int_{t_0}^{t_f}\int_V (g - K)\mathrm{d}V\mathrm{d}t$。能量守恒原理和 Hamilton 原理不同，它是真实的物理过程，和式(3-49)相对应的是要用真实的无穷小位移代替那里的虚位移，而且惯性力的一项要用动能增量代替，即用 $\mathrm{d}(\dot{\boldsymbol{u}} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}/2) = \mathrm{d}K$ 代替 $\rho\ddot{\boldsymbol{u}}\,\mathrm{d}\boldsymbol{u}$，所以能量守恒原理在小变形时需要写成

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{d}\int_V g\,\mathrm{d}V + \mathrm{d}\int_V K\,\mathrm{d}V + \mathrm{d}\int_{V^{\mathrm{env}}} g^{\mathrm{env}}\mathrm{d}V + \mathrm{d}\int_V K^{\mathrm{env}}\mathrm{d}V = \int_V f_k \mathrm{d}u_k \mathrm{d}V + \int_{a_\sigma} T_k^* \mathrm{d}u_k \mathrm{d}a - \\
&\quad \int_V \rho_e \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}V - \int_{a_D} \sigma^* \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}a + \int_{V^{\mathrm{env}}} f_k^{\mathrm{env}} \mathrm{d}u_k^{\mathrm{env}} \mathrm{d}V + \int_{a_\sigma^{\mathrm{env}}} T_k^{*\mathrm{env}} \mathrm{d}u_k^{\mathrm{env}} \mathrm{d}a - \\
&\quad \int_{V^{\mathrm{env}}} \rho_e^{\mathrm{env}} \mathrm{d}\varphi^{\mathrm{env}} \mathrm{d}V - \int_{a_D^{\mathrm{env}}} \sigma^{*\mathrm{env}} \mathrm{d}\varphi^{\mathrm{env}} \mathrm{d}a + \int_{a^{\mathrm{itf}}} T_k^{*\mathrm{itf}} \mathrm{d}u_k \mathrm{d}a - \int_{a^{\mathrm{itf}}} \sigma^{*\mathrm{itf}} \mathrm{d}\varphi \mathrm{d}a \\
&\mathrm{d}\int_V K\,\mathrm{d}V = \mathrm{d}\int_V \rho(\dot{\boldsymbol{u}} \cdot \dot{\boldsymbol{u}})/2\mathrm{d}V, \quad \mathrm{d}\int_V K^{\mathrm{env}}\mathrm{d}V = \mathrm{d}\int_{V^{\mathrm{env}}} \rho^{\mathrm{env}}(\dot{u}_k^{\mathrm{env}}\,\dot{u}_k^{\mathrm{env}})/2\mathrm{d}V
\end{aligned}
$$

上式在任何瞬时都成立，因而对任何时间间隔的积分也成立，且取用 $g + K$ 进入原理。由此也可明显看出，热力学第一定律确实包含了两个不同的原理，一个是能量守恒原理，它的增量位移是真实的，运动物体存在固有的动能，增量取用 $\mathrm{d}(\dot{\boldsymbol{u}} \cdot \dot{\boldsymbol{u}}/2)$；另一个是物理变分原理，它代表的是动量原理，在虚位移过程中，把 $\rho\ddot{\boldsymbol{u}}\,\delta\boldsymbol{u}$ 看成惯性力作的微虚功。

进一步可以看出，热力学两大定律决定了连续介质力学的全部控制方程。由第一定律推出能量守恒方程；由物理变分原理推出动量方程；由热力学特征函数是态函数推出(第一类)本构方程；由热力学第一和第二定律推出演化方程，或第二类本构方程[4]。

利用 Lagrange 乘子法[28]，其他多变量的 Hamilton 变分原理可类似地获得。

3.5.5 变分原理的简化形式

位移的变化引起电势的变化和小变形时体积改变引起电 Gibbs 自由能改变，这给数值分析带来困难，为避免这种困难，可以采用简化的变分原理。

1) 第一简化形式

由式(3-56)、(3-58)、(3-59)和(3-62)知，如在控制方程中使用$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$代替 $\boldsymbol{\sigma}$，$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}^{\mathrm{env}}$代替 $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{evn}}$，那么，压电介质的控制方程和弹性体的控制方程在形式上是一致的。因此，如在式(3-49)和(3-61)中用 $\int_V \delta\tilde{g}\mathrm{d}V$ 代替 $\delta\int_V g\mathrm{d}V$，用$\int_{V^{\mathrm{env}}} \delta\tilde{g}^{\mathrm{env}}\mathrm{d}V$ 代替 $\delta\int_{V^{\mathrm{env}}} g^{\mathrm{env}}\mathrm{d}V$，则下述变分原理成立

$$
\begin{aligned}
&\delta\hat{\Pi}_1 = \int_V \delta\tilde{g}\mathrm{d}V + \int_{V^{\mathrm{env}}} \delta\tilde{g}^{\mathrm{env}}\mathrm{d}V^{\mathrm{env}} - \delta W^* - \delta W^{*\mathrm{env}} - \delta W^{*\mathrm{itf}} = 0 \\
&\delta\tilde{g} = \tilde{\sigma}_{ij}\delta u_{i,j} + D_i\delta\varphi_{,i}, \quad \delta\tilde{g}^{\mathrm{env}} = \tilde{\sigma}_{ij}^{\mathrm{env}}\delta u_{i,j}^{\mathrm{env}} + D_i^{\mathrm{env}}\delta\varphi_{,i}^{\mathrm{env}}
\end{aligned}
\tag{3-65}
$$

式中 δW^*，$\delta W^{*\text{env}}$，$\delta W^{*\text{itf}}$ 仍由式(3-49)表示。此时式中 $\delta\boldsymbol{u}$ 和 $\delta\varphi$ 便都是相互独立的，不再需要考虑电势的迁移变分。利用式(3-44)和(3-54)，可以直接采用 $\tilde{\sigma}_{kl}$，D_k 的假想"本构方程"

$$
\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{kl} &= C_{ijkl}u_{i,j} + e_{jkl}\varphi_{,j} - \frac{1}{2}l_{ijkl}\varphi_{,i}\,\varphi_{,j} - \frac{1}{2}a_{lm}\varphi_{,m}\,\varphi_{,k} + \tilde{\varepsilon}_{km}\varphi_{,m}\,\varphi_{,l} - \\
&\quad \frac{1}{2}\tilde{\varepsilon}_{nm}\varphi_{,m}\,\varphi_{,n}\,\delta_{kl} - e_{kij}u_{i,j}\,\varphi_{,l} - \frac{1}{2}e_{nij}u_{i,j}\varphi_{,n}\delta_{kl} \\
D_k &= \tilde{\varepsilon}_{kl}E_l + e_{kij}\varepsilon_{ij}, \quad \tilde{\varepsilon}_{kl} = \varepsilon_{kl} + l_{klij}\varepsilon_{ji}
\end{aligned}
\tag{3-66}
$$

2) 第二简化形式和能量迁移变分原理

利用

$$
\int_V \sigma_{ij}^{\mathrm{M}}\,\delta u_{i,j}\mathrm{d}V = \int_a \sigma_{ij}^{\mathrm{M}}\,n_j\delta u_i\mathrm{d}a - \int_V \sigma_{ij,j}^{\mathrm{M}}\,\delta u_i\mathrm{d}V = \int_a T_i^{\mathrm{e}}\,\delta u_i\mathrm{d}a - \int_V f_i^{\mathrm{e}}\,\delta u_i\mathrm{d}V
$$

$$
f_i^{\mathrm{e}} = \sigma_{ij,j}^{\mathrm{M}} = (D_iE_j - D_mE_m\delta_{ij}/2)_{,j}, \quad T_i^{\mathrm{e}} = \sigma_{ij}^{\mathrm{M}}n_j = (D_iE_j - D_mE_m\delta_{ij}/2)n_j
$$

在式(3-49)中，用 $f_k + f_k^{\mathrm{e}}$ 代替 f_k，用 $T_k^* - T_k^{\mathrm{e}}$ 代替 T_k^*，在环境中有类似的公式。则此时 $\boldsymbol{u}$，φ 和 $\boldsymbol{u}^{\text{env}}$，$\varphi^{\text{env}}$ 均可独立变分，不需考虑虚位移引起电势的变化和体积变化引起的影响。由此推得变分原理的第二简化形式为

$$
\begin{aligned}
\delta\hat{\Pi}_2 &= \int_V \delta g\mathrm{d}V + \int_{V^{\text{env}}}\delta g^{\text{env}}\mathrm{d}V - \delta\hat{W}^* - \delta\hat{W}^{*\text{env}} - \delta W^{*\text{itf}} = 0 \\
\delta\hat{W}^* &= \int_V (f_k + f_k^{\mathrm{e}} - \rho\ddot{u}_k)\delta u_k\mathrm{d}V - \int_V \rho_{\mathrm{e}}\delta_\varphi\mathrm{d}V + \int_{a_\sigma}(T_k^* - T_k^{\mathrm{e}})\delta u_k\mathrm{d}a - \int_{a_D}\sigma^*\,\delta\varphi\mathrm{d}a \\
\delta\hat{W}^{*\text{env}} &= \int_{V^{\text{env}}}(f_k^{\text{env}} + f_k^{\text{env e}} - \rho\ddot{u}_k)\delta u_k\mathrm{d}V - \int_{V^{\text{env}}}\rho_{\mathrm{e}}\delta\varphi\mathrm{d}V + \\
&\quad \int_{a_\sigma^{\text{env}}}(T_k^{*\text{env}} - T_k^{\text{env e}})\delta_{uk}\mathrm{d}a - \int_{a_D^{\text{env}}}\sigma^*\,\delta\varphi\mathrm{d}a \\
\delta W^{*\text{itf}} &= \int_{a^{\text{itf}}}(T_k^{*\text{itf}} - T_k^{\mathrm{e}} + T_k^{\text{env e}})\delta u_k\mathrm{d}a - \int_{a^{\text{itf}}}\sigma^{*\text{itf}}\delta\varphi\mathrm{d}a
\end{aligned}
\tag{3-67}
$$

由上述变分原理导出的控制方程为

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{ij,i} + (f_j + f_j^{\mathrm{e}}) = \rho\ddot{u}_j, \; D_{i,i} = \rho_{\mathrm{e}}(\text{在 } V \text{ 内}) \\
&\sigma_{ij}n_i = T_j^* - T_j^{\mathrm{e}*}(\text{在 } a_\sigma \text{ 上}), \quad D_in_i = -\sigma^*(\text{在 } a_D \text{ 上}) \\
&\sigma_{ij,j}^{\text{env}} + (f_i^{\text{env}} + f_i^{\text{env e}}) = \rho\ddot{u}_i^{\text{env}}, \; D_{i,i}^{\text{env}} = \rho_{\mathrm{e}}^{\text{env}}(\text{在 } V^{\text{env}} \text{ 内}) \\
&\sigma_{ij}^{\text{env}}n_j^{\text{env}} = (T_i^{*\text{env}} - T_i^{\text{env e}})(\text{在 } a_\sigma^{\text{env}} \text{ 上}), \quad D_i^{\text{env}}n_i^{\text{env}} = -\sigma^{*\text{env}}(\text{在 } a_D^{\text{env}} \text{ 上}) \\
&(\sigma_{kl} - \sigma_{kl}^{\text{env}})n_l = T_k^{*\text{itf}} - T_i^{\mathrm{e}} + T_i^{\text{env e}}, \; D_kn_k - D_k^{\text{env}}n_k = -\sigma^{*\text{itf}}(\text{在 } a^{\text{itf}} \text{ 上})
\end{aligned}
\tag{3-68}
$$

由上面的讨论可推出求等效电场力的最一般的能量迁移变分原理，也可以看成等效电场力的定义。

$$
\int_V f_k^{\mathrm{e}}\delta u_k\mathrm{d}V + \int_a T_k^{*\mathrm{e}}\delta u_k\mathrm{d}a = \int_V (g_{,\boldsymbol{E}}\cdot\delta_u\boldsymbol{E})\mathrm{d}V + \int_V g^{\mathrm{e}}\delta u_{k,k}\mathrm{d}V + \int_V \rho_{\mathrm{e}}\delta_u\varphi\mathrm{d}V + \int_{a_D}\sigma^*\,\delta_u\varphi\mathrm{d}a
\tag{3-69}
$$

式中 $a = a_\sigma + a^{\text{itf}}$。式(3-49)把变分理论中的电场力做功的公式 $\int_V f_k^{\mathrm{e}}\delta u_k\mathrm{d}V + \int_a T_k^{*\mathrm{e}}\delta u_k\mathrm{d}a$ 用原始的存储在介质中的电 Gibbs 函数相应的增量来代替。事实上由式(3-69)求出的电力正

是 $T_k^{*e}=\sigma_{jk}^m n_j$，$f_k^{*e}=\sigma_{jk,j}^m$，和式(3-54)中的 Maxwell 应力一致。

应当注意，第一简化变分原理在计算工作中是较为方便的，但只有在控制方程已知时才是可能得到的，它只是数学意义上的变分原理。而前面我们指出的热力学变分原理是物理变分原理，由它可以直接推导基本方程。

许多作者并不从变分原理出发来建立控制方程，而是直接用动力学方程来建立。作者们用不同的方法来得到 f_i^E，T_i^E，例如由类似 Lorentz 那样的微观力学方法，或是利用式(2-31)那样的电介质中电磁场引起的载流体的质量力密度公式，由于对极化和磁化等不同的假设，给出的体积力公式也存在差别。这在前面已有说明。

3.5.6 有限变形时的电介质标准变分原理[29, 30]

本小节讨论有限变形时的电介质-环境变分原理。假设电介质不完全为环境所包围，但设位移和电势在 a_u，a_φ，a_u^{env}，a_φ^{env}上满足边界条件，在 a^{itf}满足界面连续条件。有限变形中的一些基本公式已在第 1 章中的 1.3 节给出。本书中现时构形和初始构形取用同一坐标系，用字母上方带小横线“—”的量表示初始构形中的量，如$\bar{\boldsymbol{\sigma}}$，$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$分别为 Kirchhoff 应力和 Green 应变。应当注意，没有微分符号或微分符号前的大、小写下标是没有区别的，如 $\sigma_{ij}=\sigma_{IJ}$；但微分符号后面的大、小写下标是不同的，如 $u_{I,J}=u_{i,k}x_{k,J}$。

由不变量函数理论知，初始构形中的电 Gibbs 自由能$\bar{g}$可取下列形式

$$\begin{gathered}\bar{g}=\frac{1}{2}\bar{C}_{IJKL}\bar{\varepsilon}_{JI}\bar{\varepsilon}_{LK}-\frac{1}{2}\bar{\epsilon}_{KL}\bar{E}_K\bar{E}_L-\bar{e}_{KIJ}\bar{E}_K\bar{\varepsilon}_{IJ}-\frac{1}{2}\bar{l}_{IJKL}\bar{E}_I\bar{E}_J\bar{\epsilon}_{LK}+\cdots\\\bar{C}_{IJKL}=\bar{C}_{JIKL}=\bar{C}_{IJLK}=\bar{C}_{KLIJ},\quad\bar{\epsilon}_{KL}=\bar{\epsilon}_{LK},\quad\bar{e}_{KIJ}=\bar{e}_{KJI},\quad\bar{l}_{IJKL}=\bar{l}_{JIKL}=\bar{l}_{IJLK}=\bar{l}_{KLIJ}\end{gathered}\tag{3-70a}$$

式中$\bar{C}_{IJKL}$，$\bar{e}_{KIJ}$，$\bar{\epsilon}_{KL}$，$\bar{l}_{IJKL}$分别为采用初始构形时的刚度、压电、介电、电致伸缩系数，他们和小变形时不同，但可相互转换。由热力学理论知，本构方程为

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_{KL}&=\partial\bar{g}/\partial\bar{\varepsilon}_{KL}=\bar{C}_{IJKL}\bar{\varepsilon}_{IJ}-\bar{e}_{JKL}\bar{E}_J-(1/2)\bar{l}_{IJKL}\bar{E}_I\bar{E}_J\\\bar{D}_K&=-\partial\bar{g}/\partial\bar{E}_K=\tilde{\epsilon}_{KL}\bar{E}_L+\bar{e}_{KIJ}\bar{\epsilon}_{IJ},\ \tilde{\epsilon}_{KL}=\bar{\epsilon}_{KL}+\bar{l}_{KLIJ}\bar{\varepsilon}_{IJ}\end{aligned}\tag{3-71}$$

利用上式，式(3-70a)可化为

$$\bar{g}(\bar{\epsilon}_{KL},\bar{E}_K)=\frac{1}{2}\bar{C}_{IJKL}\bar{\epsilon}_{IJ}\bar{\epsilon}_{KL}+\bar{g}^e,\ \bar{g}^e=-\frac{1}{2}(\bar{D}_K\bar{E}_K+\bar{e}_{KML}\bar{\epsilon}_{ML}\bar{E}_K)\tag{3-70b}$$

式中$\bar{g}^e$ 是和电场有关的电 Gibbs 函数部分。

根据前面的说明，虚位移不仅产生虚应变，而且产生电势的变化，所以对电介质有

$$\begin{aligned}&\delta\varphi=\delta_\varphi\varphi+\delta_u\varphi,\ \delta_u\varphi=\varphi_{,p}\delta u_p=-E_p\delta u_p=-\bar{E}_L X_{L,p}\delta u_p\\&\delta\bar{E}_I=\delta_\varphi\bar{E}_I+\delta_u\bar{E}_I,\ \delta_u\bar{E}_I=\bar{E}_{I,p}\delta u_p=\bar{E}_{I,L}X_{L,p}\delta u_p=\bar{E}_{L,I}X_{L,p}\delta u_p\end{aligned}\tag{3-72}$$

应当注意，$\delta\boldsymbol{u}$ 和 $\delta\varphi$ 是虚位移和虚电势在现时构形中变分，$\delta_\varphi\varphi$ 是局部变分，$\delta_u\varphi$ 是迁移变分，且 $\delta_u\varphi=\varphi_{,p}\delta u_p$，在初始构形中讨论时，所有物理量都要进行适当的变换。

在初始构形中，有限变形时的电介质—环境变分原理可表示为

$$\delta\overline{\Pi}=\delta\overline{\Pi}_1+\delta\overline{\Pi}_2-\delta\overline{W}^{*\mathrm{itf}}=0$$

$$\delta\overline{\Pi}_1=\int_{\overline{V}}\delta\overline{g}\,\mathrm{d}\overline{V}+\int_{\overline{V}}\overline{g}^{\mathrm{e}}\delta u_{k,k}\,\mathrm{d}\overline{V}-\delta\overline{W}_1^*$$

$$\delta\overline{\Pi}_2=\delta\int_{\overline{V}^{\mathrm{env}}}\overline{g}^{\mathrm{env}}\,\mathrm{d}\overline{V}+\int_{\overline{V}}\overline{g}^{\mathrm{env\,e}}\delta u_{k,k}\,\mathrm{d}\overline{V}-\delta\overline{W}_2^*$$

$$\delta\overline{W}_1^*\int_{\overline{V}}(\overline{f}_K-\overline{\rho}\ddot{u}_K)\delta u_k\,\mathrm{d}\overline{V}-\int_{\overline{V}}\overline{\rho}_{\mathrm{e}}\delta\varphi\,\mathrm{d}\overline{V}+\int_{\overline{a}_\sigma}\overline{T}_K^*\delta u_k\,\mathrm{d}\overline{a}-\int_{\overline{a}_D}\overline{\sigma}^*\delta\varphi\,\mathrm{d}\overline{a}\qquad(3-73)$$

$$\delta\overline{W}_2^*=\int_{\overline{V}^{\mathrm{env}}}(\overline{f}_K^{\mathrm{env}}-\overline{\rho}^{\mathrm{env}}\ddot{u}_K^{\mathrm{env}})\delta u_k^{\mathrm{env}}\,\mathrm{d}\overline{V}-\int_{\overline{V}^{\mathrm{env}}}\overline{\rho}_{\mathrm{e}}^{\mathrm{env}}\delta_\varphi{}^{\mathrm{env}}\,\mathrm{d}\overline{V}+$$
$$\int_{\overline{a}_\sigma^{\mathrm{env}}}\overline{T}_K^{*\mathrm{env}}\delta u_k^{\mathrm{env}}\,\mathrm{d}\overline{a}-\int_{\overline{a}_D^{\mathrm{env}}}\overline{\sigma}^{*\mathrm{env}}\delta\varphi^{\mathrm{env}}\,\mathrm{d}\overline{a}$$

$$\delta\overline{W}^{*\mathrm{itf}}=\int_{\overline{a}^{\mathrm{itf}}}\overline{T}_K^{*\mathrm{itf}}\delta u_k\,\mathrm{d}\overline{a}-\int_{\overline{a}^{\mathrm{itf}}}\overline{\sigma}^{*\mathrm{itf}}\delta\varphi\,\mathrm{d}\overline{a}$$

式中$\overline{f}_K$，$\overline{T}_K^*$，$\overline{\rho}_{\mathrm{e}}$和$\overline{\sigma}^*$分别是初始构形中给定的介质的体力、表面力、体电荷密度和面电荷密度；对环境有同样的公式；$\overline{a}^{\mathrm{itf}}$是初始界面，$\overline{T}_K^{*\mathrm{itf}}$和$\overline{\sigma}^{*\mathrm{itf}}$分别是初始界面上给定的面力和面电荷。本质上物理变分原理是在现时构形中讨论所有各种物理量的无限小的局部和迁移变分，特别是迁移变分和作用在介质上的电力相关，电力不是问题给定的，而是和变形相关的。在初始构形中讨论时要作合适的变换，式(3－73)中的项$\int_{\overline{V}}\overline{g}^{\mathrm{e}}\delta u_{k,k}\,\mathrm{d}\overline{V}$和$\int_{\overline{V}}\overline{g}^{\mathrm{env\,e}}\delta u_{k,k}\,\mathrm{d}\overline{V}$便是这一反映。

对电介质应用 Gauss 散度定理，得

$$\int_{\overline{V}}\delta\overline{g}\,\mathrm{d}\overline{V}+\int_{\overline{V}}\overline{g}^{\mathrm{e}}\delta u_{i,i}\,\mathrm{d}\overline{V}=\int_V\delta g\,\mathrm{d}V+\int_V g^{\mathrm{e}}\delta u_{i,i}\,\mathrm{d}V=$$
$$\int_{\overline{V}}(\overline{\sigma}_{IJ}\delta\overline{\varepsilon}_{IJ}-\overline{D}_I\delta\overline{E}_I)\,\mathrm{d}\overline{V}+\int_{\overline{V}}\frac{1}{2}\overline{\Gamma}_N\varphi_{,N}\delta u_{k,k}\,\mathrm{d}\overline{V}=$$
$$\int_{\overline{V}}[\overline{\sigma}_{IJ}x_{k,I}\delta u_{k,J}-\overline{D}_I(-\delta_\varphi\varphi_{,I}+\overline{E}_{L,I}X_{L,p}\delta u_p)]\,\mathrm{d}\overline{V}+\frac{1}{2}\int_{\overline{V}}\overline{\Gamma}_N\varphi_{,N}X_{J,k}\delta u_{k,J}\,\mathrm{d}\overline{V}=$$
$$\int_{\overline{a}}\left(\overline{\sigma}_{IJ}x_{k,I}+\frac{1}{2}\overline{\Gamma}_N\varphi_{,N}X_{J,k}\right)\overline{n}_J\delta u_k\,\mathrm{d}\overline{a}-\int_{\overline{V}}\left(\overline{\sigma}_{IJ}x_{k,I}+\frac{1}{2}\overline{\Gamma}_N\varphi_{,N}X_{J,k}\right)_{,J}\delta u_k\,\mathrm{d}\overline{V}+$$
$$\int_{\overline{a}}\overline{D}_I\overline{n}_I\delta_\varphi\varphi\,\mathrm{d}\overline{a}-\int_{\overline{V}}\overline{D}_{I,I}\delta_\varphi\varphi\,\mathrm{d}\overline{V}-\int_{\overline{V}}\overline{D}_I\overline{E}_{L,I}X_{L,p}\delta u_p\,\mathrm{d}\overline{V}$$

(3－74)

式中$\overline{\Gamma}_N=\overline{D}_N+\overline{e}_{NML}\overline{\varepsilon}_{ML}$。上式还应用了$\delta u_{k,k}=X_{J,k}\delta u_{k,J}$，从而式(3－73)中的$\delta\overline{\Pi}_1$化为

$$\delta\overline{\Pi}_1=\int_{\overline{a}}[(\overline{\sigma}_{IJ}x_{k,I}+(1/2)(\overline{\Gamma}_N\varphi_{,N}X_{J,k})\overline{n}_J]\delta u_k\,\mathrm{d}\overline{a}-\int_{\overline{a}_\sigma}\overline{T}_k^*\delta u_k\,\mathrm{d}\overline{a}-$$
$$\int_{\overline{V}}[(\overline{\sigma}_{IJ}x_{k,I}+(1/2)\overline{\Gamma}_N\varphi_{,N}X_{J,k})_{,J}+\overline{f}_k-\overline{\rho}\ddot{u}_k]\delta u_k\,\mathrm{d}\overline{V}+\int_{\overline{a}_D}(\overline{D}_I\overline{n}_I+\overline{\sigma}^*)\delta_\varphi\varphi\,\mathrm{d}\overline{a}+$$
$$\int_{\overline{a}^{\mathrm{itf}}}\overline{D}_I\overline{n}_I\delta_\varphi\varphi\,\mathrm{d}\overline{a}-\int_{\overline{V}}(\overline{D}_{I,I}-\overline{\rho}_{\mathrm{e}})\delta_\varphi\varphi\,\mathrm{d}\overline{V}-\int_{\overline{V}}\overline{D}_I\overline{E}_{L,I}X_{L,p}\delta u_p\,\mathrm{d}\overline{V}-$$
$$\int_{\overline{V}}\overline{\rho}_{\mathrm{e}}E_p\delta u_p\,\mathrm{d}\overline{V}-\int_{\overline{a}_D}\overline{\sigma}^*E_p\delta u_p\,\mathrm{d}\overline{a}$$

(3－75a)

注意到式(3－75a)中的最后三项存在以下关系

$$-\int_{\bar{V}}\overline{D}_I\overline{E}_{L,I}X_{L,p}\delta u_p \mathrm{d}\overline{V}-\int_{\bar{V}}\bar{\rho}_e E_p\delta u_p\mathrm{d}\overline{V}-\int_{\bar{a}_D}\bar{\sigma}^* E_p\delta u_p\mathrm{d}\bar{a}=$$

$$-\int_{\bar{a}}\overline{D}_I\overline{E}_L X_{L,p}\bar{n}_I\delta u_p\mathrm{d}\bar{a}+\int_{\bar{V}}(\overline{D}_I X_{L,p}\delta u_p)_{,I}\overline{E}_L\mathrm{d}\overline{V}-\int_{\bar{V}}\bar{\rho}_e E_p\delta u_p\mathrm{d}\overline{V}-\int_{\bar{a}_D}\bar{\sigma}^* E_p\delta u_p\mathrm{d}\bar{a}=$$

$$-\int_{\bar{a}^{\mathrm{int}}}\overline{D}_I\bar{n}_I E_p\delta u_p\mathrm{d}\bar{a}-\int_{\bar{a}_D}(\overline{D}_I\bar{n}_I+\bar{\sigma}^*)E_p\delta u_p\mathrm{d}\bar{a}+\int_{\bar{V}}\overline{D}_I\overline{E}_L X_{L,p}\delta u_{p,I}\mathrm{d}\overline{V}+$$

$$\int_{\bar{V}}(\overline{D}_{I,I}-\bar{\rho}_e)E_p\delta u_p\mathrm{d}\overline{V}$$

式中利用了 $X_{L,p}\delta u_p\overline{E}_L=-X_{L,p}\delta u_p\varphi_{,L}=-\delta u_p\varphi_{,p}=E_p\delta u_p$。把上式代入式(3－75a)，便得

$$\begin{aligned}\delta\overline{\Pi}_1=&\int_{\bar{a}_\sigma}[(\bar{\sigma}_{IJ}x_{k,I}+(1/2)\overline{\Gamma}_N\varphi_{,N}X_{J,k})\bar{n}_J-\overline{T}_k^*]\delta u_k\mathrm{d}\bar{a}+\\&\int_{\bar{a}^{\mathrm{itf}}}\left(\bar{\sigma}_{IJ}x_{k,I}+\frac{1}{2}\overline{D}_N\varphi_{,N}X_{J,k}\right)\bar{n}_J\delta u_k\mathrm{d}\bar{a}-\\&\int_{\bar{V}}[(\bar{\sigma}_{IJ}x_{k,I}+(1/2)\overline{\Gamma}_N\varphi_{,N}X_{J,k})_{,J}+\bar{f}_k-\bar{\rho}\ddot{u}_k]\delta u_k\mathrm{d}\overline{V}+\int_{\bar{a}_D}(\overline{D}_I\bar{n}_I+\bar{\sigma}^*)\delta_\varphi\varphi\mathrm{d}\bar{a}-\\&\int_{\bar{a}_D}(\overline{D}_I\bar{n}_I+\bar{\sigma}^*)E_p\delta u_p\mathrm{d}\bar{a}+\int_{\bar{a}^{\mathrm{itf}}}\overline{D}_I\bar{n}_I\delta_\varphi\varphi\mathrm{d}\bar{a}-\int_{\bar{a}^{\mathrm{itf}}}\overline{D}_I\bar{n}_I E_p\delta u_p\mathrm{d}\bar{a}-\\&\int_{\bar{V}}(\overline{D}_{I,I}-\bar{\rho}_e)\delta_\varphi\varphi\mathrm{d}\overline{V}+\int_{\bar{V}}\overline{D}_I\overline{E}_L X_{L,p}\delta u_{p,I}\mathrm{d}\overline{V}+\int_{\bar{V}}(\overline{D}_{I,I}-\bar{\rho}_e)E_p\delta u_p\mathrm{d}\overline{V}=\\&\int_{\bar{a}_\sigma}(\overline{S}_{IJ}\bar{n}_I-\overline{T}_J^*)\delta u_J\mathrm{d}\bar{a}+\int_{\bar{a}^{\mathrm{itf}}}\overline{S}_{IJ}\bar{n}_I\delta u_J\mathrm{d}\bar{a}-\int_{\bar{V}}(\overline{S}_{IJ,I}+\bar{f}_J-\bar{\rho}\ddot{u}_J)\delta u_J\mathrm{d}\overline{V}+\\&\int_{\bar{a}_D}(\overline{D}_I\bar{n}_I+\bar{\sigma}^*)\delta\varphi\mathrm{d}\bar{a}+\int_{\bar{a}^{\mathrm{itf}}}\overline{D}_I\bar{n}_I\delta\varphi\mathrm{d}\bar{a}-\int_{\bar{V}}(\overline{D}_{I,I}-\bar{\rho}_e)\delta\varphi\mathrm{d}\overline{V}=0\end{aligned}\tag{3-75b}$$

式中

$$\overline{S}_{Jk}=x_{k,I}\bar{\sigma}_{IJ}+X_{L,k}\bar{\sigma}_{JL}^{\mathrm{M}},\ \bar{\sigma}_{JL}^{\mathrm{M}}=\overline{D}_J\overline{E}_L-\frac{1}{2}\overline{\Gamma}_N\overline{E}_N\delta_{JL}=\overline{D}_J\overline{E}_L-\frac{1}{2}(\overline{D}_N+\bar{e}_{NML}\bar{\varepsilon}_{ML})\overline{E}_N\delta_{JL}\tag{3-76}$$

称$\overline{S}_{IJ}$为初始构形中的伪总应力，$\bar{\sigma}_{IJ}^{\mathrm{M}}$为初始构形中的第二类 Maxwell 应力，而 $x_{k,I}\bar{\sigma}_{IJ}$ 是熟知的第一类 Piola－Kirchhoff 应力，故 $X_{L,k}\bar{\sigma}_{JL}^{\mathrm{M}}$ 可称为第一类 Maxwell 应力，它们都是在初始和现时构形两个构形中定义的。由式(3－76)知，对限变形，以初始构形为参照构形时，Maxwell 应力和应变与压电系数的乘积相关，但对各向同性介质仍和应变无关。由于 $\delta\bar{u}_i$，$\delta\bar{\varphi}$的任意性，故对电介质，由式(3－75b)得

$$\begin{aligned}&\overline{S}_{Jk}\bar{n}_J=\overline{T}_k^*\ (\text{在}\bar{a}_\sigma\text{上}),\quad \overline{D}_I\bar{n}_I=-\bar{\sigma}^*\ (\text{在}\bar{a}_D\text{上})\\&\overline{S}_{Jk,J}+\bar{f}_k=\bar{\rho}\ddot{u}_k,\ \overline{D}_{I,I}=\bar{\rho}_e(\text{在}\overline{V}\text{内})\end{aligned}\tag{3-77}$$

和

$$\delta\overline{\Pi}_1=\int_{\bar{a}^{\mathrm{itf}}}\overline{S}_{IJ}\bar{n}_I\delta u_J\mathrm{d}\bar{a}+\int_{\bar{a}^{\mathrm{itf}}}\overline{D}_I\bar{n}_I\delta\varphi\mathrm{d}\bar{a}\tag{3-78a}$$

类似地对环境有

$$\delta \overline{\Pi}_2 = \int_{\overline{V}^{\text{env}}} \delta \overline{g}^{\text{env}} \mathrm{d}\overline{V} + \int_{\overline{V}} \overline{g}^{\text{env}} \delta u_{k,k} \mathrm{d}\overline{V} - \delta \overline{W}_1^{*\text{env}} = \int_{\overline{a}_\sigma^{\text{env}}} (\overline{S}_{IJ}^{\text{env}} \overline{n}_I^{\text{env}} - \overline{T}_J^{*\text{env}}) \delta u_i^{\text{env}} \mathrm{d}\overline{a} +$$
$$\int_{\overline{a}^{\text{itf}}} \overline{S}_{IJ}^{\text{env}} \overline{n}_I^{\text{env}} \delta u_i^{\text{env}} \mathrm{d}\overline{a} - \int_{\overline{V}^{\text{env}}} (\overline{S}_{IJ,I}^{\text{env}} + \overline{f}_J^{\text{env}} - \overline{\rho}\ddot{u}_J^{\text{env}}) \delta \ddot{u}_J^{\text{env}} \mathrm{d}\overline{V} +$$
$$\int_{\overline{a}_D^{\text{env}}} (\overline{D}_I^{\text{env}} \overline{n}_I^{\text{env}} + \overline{\sigma}^{*\text{env}}) \delta\varphi^{\text{env}} \mathrm{d}\overline{a} + \int_{\overline{a}^{\text{itf}}} \overline{D}_I^{\text{env}} \overline{n}_I^{\text{env}} \delta\varphi^{\text{env}} \mathrm{d}\overline{a} - \int_{\overline{V}} (\overline{D}_{I,I}^{\text{env}} - \overline{\rho}_e^{\text{env}}) \delta\varphi^{\text{env}} \mathrm{d}\overline{V} = 0 \tag{3-79}$$

由式(3-79)得

$$\begin{aligned} &\overline{S}_{IJ}^{\text{env}} \overline{n}_I^{\text{env}} = \overline{T}_J^{*\text{env}} (\text{在} \overline{a}_\sigma^{\text{env}} \text{上}), \quad \overline{D}_I^{\text{env}} \overline{n}_I^{\text{env}} = -\overline{\sigma}^{*\text{env}} (\text{在} \overline{a}_D^{\text{env}} \text{上}) \\ &\overline{S}_{IJ,I}^{\text{env}} + \overline{f}_J^{\text{env}} = \overline{\rho}^{\text{env}} \ddot{u}_J^{\text{env}}, \quad \overline{D}_{I,I}^{\text{env}} = \overline{\rho}_e^{\text{env}} (\text{在} \overline{V}^{\text{env}} \text{内}) \end{aligned} \tag{3-80}$$

和

$$\delta \overline{\Pi}_2 = \int_{\overline{a}^{\text{itf}}} \overline{S}_{IJ}^{\text{env}} \overline{n}_I^{\text{env}} \delta u_J^{\text{env}} \mathrm{d}\overline{a} + \int_{\overline{a}^{\text{itf}}} \overline{D}_I^{\text{env}} \overline{n}_I^{\text{env}} \delta\varphi^{\text{env}} \mathrm{d}\overline{a} \tag{3-78b}$$

注意到在界面上有 $\overline{n}_I = -\overline{n}_I^{\text{env}}$，$\overline{u}_I = \overline{u}_I^{\text{env}}$，$\varphi = \varphi^{\text{env}}$，可以得到

$$\begin{aligned} \delta \overline{\Pi} = \delta \overline{\Pi}_1 + \delta \overline{\Pi}_2 - \delta \overline{W}^{*\text{itf}} = \\ \int_{\overline{a}^{\text{itf}}} \overline{S}_{IJ} \overline{n}_I \delta u_J \mathrm{d}\overline{a} + \int_{\overline{a}^{\text{itf}}} \overline{D}_I \overline{n}_I \delta\varphi \mathrm{d}\overline{a} + \int_{\overline{a}^{\text{itf}}} \overline{S}_{IJ}^{\text{env}} \overline{n}_I^{\text{env}} \delta u_J^{\text{env}} \mathrm{d}\overline{a} + \\ \int_{\overline{a}^{\text{itf}}} \overline{D}_I^{\text{env}} \overline{n}_I^{\text{env}} \delta\varphi^{\text{env}} \mathrm{d}\overline{a} - \int_{\overline{a}^{\text{itf}}} \overline{T}_K^{*\text{itf}} \delta u_k \mathrm{d}\overline{a} + \int_{\overline{a}^{\text{itf}}} \overline{\sigma}^{*\text{itf}} \delta\varphi \mathrm{d}\overline{a} = 0 \end{aligned}$$

所以在界面上有

$$(\overline{S}_{IJ} - \overline{S}_{IJ}^{\text{env}}) \overline{n}_I = \overline{T}_J^{*\text{itf}}, \quad (\overline{D}_I - \overline{D}_I^{\text{env}}) \overline{n}_I = -\overline{\sigma}^{*\text{itf}} (\text{在} \overline{a}^{\text{itf}} \text{上}) \tag{3-81}$$

上面的变分原理已预先假设位移和电势满足边界条件和界面上的连接条件，所以控制方程中还需加入相应的方程。相关的一般变分原理可以类似地得到。

对于纯弹性材料，上列诸方程能自然地退化到弹性控制方程。如果在式(3-73)中不采用 $\int_{\overline{V}} \delta \overline{g} \mathrm{d}\overline{V} + \int_{\overline{V}} \overline{g}^{\text{e}} \delta u_{k,k} \mathrm{d}\overline{V}$ 和 $\int_{\overline{V}^{\text{env}}} \delta \overline{g}^{\text{env}} \mathrm{d}\overline{V} + \int_{\overline{V}} \overline{g}^{\text{e env}} \delta u_{k,k} \mathrm{d}\overline{V}$，而采用 $\delta \int_V g \mathrm{d}V = \int_V \delta g \mathrm{d}V + \int_V g \delta u_{k,k} \mathrm{d}V = \int_{\overline{V}} \delta \overline{g} \mathrm{d}\overline{V} + \int_{\overline{V}} \overline{g} \delta u_{k,k} \mathrm{d}\overline{V}$ 和环境中的类似表达式，那么由电弹性的控制方程便不能自然地退化到弹性控制方程，这也说明式(3-73)的合理性。

3.5.7 电磁介质中有限变形时的标准电磁 Gibbs 函数变分原理[30]

上述诸公式易于推广到有限变形的一般电磁介质中去。此时电磁 Gibbs 函数为

$$\begin{aligned} \overline{g} = &(1/2)\overline{C}_{IJKL}\overline{\varepsilon}_{LK} - (1/2)\overline{\epsilon}_{KL}\overline{E}_K\overline{E}_L - \overline{e}^{\text{e}}_{KIJ}\overline{E}_K\overline{\varepsilon}_{IJ} - (1/2)\overline{l}^{\text{e}}_{IJKL}\overline{E}_I\overline{E}_J\overline{\varepsilon}_{LK} - \\ &(1/2)\overline{\mu}_{KL}\overline{H}_K\overline{H}_L - \overline{e}^{\text{m}}_{KIJ}\overline{e}_{KIJ}\overline{H}_K\overline{\varepsilon}_{IJ} - (1/2)\overline{l}^{\text{m}}_{IJKL}\overline{H}_I\overline{H}_J\overline{\varepsilon}_{LK} + \cdots = \\ &(1/2)\overline{C}_{IJKL}\overline{\varepsilon}_{JI} + \overline{g}^{\text{em}}, \ \overline{g}^{\text{em}} = -(\overline{D}_K\overline{E}_K + \overline{B}_K\overline{H}_K + \overline{\Gamma}_{KL}\overline{\varepsilon}_{LK}), \ \overline{\Gamma}_{KL} = \overline{e}^{\text{e}}_{MKL}\overline{E}_M + \overline{e}^{\text{m}}_{MKL}\overline{H}_M \end{aligned}$$

$$\overline{\sigma}_{KL} = \partial\overline{g}/\partial\overline{\varepsilon}_{LK} = \overline{C}_{IJKL}\overline{\varepsilon}_{IJ} - \overline{e}^{\text{e}}_{JKL}\overline{E}_J - (1/2)\overline{l}^{\text{e}}_{IJKL}\overline{E}_I\overline{E}_J - \overline{e}^{\text{m}}_{JKL}\overline{H}_J - (1/2)\overline{l}^{\text{m}}_{IJKL}\overline{H}_I\overline{H}_J$$

$$\overline{D}_K = -\partial\overline{g}/\partial\overline{E}_K = \tilde{\epsilon}^{\text{e}}_{KL}E_L + \overline{e}^{\text{e}}_{KIJ}\varepsilon_{IJ}, \ \tilde{\epsilon}^{\text{e}}_{KL} = \overline{\epsilon}_{KL} + \overline{l}^{\text{e}}_{IJKL}\varepsilon_{JI}$$

$$\overline{B}_K = -\partial\overline{g}/\partial\overline{H}_K = \widetilde{\epsilon}^{\mathrm{m}}_{KL}H_L + \overline{e}^{\mathrm{m}}_{KIJ}\varepsilon_{IJ},\ \widetilde{\epsilon}^{\mathrm{m}}_{KL} = \overline{\mu}_{KL} + \overline{l}^{\mathrm{m}}_{IJKL}\varepsilon_{JI}$$

$$\overline{C}_{IJKL} = \overline{C}_{JIKL} = \overline{C}_{IJLK} = \overline{C}_{KLIJ},\ \overline{\epsilon}_{KL} = \overline{\epsilon}_{LK},\ \overline{e}^{\mathrm{e}}_{KIJ} = \overline{e}^{\mathrm{e}}_{KJI},\ \overline{\mu}_{KL} = \overline{\mu}_{LK},\ \overline{e}^{\mathrm{m}}_{KIJ} = \overline{e}^{\mathrm{m}}_{KJI}$$

$$\overline{l}^{\mathrm{e}}_{IJKL} = \overline{l}^{\mathrm{e}}_{JIKL} = \overline{l}^{\mathrm{e}}_{IJLK} = \overline{l}^{\mathrm{e}}_{KLIJ},\ \overline{l}^{\mathrm{m}}_{IJKL} = \overline{l}^{\mathrm{m}}_{JIKL} = \overline{l}^{\mathrm{m}}_{IJLK} = \overline{l}^{\mathrm{m}}_{KLIJ} \tag{3-82}$$

考虑到磁荷不存在，标准电磁 Gibbs 函数变分原理可写为（设电介质边界上 $\overline{B}^*_n = 0$）

$$\begin{aligned}
&\delta\overline{\Pi} = \delta\overline{\Pi}_1 + \delta\overline{\Pi}_2 - \delta\overline{W}^{*\mathrm{itf}} = 0\\
&\delta\overline{\Pi}_1 = \int_V \delta\overline{g}\mathrm{d}V + \int_V \overline{g}^{\mathrm{em}}\delta u_{i,i}\mathrm{d}V - \delta\overline{W}^*\\
&\delta\overline{\Pi}_2 = \int_{V^{\mathrm{env}}}\delta\overline{g}^{\mathrm{env}}\mathrm{d}V + \int_{V^{\mathrm{env}}}\delta\overline{g}^{\mathrm{em\,env}}\mathrm{d}V - \delta\overline{W}^{*\mathrm{env}}\\
&\delta\overline{W}^* = \int_{\overline{V}}(\overline{f}_k - \overline{\rho}\ddot{u}_k)\delta u_k\mathrm{d}\overline{V} - \int_{\overline{V}}\overline{\rho}_e\delta\varphi\mathrm{d}\overline{V} + \int_{\overline{a}_\sigma}\overline{T}^*_k\delta u_k\mathrm{d}\overline{a} - \int_{\overline{a}_D}\overline{\sigma}^*\delta\varphi\mathrm{d}\overline{a}\\
&\delta\overline{W}^{*\mathrm{env}} = \int_{\overline{V}^{\mathrm{env}}}(\overline{f}^{\mathrm{env}}_k - \overline{\rho}\ddot{u}^{\mathrm{env}}_k)\delta u^{\mathrm{env}}_k\mathrm{d}\overline{V} - \int_{\overline{V}^{\mathrm{env}}}\overline{\rho}^{\mathrm{env}}_e\delta\varphi^{\mathrm{env}}\mathrm{d}\overline{V} +\\
&\qquad\int_{\overline{a}^{\mathrm{env}}_\sigma}\overline{T}^{*\mathrm{env}}_k\delta u^{\mathrm{env}}_k\mathrm{d}\overline{a} - \int_{\overline{a}^{\mathrm{env}}_D}\overline{\sigma}^{*\mathrm{env}}\delta\varphi^{\mathrm{env}}\mathrm{d}\overline{a} + \int_{\overline{a}^{\mathrm{env}}_\mu}\overline{B}^{*\mathrm{env}}_I\overline{n}_I\delta\psi^{\mathrm{env}}\mathrm{d}\overline{a}\\
&\delta\overline{W}^{*\mathrm{itf}} = \int_{\overline{a}^{\mathrm{int}}}\overline{T}^{*\mathrm{itf}}_k\delta u_k\mathrm{d}\overline{a} - \int_{\overline{a}^{\mathrm{int}}}\overline{\sigma}^{*\mathrm{itf}}\delta\varphi\mathrm{d}\overline{a}
\end{aligned} \tag{3-83}$$

式中$\overline{B}^{*\mathrm{env}}_I$ 是环境边界上给定的磁感应密度，并设电介质和界面上没有外加磁通。注意到

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{V}}\delta\overline{g}\mathrm{d}\overline{V} + \int_{\overline{V}}\overline{g}^{\mathrm{em}}\delta u_{k,k}\mathrm{d}\overline{V} &= \int_{\overline{V}}\overline{\sigma}_{IJ}\delta\overline{\varepsilon}_{IJ}\mathrm{d}\overline{V} + \int_{\overline{V}}\overline{D}_I\delta\varphi_{,I}\mathrm{d}\overline{V} +\\
&\int_{\overline{V}}\overline{B}_I\delta\psi_{,I}\mathrm{d}\overline{V} - \int_{\overline{V}}(1/2)(\overline{D}_K\overline{E}_K + \overline{B}_K\overline{H}_K + \Gamma_{KL}\overline{\varepsilon}_{LK})\delta u_{k,k}\mathrm{d}\overline{V}
\end{aligned} \tag{3-84}$$

式中 $\Gamma_{kl} = \overline{e}^{\mathrm{e}}_{MKL}\overline{E}_m + \overline{e}^{\mathrm{m}}_{MKL}\overline{H}_m$。对环境有类似表达式。最后得到控制方程为

$$\begin{aligned}
&\overline{S}_{Jk,J} + \overline{f}_k = \overline{\rho}\ddot{u}_k,\ \overline{D}_{I,I} = \overline{\rho}_e,\ \overline{B}_{I,I} = 0\ (在\overline{V}内)\\
&\overline{S}_{Jk}\overline{n}_J = \overline{T}^*_k\ (在\overline{a}_\sigma上),\quad \overline{D}_I\overline{n}_I = -\overline{\sigma}^*\ (在\overline{a}_D上),\quad \overline{B}_I\overline{n}_I = 0\ (在\overline{a}_\mu上)\\
&\overline{S}_{JK} = x_{k,I}\overline{\sigma}_{IJ} + X_{L,k}\overline{\sigma}^{\mathrm{M}}_{JL},\quad \overline{\sigma}^{\mathrm{M}}_{JL} = \overline{D}_J\overline{E}_L + \overline{B}_J\overline{H}_L - (1/2)(\overline{D}_N\overline{E}_N + \overline{B}_N\overline{H}_N + \Gamma_{MN}\overline{\varepsilon}_{NM})\delta_{JL}
\end{aligned} \tag{3-85a}$$

$$\begin{aligned}
&\overline{S}^{\mathrm{env}}_{IJ,I} + \overline{f}^{\mathrm{env}}_J = \overline{\rho}^{\mathrm{env}}\ddot{u}^{\mathrm{env}}_J,\ \overline{D}^{\mathrm{env}}_{I,I} = \overline{\rho}^{\mathrm{env}}_e,\ \overline{B}_{I,I} = 0\ (在\overline{V}^{\mathrm{env}}内)\\
&\overline{S}^{\mathrm{env}}_{IJ}\overline{n}^{\mathrm{env}}_I = \overline{T}^{*\mathrm{env}}_J(在\overline{a}^{\mathrm{env}}_\sigma上),\quad \overline{D}^{\mathrm{env}}_I\overline{n}^{\mathrm{env}}_I = -\overline{\sigma}^{*\mathrm{env}}(在\overline{a}^{\mathrm{env}}_D上),\quad \overline{B}^{\mathrm{env}}_I = \overline{B}^{*\mathrm{env}}_I(在\overline{a}^{\mathrm{env}}_\mu上)
\end{aligned} \tag{3-85b}$$

$$(\overline{S}_{IJ} - \overline{S}^{\mathrm{env}}_{IJ})\overline{n}_I = \overline{T}^{*\mathrm{itf}}_J,\ (\overline{D}_I - \overline{D}^{\mathrm{env}}_I)\overline{n}_I = -\overline{\sigma}^{*\mathrm{itf}},\ (\overline{B}_I - \overline{B}^{\mathrm{env}}_I)\overline{n}_I = 0\ (在a^{\mathrm{itf}}上) \tag{3-85c}$$

$$\begin{aligned}
&u_i = u^*_i\ (在\ a_u\ 上),\quad \varphi = \varphi^*\ (在\ a_\varphi\ 上),\quad \psi = \psi^*\ (在\ a_\psi\ 上)\\
&u^{\mathrm{env}}_i = u^{*\mathrm{env}}_i(在\ a^{\mathrm{env}}_u\ 上),\quad \varphi^{\mathrm{env}} = \varphi^{*\mathrm{env}}(在\ a^{\mathrm{env}}_\varphi\ 上),\quad \psi^{\mathrm{env}} = \psi^{*\mathrm{env}}(在\ a^{\mathrm{env}}_\psi\ 上)\\
&u_i = u^{\mathrm{env}}_i,\ \varphi = \varphi^{\mathrm{env}},\ \psi = \psi^{\mathrm{env}}(在\ a^{\mathrm{int}}\ 上)
\end{aligned} \tag{3-85d}$$

小变形时的公式易于从上列诸式得到。

3.6 等温电介质中的内能变分原理[31]

3.6.1 内能

按照不变量函数定理，不考虑非对称应力，小变形时内能可取为

$$u(\varepsilon_{kl},\ D_k) = \frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{ji}\varepsilon_{lk} + \frac{1}{2}\beta_{kl}D_kD_l - h_{kij}D_k\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}p_{ijkl}D_iD_j\varepsilon_{lk} + \cdots \tag{3-86}$$

$$\beta_{kl} = \beta_{lk},\ p_{ijkl} = p_{jikl} = p_{ijlk} = p_{klij},\ h_{kij} = h_{kji},\ C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}$$

式中 h_{kij}，β_{kl}，p_{ijkl} 和 C_{ijkl} 是压电刚度、夹持介电隔离率、电致伸缩和开路弹性刚度系数。按热力学原理，本构方程为

$$\sigma_{kl} = \frac{\partial u}{\partial \varepsilon_{lk}} = C_{ijkl}\varepsilon_{ij} - h_{kij}D_k + \frac{1}{2}p_{ijkl}D_iD_j$$

$$E_k = \frac{\partial u}{\partial D_k} = (\beta_{kl} + p_{klij}\varepsilon_{ji})D_l - h_{kij}\varepsilon_{ij} \tag{3-87}$$

对于各向同性情形，式(3-87)化为

$$\beta_{kl} = \beta\delta_{kl},\quad p_{ijkl} = \frac{1}{2}b_1(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + b_2\delta_{ij}\delta_{kl} \tag{3-88}$$

$$\sigma_{kl} = \lambda e_{ii}\delta_{kl} + 2Ge_{kl} - \frac{1}{2}(b_1D_kD_l + b_2D_iD_i\delta_{kl}),\quad E_k = (\beta\delta_{kl} + b_1e_{kl} + b_2e_{ii}\delta_{kl})D_l$$

式中 b_1 和 b_2 是各向同性电介质的电致伸缩系数。此时无压电效应。

3.6.2 小变形时的标准内能变分原理

设电介质中的位移和电位移在 a_u，a_D 上和环境中的位移和电位移在 a_u^{env}，a_D^{env} 上都分别满足各自的边界条件：即

$$u_i = u_i^*\ (\text{在 } a_u \text{ 上}),\quad D_in_i = -\sigma^*\ (\text{在 } a_D \text{ 上})$$
$$u_i^{\mathrm{env}} = u_i^{*\mathrm{env}}(\text{在 } a_u^{\mathrm{env}} \text{ 上}),\quad D_i^{\mathrm{env}}n_i^{\mathrm{env}} = -\sigma^{*\mathrm{env}}(\text{在 } a_D^{\mathrm{env}} \text{ 上}) \tag{3-89a}$$

在它们共同的边界 a^{itf} 上满足界面连接条件

$$u_i = u_i^{\mathrm{env}},\quad (D_i - D_i^{\mathrm{env}})n_i = -\sigma^{*\mathrm{itf}}(\boldsymbol{n}\text{ 是电介质的外法线}) \tag{3-89b}$$

同时在电介质和环境内部分别满足

$$\rho_e = D_{i,i}(\text{在 } V \text{ 中}),\quad \rho_e^{\mathrm{env}} = D_{i,i}^{\mathrm{env}}(\text{在 } V^{\mathrm{env}} \text{ 中}) \tag{3-89c}$$

此时小变形时的内能变分原理可表为

$$\delta\Pi_e = \delta\Pi_{e1} + \delta\Pi_{e2} - \delta W_e^{\mathrm{itf}} = 0$$

$$\delta\Pi_{e1} = \delta\int_V u\,\mathrm{d}V - \int_V (f_k - \rho\ddot{u}_k)\delta u_k\,\mathrm{d}V - \int_{a_\sigma} T_k^*\ \delta u_k\,\mathrm{d}a - \int_V \varphi\,\delta(\rho_e\mathrm{d}V) -$$
$$\int_{a_D}\varphi\sigma^*\ \delta(\mathrm{d}a) - \int_{a_\varphi}\varphi^*\ \delta(\sigma\mathrm{d}a)$$

$$\delta\Pi_{e2} = \delta\int_{V^{env}} u^{env}\mathrm{d}V - \int_{V^{env}} (f_k^{env} - \rho^{env}\ddot{u}_k^{env})\delta u_k^{env}\,\mathrm{d}V - \int_{a_\sigma^{env}} T_k^{*\,env}\,\delta u_k^{env}\,\mathrm{d}a -$$

$$\int_{V^{env}} \varphi^{env}\delta(\rho_e^{env}\,\mathrm{d}V) - \int_{a_D^{env}} \varphi^{env}\sigma^{*\,env}\delta(\mathrm{d}a) - \int_{a_\varphi^{env}} \varphi^{*\,env}\delta(\sigma^{env}\mathrm{d}a) \tag{3-90}$$

$$\delta W_e^{itf} = \int_{a^{itf}} T_k^{*\,itf}\,\delta u_k\mathrm{d}a + \int_{a^{itf}} \varphi^{*\,itf}\delta(\sigma^{itf}\mathrm{d}a)$$

式中 f_k，T_k^*，φ 和 φ^* 分别是给定的体力、面力、体内电势和面电势。电介质的表面为 $a = a_\sigma + a_u + a^{int} = a_D + a_\varphi + a^{int}$，式中$\int_{a_D} \varphi\sigma^*\,\delta(\mathrm{d}a)$是边界条件 $D_i n_i = -\sigma^*$ 引起的，即 $\sigma^*\,\mathrm{d}a$ 不是常数。类似的说明也适用于环境。$T_k^{*\,itf}$和 $\varphi^{*\,itf}$分别是界面上给定的面力和电势间断值，电势间断值是由电偶极子层引起的。应当注意，和用电 Gibbs 函数时的变分原理不同，这里 D 是变分的量，所以 $\rho_e\mathrm{d}V$ 和 $\sigma^*\,\mathrm{d}a$ 要参加变分。变分时需要注意虚位移不仅引起应变的变化，且引起电荷的变化，通常电荷变化引起应变的变化是高一阶小量，不予计算，即

$$\begin{aligned} \delta D_i &= \delta_D D_i + \delta_u D_i, \quad \delta_u D_i = D_{i,p}\delta u_p \\ \delta\rho_e &= \delta_D\,\rho_e + \delta_u\,\rho_e, \quad \delta_u\rho_e = D_{i,ip}\delta u_p = D_{i,pi}\,\delta u_p \end{aligned} \tag{3-91}$$

式中 $\delta_D\rho_e$和 $\delta_D D_i$ 是由虚电荷产生，$\delta_u\,\rho_e = D_{i,pi}\,\delta u_p$和 $\delta_u D_i = D_{i,p}\delta u_p$ 是由虚位移产生。上式中已应用了 $E_{k,j} = E_{j,k} = -\varphi_{,jk}$。和应力相比，由项 $(\sigma_{kl}\epsilon_{kl} - p_{ijkl}D_iD_j\,\epsilon_{kl})/2$ 产生的应力可以略去。应用关系

$$\begin{aligned} &\delta(\mathrm{d}V) = \delta u_{k,k}\mathrm{d}V,\ \delta(n_k\mathrm{d}a) = (n_k\delta u_{p,p} - n_p\delta u_{p,k})\mathrm{d}a \\ &\delta(\mathrm{d}a) = (\delta u_{p,p} - \delta u_{p,k}n_pn_k)\mathrm{d}a \end{aligned} \tag{3-92}$$

则有

$$\delta\int_V u\mathrm{d}V = \int_V \sigma_{ij}\,\delta u_{i,j}\mathrm{d}V + \int_V u\delta u_{k,k}\mathrm{d}V = \int_a \left(\sigma_{ij} + \frac{1}{2}E_mD_m\delta_{ij}\right)n_j\,\delta u_i\,\mathrm{d}a -$$
$$\int_V \left(\sigma_{ij} + \frac{1}{2}E_mD_m\delta_{ij}\right)_{,j}\delta u_i\mathrm{d}V + \int_V E_j\delta D_j\mathrm{d}V \tag{3-93a}$$

$$\int_V \varphi\,\delta(\rho_e\mathrm{d}V) = \int_V \varphi\,\delta(D_{i,i}\mathrm{d}V) = \int_V \varphi\,\delta D_{i,i}\mathrm{d}V + \int_V \varphi D_{i,i}\delta u_{p,p}\mathrm{d}V =$$
$$\int_V \varphi\delta_q D_{i,i}\mathrm{d}V + \int_V \varphi D_{i,pi}\,\delta u_p\mathrm{d}V + \int_V \varphi D_{i,i}\delta u_{p,p}\mathrm{d}V =$$
$$\int_a \varphi\,\delta_q D_in_i\mathrm{d}a - \int_V \varphi_{,i}\delta_q D_i\mathrm{d}V + \int_a \varphi\,\delta_u D_in_i\mathrm{d}a - \int_V \varphi_{,i}\delta_u D_i\mathrm{d}V -$$
$$\int_V \varphi D_{i,p}\delta u_{p,i}\mathrm{d}V + \int_V \varphi D_{i,i}\delta u_{p,p}\mathrm{d}V =$$
$$\int_a \varphi\,\delta D_in_i\mathrm{d}a - \int_V \varphi_{,i}\delta D_i\mathrm{d}V - \int_a \varphi D_{i,p}n_i\,\delta u_p\mathrm{d}a +$$
$$\int_V (\varphi D_{i,p})_{,i}\delta u_p\mathrm{d}V + \int_V \varphi D_{i,i}\delta u_{p,p}\mathrm{d}V \tag{3-93b}$$

$$\int_{a_D}\varphi\sigma^*\delta(\mathrm{d}a)=-\int_{a_D}\varphi D_i n_i\delta(\mathrm{d}a)=-\int_{a_D}\varphi D_i n_i(\delta u_{p,p}-\delta u_{p,k}n_p n_k)\mathrm{d}a=$$
$$-\int_{a_D}\varphi(D_i\delta u_{p,p}-D_p\delta u_{i,p})n_i\mathrm{d}a-\int_{a_D}\varphi(D_p\delta u_{i,p}-D_i\delta u_{p,k}n_p n_k)n_i\mathrm{d}a=$$
$$-\int_{a}\varphi(D_i\delta u_{p,p}-D_p\delta u_{i,p})n_i\mathrm{d}a+\int_{(a_\varphi+a^{\mathrm{itf}})}\varphi(D_i\delta u_{p,p}-D_p\delta u_{i,p})n_i\mathrm{d}a-$$
$$\int_{a_D}\varphi(D_p\delta u_{i,p}-D_i\delta u_{p,k}n_p n_k)n_i\mathrm{d}a \tag{3-93c}$$

$$\int_{a_\varphi}\varphi^*\delta(\sigma\mathrm{d}a)=-\int_{a_\varphi}\varphi^*\delta(D_i n_i\mathrm{d}a)=-\int_{a_\varphi}\varphi^*\delta D_i n_i\mathrm{d}a-\int_{a_\varphi}\varphi^* D_i\delta(n_i\mathrm{d}a)=$$
$$-\int_{a_\varphi}\varphi^*\delta D_i n_i\mathrm{d}a-\int_{a_\varphi}\varphi^*(D_i\delta u_{p,p}-D_p\delta u_{i,p})n_i\mathrm{d}a \tag{3-93d}$$
$$\int_{a^{\mathrm{itf}}}\varphi^{*\,\mathrm{itf}}\delta(\sigma\mathrm{d}a)=-\int_{a^{\mathrm{itf}}}\varphi^{*\,\mathrm{itf}}\delta D_i^{\mathrm{itf}}n_i\mathrm{d}a-\int_{a^{\mathrm{itf}}}\varphi^{*\,\mathrm{itf}}(D_i^{\mathrm{itf}}\delta u_{p,p}-D_p^{\mathrm{itf}}\delta u_{i,p})n_i\mathrm{d}a$$

式中已设 $\boldsymbol{n}^{\mathrm{itf}}=\boldsymbol{n}$。同时存在下列等式

$$\int_a\varphi(D_i\delta u_{p,p}-D_p\delta u_{i,p})n_i\mathrm{d}a-\int_V\varphi D_{i,i}\delta u_{p,p}\mathrm{d}V=$$
$$\int_V\varphi_{,i}(D_i\delta u_{p,p}-D_p\delta u_{i,p})\mathrm{d}V+\int_V\varphi(D_i\delta u_{p,p}-D_p\delta u_{i,p})_{,i}\mathrm{d}V-\int_V\varphi D_{i,i}\delta u_{p,p}\mathrm{d}V=$$
$$-\int_a(\varphi D_p)_{,i}n_p\delta u_i\mathrm{d}a+\int_V(\varphi D_p)_{,ip}\delta u_i\mathrm{d}V+\int_a\varphi_{,i}D_i n_p\delta u_p\mathrm{d}a-\int_V(\varphi_{,i}D_i)_{,p}\delta u_p\mathrm{d}V \tag{3-94a}$$

$$\int_{a_D}\varphi\delta D_i n_i\mathrm{d}a=\int_{a_D}\varphi\delta(D_i n_i)\mathrm{d}a-\int_{a_D}\varphi D_i\delta n_i\mathrm{d}a=-\int_{a_D}\varphi(D_i\delta u_{p,l}n_l n_p n_i-D_i\delta u_{p,i}n_p)\mathrm{d}a \tag{3-94b}$$

式(3-88b)中 $D_i n_i=-\sigma^*$ 是 a_D 上的给定值,故不因虚位移而变化。应用上列诸式,式(3-90)中的 $\delta\Pi_{\mathrm{el}}$ 化为

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{\mathrm{el}}=&\int_{a_\sigma}\left[\left(\sigma_{ij}+\frac{1}{2}E_m D_m\delta_{ij}+\varphi D_{j,i}-(\varphi D_j)_{,i}+\varphi_{,p}D_p\delta_{ij}\right)n_j-T_i^*\right]\delta u_i\mathrm{d}a-\\&\int_V\left[\left(\sigma_{ij}+\frac{1}{2}E_m D_m\delta_{ij}+\varphi D_{j,i}-(\varphi D_j)_{,i}+\varphi_{,p}D_p\delta_{ij}\right)_{,j}+f_i-\rho\ddot{u}_i\right]\delta u_i\mathrm{d}V+\\&\int_V(E_j+\varphi_{,j})\delta D_j\mathrm{d}V+\int_{a_\varphi}(\varphi^*-\varphi)n_i\delta D_i\mathrm{d}a+\\&\int_{a_\varphi}(\varphi^*-\varphi)(D_i\delta u_{p,p}-D_p\delta u_{i,p})n_i\mathrm{d}a+\\&\int_{a^{\mathrm{itf}}}\left[\left(\sigma_{ij}+\frac{1}{2}E_m D_m\delta_{ij}+\varphi D_{j,i}-(\varphi D_j)_{,i}+\varphi_{,p}D_p\delta_{ij}\right)n_j\right]\delta u_i\mathrm{d}a-\\&\int_{a^{\mathrm{itf}}}\varphi(D_i\delta u_{p,p}-D_p\delta u_{i,p})n_i\mathrm{d}a-\int_{a^{\mathrm{itf}}}\varphi\delta D_i n_i\mathrm{d}a\end{aligned} \tag{3-95}$$

由式(3-87)以及(3-92)以及 δu_i,δD_i 的任意性,便得

$$
\begin{aligned}
&\hat{\sigma}_{ij}n_j = T_i^* \text{（在 } a_\sigma \text{ 上）}, \quad \varphi = \varphi^* \text{（在 } a_\varphi \text{ 上）} \\
&\hat{\sigma}_{ij,j} + f_i = \rho\ddot{u}_i, \ E_j = -\varphi_{,i} \text{（在 } V \text{ 中）} \\
&\hat{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} + \sigma_{ij}^{\mathrm{Mq}} \\
&\sigma_{ij}^{\mathrm{Mq}} = \varphi D_{j,i} + \frac{1}{2}E_m D_m \delta_{ij} - (\varphi D_j)_{,i} + \varphi_{,p}D_p\delta_{ij} = E_i D_j - \frac{1}{2}E_p D_p \delta_{ij}
\end{aligned}
\tag{3-96}
$$

式中 $\sigma_{ij}^{\mathrm{Mq}}$ 是内能变分原理变分中的 Maxwell 应力。式(3-94b)保证了 a_D 上的电学边界条件自动满足。利用式(3-96)，$\delta\Pi_{\mathrm{el}}$ 可化为

$$
\delta\Pi_{\mathrm{el}} = \int_{a^{\mathrm{itf}}} \hat{\sigma}_{ij}n_j\delta u_i \mathrm{d}a - \int_{a^{\mathrm{itf}}} \varphi\delta D_i n_i \mathrm{d}a - \int_{a^{\mathrm{itf}}} \varphi(D_i\delta u_{p,p} - D_p\delta u_{i,p})n_i \mathrm{d}a \tag{3-97}
$$

由 $\delta\Pi_{e2}$ 可得出类似的公式

$$
\begin{aligned}
&\hat{\sigma}_{ij}^{\mathrm{env}} n_j^{\mathrm{env}} = T_i^{*\,\mathrm{env}} \text{（在 } a_\sigma^{\mathrm{env}} \text{ 上）}, \quad \varphi^{\mathrm{env}} = \varphi^{*\,\mathrm{env}} \text{（在 } a_\varphi^{\mathrm{env}} \text{ 上）} \\
&\hat{\sigma}_{ij,j}^{\mathrm{env}} + f_i^{\mathrm{env}} = \rho\ddot{u}_i^{\mathrm{env}}, \ E_i^{\mathrm{env}} = -\varphi_{,i}^{\mathrm{env}} \text{（在 } V^{\mathrm{env}} \text{ 中）} \\
&\hat{\sigma}_{ij}^{\mathrm{env}} = \sigma_{ij}^{\mathrm{env}} + \sigma_{ij}^{\mathrm{Mqenv}} \\
&\delta\Pi_{e2} = \int_{a^{\mathrm{itf}}} \hat{\sigma}_{ij}^{\mathrm{env}} n_j^{\mathrm{env}} \delta u_i^{\mathrm{env}} \mathrm{d}a - \int_{a^{\mathrm{itf}}} \varphi^{\mathrm{env}} \delta D_i^{\mathrm{env}} n_i^{\mathrm{env}} \mathrm{d}a - \\
&\qquad \int_{a^{\mathrm{itf}}} \varphi^{\mathrm{env}} (D_i^{\mathrm{env}} \delta u_{p,p}^{\mathrm{env}} - D_p^{\mathrm{env}} \delta u_{i,p}^{\mathrm{env}}) n_i^{\mathrm{env}} \mathrm{d}a
\end{aligned}
\tag{3-98}
$$

δW^{int} 可表为

$$
\delta W_e^{\mathrm{itf}} = \int_{a^{\mathrm{itf}}} T_k^{*\,\mathrm{itf}} \delta u_k \mathrm{d}a - \int_{a^{\mathrm{itf}}} \varphi^{*\,\mathrm{itf}} n_i \delta D_i^{\mathrm{itf}} \mathrm{d}a - \int_{a^{\mathrm{itf}}} \varphi^{*\,\mathrm{itf}} (D_i^{\mathrm{itf}} \delta u_{p,p} - D_p^{\mathrm{itf}} \delta u_{i,p}) n_i \mathrm{d}a \tag{3-99}
$$

把式(3-97)、(3-98)和(3-99)代入式(3-90)，并注意到 $\boldsymbol{n}^{\mathrm{env}} = -\boldsymbol{n}$，$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^{\mathrm{env}}$，便得

$$
\delta\Pi_e = \int_{a^{\mathrm{itf}}} [(\hat{\sigma}_{ij} - \hat{\sigma}_{ij}^{\mathrm{env}})n_j - T_k^{*\,\mathrm{itf}}]\delta u_i \mathrm{d}a - \int_{a^{\mathrm{itf}}} (\varphi - \varphi^{\mathrm{env}} - \varphi^{*\,\mathrm{itf}}) n_i (\delta D_i + D_i\delta u_{p,p} - D_p\delta u_{i,p}) \mathrm{d}a \tag{3-100}
$$

注意到 δu_i，δD_i 的任意性，便得

$$
(\hat{\sigma}_{ij} - \hat{\sigma}_{ij}^{\mathrm{env}})n_j = T_i^{*\,\mathrm{itf}}, \quad \varphi - \varphi^{\mathrm{env}} = \varphi^{*\,\mathrm{itf}} \text{（在 } a^{\mathrm{itf}} \text{ 上）} \tag{3-101}
$$

式 (3-96)、(3-98)、(3-101)和(3-89)组成完整的控制方程。

3.6.3 关于 $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{Mq}}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}$

表面上式(3-54)中的 $\sigma_{ij}^{\mathrm{M}} = D_i E_j - \frac{1}{2}D_m E_m \delta_{ij}$ 和式(3-96)中的 $\sigma_{ij}^{\mathrm{Mq}} = E_i D_j - \frac{1}{2}E_p D_p \delta_{ij}$ 不同，但实际上是一样的，其差别是因采用不同的本构关系(3-44)和(3-86)引起的。通过两种本构方程中材料系数的转换关系，便可证明 σ_{ij}^{M} 和 $\sigma_{ij}^{\mathrm{Mq}}$ 是相同的。事实上由本构关系(3-44)和(3-86)可推出

$$
\begin{aligned}
D_k &= (\varepsilon_{kl} + l_{klst}\varepsilon_{st})[(\beta_{lm} + p_{lmij}\varepsilon_{ji})D_m - h_{lij}\varepsilon_{ij}] + e_{kij}\varepsilon_{ij} = \\
&\quad (\varepsilon_{kl} + l_{klst}\varepsilon_{st})(\beta_{lm} + p_{lmij}\varepsilon_{ji})D_m - (\varepsilon_{kl} + l_{klst}\varepsilon_{st})h_{lij}\varepsilon_{ij} + e_{kij}\varepsilon_{ij}
\end{aligned}
$$

从而有

$$(\varepsilon_{km}+l_{kmst}\varepsilon_{st})(\beta_{ml}+p_{mlij}\varepsilon_{ji})=\delta_{kl},\quad (\varepsilon_{km}+l_{kmst}\varepsilon_{st})h_{mij}=e_{kij} \tag{3-102a}$$

对于线性情形，上式化为

$$\varepsilon_{km}\beta_{ml}=\delta_{kl},\quad \varepsilon_{km}h_{mij}=e_{kij} \tag{3-102b}$$

由内能变分原理导出的 Maxwell 应力 $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{Mq}}$ 中包含 $\boldsymbol{E}\otimes\boldsymbol{D}$，由电 Gibbs 函数变分原理导出的 Maxwell 应力 $\boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}}$ 中包含 $\boldsymbol{D}\otimes\boldsymbol{E}$，它们分别为

$$\begin{aligned}D_lE_k&=(\beta_{ml}+p_{mlij}\varepsilon_{ji})^{-1}(E_m+h_{mij}\varepsilon_{ij})E_k\text{（利用本构关系(3-86)）}\\D_kE_l&=(\varepsilon_{km}+l_{kmst}\varepsilon_{st})E_mE_l+e_{kij}\varepsilon_{ij}E_l\text{（利用本构关系(3-44)）}\end{aligned} \tag{3-103}$$

利用两种本构关系中系数的转换关系式(3-102)，便有

$$\begin{aligned}&D_lE_k\text{（利用本构关系(3-86)）}=\\&(\beta_{ml}+p_{mlij}\varepsilon_{ji})^{-1}E_mE_k+(\beta_{ml}+p_{mlij}\varepsilon_{ji})^{-1}h_{mij}\varepsilon_{ij}E_k=\\&(\varepsilon_{km}+l_{kmst}\varepsilon_{st})\delta_{kl}E_mE_k+(\varepsilon_{km}+l_{kmst}\varepsilon_{st})\delta_{kl}h_{mij}\varepsilon_{ij}E_k=\\&(\varepsilon_{km}+l_{kmst}\varepsilon_{st})E_mE_l+e_{kij}\varepsilon_{ij}E_l=\\&D_kE_l\text{（利用本构关系(3-44)）}\end{aligned} \tag{3-104}$$

由此立即可证 $\sigma_{ij}^{\mathrm{Mq}}=\sigma_{ji}^{\mathrm{M}}$。

3.6.4 作用在平板电容器极板上的力

在 2.4.7 节中，我们曾详细讨论过作用在平板电容器极板上的力的问题。作为一般原理的应用，此处再作一次讨论。仍采用那里的符号：垂直极板的方向为 x_2，两极板间的距离为 h，虚位移为 $\delta u_2=\delta h$，单位面积上的力为 $T_2=\sigma_{22}$，虚应变为 $\varepsilon_{22}=u_{2,2}=\delta h/h$，电场强度为 $E_2=-\varphi/h$，单位电极表面的电荷为 $q=D_2$，没有体积力和表面力。电极构成电介质的环境。采用内能变分原理时，给定电容器极板上的电势差为 φ。在电介质和极板的界面上没有电势间断和外加面力；对于刚性电极，其内部的位移和电场均为零，所以其内能为零，但其上作用有电势差 φ。由于电介质为极板所包围，故没有边界，从而按内能变分原理式(3-90)，对单位宽度的介质，有

$$\delta\Pi_{\mathrm{e}1}=\delta\int_V u\,\mathrm{d}V=h\left(\sigma_{22}\delta u_{2,2}+E_2\delta D_2+\frac{1}{2}E_2D_2\delta u_{2,2}\right)$$

$$\delta\Pi_{\mathrm{e}2}=-\int_{a_\varphi^{\mathrm{env}}}\varphi^{*\mathrm{env}}\delta(\sigma^{\mathrm{env}}\mathrm{d}a)=-\varphi\delta\sigma,\quad \delta W_{\mathrm{e}}^{\mathrm{itf}}=0$$

从而得出

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{\mathrm{e}}&=h\left(\sigma_{22}\delta u_{2,2}+E_2\delta D_2+\frac{1}{2}E_2D_2\delta u_{2,2}\right)-\varphi\delta\sigma=\\&h\left[T_2\frac{\delta h}{h}+\epsilon\frac{\varphi}{h}\delta\frac{\varphi}{h}+\frac{1}{2}\epsilon\left(\frac{\varphi}{h}\right)^2\frac{\delta h}{h}\right]-\epsilon\varphi\delta\left(\frac{\varphi}{h}\right)=0\end{aligned} \tag{3-105}$$

由此导出 $T_2=-(\epsilon/2)(\varphi/h)^2$，这和 2.4.7 节的结果一致。采用电 Gibbs 函数变分原理时，给定电容器极板上的电荷为 $q_0=D_2$。按式(3-49)有

$$\delta\Pi_{\mathrm{g}1}=\delta\int_V g\,\mathrm{d}V=h\left(\sigma_{22}\delta u_{2,2}-D_2\delta E_2-\frac{1}{2}E_2D_2\delta u_{2,2}\right)$$

$$\delta\Pi_{g2} = -\int_{a_q^{env}} \sigma^{*env} \delta\varphi^{env} da = -D_2 \delta(E_2 h), \quad \delta W_g^{int} = 0$$

从而得出

$$\begin{aligned}\delta\Pi_g &= h\left(\sigma_{22}\delta u_{2,2} - D_2\delta E_2 - \frac{1}{2}E_2 D_2 \delta u_{2,2}\right) + D_2\delta(E_2 h) = \\ & h\left(T_2 \frac{\delta h}{h} - \frac{1}{2}\epsilon E_2^2 \frac{\delta h}{h}\right) + \epsilon E_2^2\ \delta h = 0\end{aligned} \tag{3-106}$$

由此导出 $T_2 = -(\epsilon/2)E_2^2$，这和上面的结果一致。

对于上述问题，我们还可以把电极设想为非常薄的柔软层，黏附在电介质上，使电介质的两边存在电势差或两极板上存在符号相反的电荷，而环境可以略去不计。应用内能变分原理和电 Gibbs 函数变分原理时，便分别得到下述方程

$$\begin{aligned}&\delta\Pi_e = \delta\Pi_{e1} = \delta\int_V u\,dV = h\left(\sigma_{22}\delta u_{2,2} + E_2\delta D_2 + \frac{1}{2}E_2 D_2 \delta u_{2,2}\right) - \varphi\delta\sigma \\ &\delta\Pi_{e2} = -\int_{a_\varphi^{env}} \varphi^{*env}\delta(\sigma^{env} da) = 0, \quad \delta W_e^{int} = 0\end{aligned} \tag{3-107a}$$

和

$$\begin{aligned}&\delta\Pi_g = \delta\Pi_{g1} = \delta\int_V g\,dV = h\left(\sigma_{22}\delta u_{2,2} - D_2\delta E_2 - \frac{1}{2}E_2 D_2 \delta u_{2,2}\right) + D_2\delta(E_2 h) \\ &\delta\Pi_{g2} = -\int_{a_q^{env}} \sigma^{*env}\delta\varphi^{env} da = 0, \quad \delta W_g^{int} = 0\end{aligned} \tag{3-107b}$$

显然和前面的结果一致。

3.7 等温电介质小变形时的守恒积分[32, 33]

3.7.1 Noether(瑙绍)理论

前面我们从物理变分原理讨论了连续介质力学中的场方程，数学上它们可以化为求某个 Lagrange 密度的泛函的极值问题，而这些场方程便是该泛函的 Euler - Lagrange 方程。在小变形问题的变分原理中，体积保持不变，有限变形理论中，边界是按变形规律变化的，也不是任意改变的，因而这类问题都相当于变分学中的固定端点变分问题。如果对这种泛函给以更一般的变分，容许泛函的“端点”和 Lagrange 密度中的自变量和因变量都变分，或使这些变分泛函对自变量和因变量作无穷小变换，那么除得到 Euler - Lagrange 方程外，还会出现一些附加项，其中就包含能量-动量张量。要求无穷小变换具有不变的性质，在常见的较简单的情形中，这些附加项形成一个散度为零的张量，在较复杂的情形，也可在一定条件下由这些附加项导出一些守恒积分或守恒律。这种变分和守恒定律的联系，首先由 Noether 给出。设变分泛函为

$$\int_V L(x_i,\ u_\alpha,\ u_{\alpha,j})dV \tag{3-108}$$

式中 $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{u}_{,j}$ 分别为自变量、因变量、因变量的导数。上式的 Euler - Lagrange 方程为

$$\frac{\partial L}{\partial u_{\alpha}}-\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial L}{\partial u_{\alpha,j}}=0 \tag{3-109a}$$

由于在我们讨论的连续介质力学中，Lagrange 密度函数不是因变量的显函数，所以下面只讨论形如 $L(x_i,\ u_{\alpha,j})$ 的 Lagrange 密度函数。对于这种情形，式(3-109a)化为

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial L(x_i,\ u_{\alpha,j})}{\partial u_{\alpha,j}}=0 \tag{3-109b}$$

现在给这些变量以微小的变化，或作下述无穷小变换

$$x_i\rightarrow x_i'=x_i+\Delta x_i(x_j,\ u_\alpha),\quad u_\alpha(x_i)\rightarrow u_\alpha'(x_i')=u_\alpha(x_i)+\Delta u_\alpha(x_i,\ u_\beta)$$
$$\Delta u_\alpha=u_\alpha'(x_i')-u_\alpha(x_i)=[u_\alpha(x_i+\Delta x_i)+\delta u_\alpha(x_i)]-u_\alpha(x_i)=u_{\alpha,i}\Delta x_i+\delta u_\alpha \tag{3-110}$$

式中 Δ 表示总变分，δ 表示经典(或局部)变分，是 x_i 不变时 u 的变分；$u_{\alpha,i}\Delta x_i$ 是 u_α 的迁移变分。注意到

$$\frac{\partial x_i'}{\partial x_j}\approx\delta_{ij}+\frac{\partial\Delta x_i}{\partial x_j},\qquad \frac{\partial x_i}{\partial x_j'}\approx\delta_{ij}-\frac{\partial\Delta x_i}{\partial x_j},\qquad j=\left|\frac{\partial x_i'}{\partial x_j}\right|\approx1+\frac{\partial\Delta x_i}{\partial x_i} \tag{3-111}$$

则由式(3-110)可导出

$$\begin{aligned}\Delta u_{\alpha,j}&=\frac{\partial u_\alpha'(x_i')}{\partial x_j'}-\frac{\partial u_\alpha(x_i)}{\partial x_j}=\frac{\partial[u_\alpha(x_i)+\Delta u_\alpha(x_i,\ u_\beta)]}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial x_j'}-\frac{\partial u_\alpha(x_i)}{\partial x_j}=\\&\frac{\partial\Delta u_\alpha(x_i,\ u_\beta)}{\partial x_j}-\frac{\partial u_\alpha(x_i)}{\partial x_k}\frac{\partial\Delta x_k}{\partial x_j}=(\Delta u_\alpha)_{,j}-u_{\alpha,k}(\Delta x_k)_{,j}\end{aligned} \tag{3-112a}$$

由于 $\Delta u_\alpha(x_i,\ u_\beta)$ 是 x_i，u_β 的函数，所以又要区分对 x_j 的全导数和偏导数，为此引入符号 $\bar{\partial}/\partial x_i$，表示只对函数中显含的 x_i 求导，不对 u_α 中隐含的 x_j 求导。因此有

$$\frac{\partial\Delta u_\alpha(x_i,\ u_\beta)}{\partial x_j}=\frac{\bar{\partial}\Delta u_\alpha(x_i,\ u_\beta)}{\partial x_j}+\frac{\partial\Delta u_\alpha(x_i,\ u_\beta)}{\partial u_\beta}\frac{\partial u_\beta}{\partial x_j} \tag{3-112b}$$

现在要求无穷小变换前后的泛函在一阶精度 Δx_i，Δu_α，$\Delta u_{\alpha,j}$ 范围内相等，即要求

$$\int_{V'}L'(x_i',\ u_{\alpha,j}')\mathrm{d}V'=\int_V L'(x_i',\ u_{\alpha,j}')j\mathrm{d}V=\int_V L(x_i,\ u_{\alpha,j})\mathrm{d}V \tag{3-113}$$

由此便可导出与之相关的守恒律。首先利用式(3-109b)和(3-112)，可得

$$\begin{aligned}&\left(\frac{\partial L}{\partial u_{\alpha,j}}\Delta u_\alpha-\frac{\partial L}{\partial u_{\alpha,j}}u_{\alpha,i}\Delta x_i\right)_{,j}+\left(\frac{\partial L}{\partial u_{\alpha,j}}u_{\alpha,i}\right)_{,j}\Delta x_i=\\&\frac{\partial L}{\partial u_{\alpha,j}}\left(\frac{\partial\Delta u_\alpha}{\partial x_j}-u_{\alpha,i}\frac{\partial\Delta x_i}{\partial x_j}\right)=\frac{\partial L}{\partial u_{\alpha,j}}\Delta u_{\alpha,j}\end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned}L'(x_i',\ u_{\alpha,j}')&=L(x_i+\Delta x_i,\ u_{\alpha,j}+\Delta u_{\alpha,j})=L(x_i,\ u_{\alpha,j})+\frac{\bar{\partial}L}{\partial x_i}\Delta x_i+\frac{\partial L}{\partial u_{\alpha,j}}\Delta u_{\alpha,j}=\\&L(x_i,\ u_{\alpha,j})+\frac{\bar{\partial}L}{\partial x_i}\Delta x_i+\left(\frac{\partial L}{\partial u_{\alpha,j}}\Delta u_\alpha-\frac{\partial L}{\partial u_{\alpha,j}}u_{\alpha,i}\Delta x_i\right)_{,j}+\left(\frac{\partial L}{\partial u_{\alpha,j}}u_{\alpha,i}\right)_{,j}\Delta x_i\end{aligned} \tag{3-114}$$

再利用恒等式

$$\left(\frac{\partial L}{\partial u_{\alpha,j}}u_{\alpha,i}\right)_{,j}\Delta x_i = (L\Delta x_i)_{,i} - L(\Delta x_i)_{,i} - \frac{\bar{\partial} L}{\partial x_i}\Delta x_i \tag{3-115}$$

把式(3－115)代入(3－114)，便得

$$L'(x_i',\ u_{\alpha,j}') = L(x_i,\ u_{\alpha,j}) + \left(\frac{\partial L}{\partial u_{\alpha,j}}\Delta u_\alpha + S_{ij}\Delta x_i\right)_{,j} - L(\Delta x_i)_{,i} \tag{3-116}$$

式中

$$S_{ij} = L\delta_{ij} - \frac{\partial L}{\partial u_{\alpha,j}}u_{\alpha,i} \tag{3-117}$$

称为物质能量-动量张量。把式(3－116)代入(3－113)，在一级精度范围内，便有

$$\int_V \left(\frac{\partial L}{\partial u_{\alpha,j}}\Delta u_\alpha + S_{ij}\Delta x_i\right)_{,j}\mathrm{d}V = 0 \tag{3-118a}$$

上式便是积分形式的无穷小变换不变性的条件。由于体积的任意性，所以又有

$$\left(\frac{\partial L}{\partial u_{\alpha,j}}\Delta u_\alpha + S_{ij}\Delta x_i\right)_{,j} = 0 \tag{3-118b}$$

上式便是局部形式的无穷小变换不变性的条件。

显然，在上面的讨论中，已设没有体积力和体积电荷等体积源。

3.7.2 均匀介质中的守恒积分

对于均匀材料，L 又和自变量无关，所以有 $L = L(u_{\alpha,j})$。如假设 $\Delta x_i = 0$，可以通过假设不同的 Δu_α 导出力学中的一些普适定律，例如设 $\Delta x_i = 0$，$\Delta u_\alpha = \varepsilon c_\alpha$，其中 c_α 为常数，ε 为无穷小参数。以此代入式(3－118)，便可得动量方程 $(\partial L/\partial u_{\alpha,j})_{,j} = 0$。现在回到守恒积分的讨论。为确定起见，取 L 为电 Gibbs 函数 g，同时取用广义位移 $u_\alpha = u_i$，当 $\alpha = 1, 2, 3$；$u_4 = \varphi$ 和广义应力 $\Sigma_{\alpha j} = \partial g/\partial u_{\alpha,j}$，且 $\Sigma_{\alpha j} = \sigma_{\alpha j}$，当 $\alpha = 1, 2, 3$；$\Sigma_{4j} = D_j$。

1）**坐标和广义位移均作无穷小平移**

设

$$\Delta x_i = \varepsilon c_i,\quad \Delta u_\alpha = \varepsilon \Omega_\alpha \tag{3-119}$$

式中 ε 为无穷小参数，c_i 和 Ω_α 是一些常数。以此代入式(3－118)，并注意到 $\Sigma_{\alpha j,j} = 0$，便可推出

$$\varepsilon S_{ij,j}c_i = 0,\quad 或\int_V S_{ij,j}\mathrm{d}V = \int_a (g\delta_{ij} - \Sigma_{\alpha j}u_{\alpha,i})n_j\mathrm{d}a = 0 \tag{3-120}$$

式(3－120)还可直接由 g 取散度等于零得到，即

$$(\nabla g)_i = \frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{\bar{\partial} g}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial u_{\alpha,j}}u_{\alpha,ji} = \Sigma_{\alpha j}u_{\alpha,ji},\quad 或\ g_{,i} - \Sigma_{\alpha j}u_{\alpha,ji} = 0$$

再利用 Euler－Lagrange 方程或运动方程，可得 $(g\delta_{ij} - \Sigma_{\alpha j}u_{\alpha,i})_{,j} = 0$。把上式对体积积分后再利用散度定理，便可得式(3－120)，这也是许多作者推求均匀材料中 J 积分和其他守恒积分的

方法。

2）坐标和广义位移均作无穷小膨胀

设

$$\Delta x_i = \varepsilon x_i, \quad \Delta u_\alpha = -\frac{1}{2}\varepsilon u_\alpha \tag{3-121}$$

式中 ε 为无穷小参数。以此代入式(3-118)，便得

$$\varepsilon\left(-\frac{1}{2}\Sigma_{\alpha j}u_\alpha + S_{ij}x_i\right)_{,j} = 0, \quad 或\int_a\left[(g\delta_{ij} - \Sigma_{\alpha j}u_{\alpha,i})x_i - \frac{1}{2}\Sigma_{\alpha j}u_\alpha\right]n_j \mathrm{d}a = 0 \tag{3-122}$$

式(3-121)中若令 $\Delta u_\alpha = \varepsilon u_\alpha/2$，则式(3-122)变为$(\Sigma_{\alpha j}u_\alpha/2 + S_{ij}x_i)_{,j} = 0$。在二维无体积源的问题中，式(3-120)和(3-122)表示沿闭围线的积分为零，或经过两个固定点 1 和 2 的任意两条路线 Γ_1 和 Γ_2 的积分值都相同，它们分别是二维断裂力学中的 J 和 M 积分，即

$$\begin{aligned} J_i &= \int_{\Gamma_1}(g\delta_{ij} - \Sigma_{\alpha j}u_{\alpha,i})n_j \mathrm{d}l = \int_{\Gamma_2}(g\delta_{ij} - \Sigma_{\alpha j}u_{\alpha,i})n_j \mathrm{d}l = \\ &\int_1^2(g\delta_{ij} - \Sigma_{\alpha j}u_{\alpha,i})n_j \mathrm{d}l = \int_1^2(g\delta_{ij} - \sigma_{ij}u_{i,j} - D_j\varphi_{,i})n_j \mathrm{d}l \\ M &= \int_{\Gamma_1}\left[(g\delta_{ij} - \Sigma_{\alpha j}u_{\alpha,i})x_i - \frac{1}{2}\Sigma_{\alpha j}u_\alpha\right]n_j \mathrm{d}l = \\ &\int_1^2\left[(g\delta_{ij} - \sigma_{ij}u_{i,j} - D_j\varphi_{,i})x_i - \frac{1}{2}(\sigma_{ij}u_i + D_j\varphi)\right]n_j \mathrm{d}l \end{aligned} \tag{3-123}$$

上述性质对裂纹问题特别有用，因为裂尖是奇点，极接近裂尖的区域，应力非常复杂，因而利用上述性质，便可用远离裂尖的围线积分来代替极接近裂尖的区域的围线积分，计算裂尖能量释放率。Pak[34]，Wang 和 Shen[35]等用不同的方法也得到过上述积分。对线弹性问题的守恒积分，Fletcher[36]做过较详细的讨论。

如果围线内部包含奇点，那么式(3-120)或(3-123)便不再为零了[9]。

王和匡[37]利用 Noether 理论讨论了热释电体中的守恒定律，他们得到二维的 J，M 积分分别为

$$\begin{aligned} J_i &= \int_1^2(g\delta_{ij} - \sigma_{ij}u_{i,j} - D_j\varphi_{,i} - s_j\vartheta_{,i})n_j \mathrm{d}l \\ M &= \int_1^2\left[(g\delta_{ij} - \sigma_{ij}u_{i,j} - D_j\varphi_{,i} - s_j\vartheta_{,i})x_i + \frac{1}{2}(\sigma_{ij}u_i + D_j\varphi + s_j\vartheta)\right]n_j \mathrm{d}l \end{aligned}$$

式中 s_j 为熵位移矢量，而 $\dot{s}_j$ 为熵流，$\dot{s}_j = q_j/T_0$，$\vartheta = T - T_0$，q_j 为热流矢量，T 和 T_0 分别为介质和环境的温度，详细解释见第 10 章。

3.7.3 非均匀介质中作用在缺陷上的力

对于非均匀材料，由于材料系数和坐标相关，所以 L 也和自变量相关，即有 $L = L(x_i, u_{\alpha,j})$。

1）坐标和广义位移均作无穷小平移

Δx_i，Δu_α 仍由式(3-119)表示，无穷小变换的不变性条件仍为 $S_{ij,j} = 0$，但积分项不同

了,因为此时有

$$S_{ij,j} = (g\delta_{ij} - \Sigma_{\alpha j} u_{\alpha,i})_{,j} = \frac{\bar{\partial} g}{\partial x_i} + \frac{\partial g}{\partial u_{\alpha,j}} u_{\alpha,ji} - \Sigma_{\alpha j} u_{\alpha,ij} = \frac{\bar{\partial} g}{\partial x_i} \tag{3-124}$$

所以式(3-120)中的积分项改变为

$$\int_V S_{ij,j} \mathrm{d}V = \int_a (g\delta_{ij} - \Sigma_{\alpha j} u_{\alpha,i}) n_j \mathrm{d}a = \int_V \frac{\bar{\partial} g}{\partial x_i} \mathrm{d}V \tag{3-125}$$

虽然对于非均匀材料,上式不是一个守恒积分,但在力学上同样具有重要意义。首先由Eshelby[10, 38](艾希贝)指出,$-\bar{\partial} g/\partial x_i$ 是热力学特性函数电吉布斯函数对 x_i 偏导数的负值,代表作用在缺陷上的某种力,具有力的量纲。但要指出,作用在这种缺陷上的"力",不一定是牛顿力。力学中的缺陷可以是介质中的不均匀夹杂、裂纹、空洞、位错和间隙原子等。

2) 坐标和广义位移均作无穷小膨胀

Δx_i, Δu_α 仍由式(3-121)表示,无穷小变换的不变性条件仍为 $\left(-\frac{1}{2}\Sigma_{\alpha j} u_\alpha + S_{ij} x_i\right)_{,j} = 0$,但积分项不同了,因为此时有

$$\left(-\frac{1}{2}\Sigma_{\alpha j} u_\alpha + S_{ij} x_i\right)_{,j} = S_{ij,j} x_i + S_{ij} x_{i,j} - \frac{1}{2}\Sigma_{\alpha j} u_{\alpha,j} = x_i \frac{\bar{\partial} g}{\partial x_i}$$

所以式(3-122)中的积分项改变为

$$\int_a \left[(g\delta_{ij} - \Sigma_{\alpha j} u_{\alpha,i}) x_i - \frac{1}{2}\Sigma_{\alpha j} u_\alpha\right] n_j \mathrm{d}a = \int_V x_i \frac{\bar{\partial} g}{\partial x_i} \mathrm{d}V \tag{3-126}$$

式中 $x_i \bar{\partial} g/\partial x_i$ 代表作用在缺陷上的某种力矩。

3.7.4 非均匀介质中的守恒积分

从上面的讨论可知,需要假设合适的 Δx_i, Δu_α,才能获得实用的守恒积分。

1) 坐标作无穷小平移,广义位移和一未知函数相关

设

$$\Delta x_i = \varepsilon c_i, \quad \Delta u_\alpha = \varepsilon \Omega_\alpha \tag{3-127}$$

式中 ε 为无穷小参数,c_i 是一些常数,Ω_α 是一些未知函数。以此代入式(3-118),并注意到 $\Sigma_{\alpha j,j} = 0$ 和 $S_{ij,j} = (g\delta_{ij} - \Sigma_{\alpha j} u_{\alpha,i})_{,j} = (\bar{\partial} g/\partial x_i)$,便可推出

$$\Sigma_{\alpha j} \Omega_{\alpha,i} + c_i (g\delta_{ij} - \Sigma_{\alpha j} u_{\alpha,i})_{,j} = \Sigma_{\alpha j} \Omega_{\alpha,i} + \frac{\bar{\partial} g}{\partial x_i} c_i = 0 \tag{3-128}$$

由上式知,只有当材料系数服从一定的规律和合适地选取 c_i, Ω_α 时,才有可能化为守恒积分。

2) 坐标作无穷小膨胀,广义位移作无穷小膨胀和平移

设

$$\Delta x_i = \varepsilon x_i, \quad \Delta u_\alpha = \varepsilon\left(-\frac{1}{2} u_\alpha + \Omega_\alpha\right) \tag{3-129}$$

式中 ε 为无穷小参数，Ω_α 是一些未知函数。以此代入无穷小不变性条件式(3－118)，便得

$$\Sigma_{\alpha j}\Omega_{\alpha,j}+\left(S_{ij}x_i-\frac{1}{2}\Sigma_{\alpha j}u_\alpha\right)_{,j}=0 \tag{3-130}$$

由上式知，只有当材料系数服从一定的规律和合适地选取 Ω_α 时，才有可能化为守恒积分。下面将讨论几个具体的例子来阐述上述理论。

3.7.5 单方向梯度材料中的守恒积分

工程中为了更好地利用材料的性质，往往采用组合材料。如高温情况下使用的结构，常常把强度韧度好的材料和高温材料组成复合材料；但是两种材料的界面会产生极高的奇异应力和电场等。此时使两种材料之间产生过渡层，使材料的性质逐渐过渡，将显著改善工况，这便需要使用梯度材料。当今，单方向梯度材料已得到广泛使用。

1) ***材料系数沿 x_1 方向按指数变化***

设材料系数为 $C_{ijkl}\mathrm{e}^{\lambda x_1}$，$e_{kij}\mathrm{e}^{\lambda x_1}$，$\epsilon_{ij}\mathrm{e}^{\lambda x_1}$，并设无穷小变换为式(3－127)的类型，即取

$$\Delta x_1=\varepsilon,\quad \Delta x_2=\Delta x_3=0,\quad \Delta u_\alpha=\varepsilon\Omega_\alpha=\varepsilon b u_\alpha,\ \alpha=1,2,3,4 \tag{3-131}$$

代入不变性条件式(3－118)，得

$$(\Sigma_{\alpha j}bu_\alpha+S_{1j})_{,j}=b\Sigma_{\alpha j}u_{\alpha,j}+S_{1j,j}=b\Sigma_{\alpha j}u_{\alpha,j}+\partial g/\partial x_1=0 \tag{3-132}$$

因为 $\Sigma_{\alpha j}u_{\alpha,j}=2g$，又按材料系数的特点有 $\partial g/\partial x_1=\lambda g$，由式(3－132)得 $2b+\lambda=0$ 或 $b=-\lambda/2$，以此代入式(3－131)，再代入式(3－132)，便得

$$(-\lambda\Sigma_{\alpha j}u_\alpha/2+S_{1j})_{,j}=0 \tag{3-133}$$

利用

$$(S_{1j}-\lambda\Sigma_{\alpha j}u_\alpha/2)_{,j}=(g\delta_{1j}-\Sigma_{\alpha j}u_{\alpha,1}-\lambda\Sigma_{\alpha j}u_\alpha/2)_{,j}=g_{,1}-\Sigma_{\alpha j}u_{\alpha,1j}-\lambda\Sigma_{\alpha j}u_{\alpha,j}/2$$

立即推出

$$\int_a(g\delta_{j1}-\Sigma_{\alpha j}u_{\alpha,1}-\lambda\Sigma_{\alpha j}u_\alpha/2)n_j\,\mathrm{d}a=0 \tag{3-134}$$

2) ***材料系数沿 x_1 方向按幂指数变化***

设材料系数为 $C_{ijkl}(1+px_1)^q$，$e_{kij}(1+px_1)^q$，$\epsilon_{ij}(1+px_1)^q$，再设无穷小变换为式(3－129)的类型，即取

$$\Delta x_i=\varepsilon(1+px_i),\quad \Delta u_\alpha=\varepsilon[(1+p)\Omega_\alpha+pu_\alpha/2] \tag{3-135}$$

代入不变性条件式(3－118)，得

$$\{\Sigma_{\alpha j}[(1+p)\Omega_\alpha+pu_\alpha/2]+S_{ij}(1+px_i)\}_{,j}=0 \tag{3-136}$$

利用材料系数的特点有

$$\begin{gathered}\frac{\partial C_{ijkl}}{\partial x_1}=\frac{pq}{1+px_1}C_{ijkl},\quad \frac{\partial e_{kij}}{\partial x_1}=\frac{pq}{1+px_1}e_{kij},\quad \frac{\partial\epsilon_{ij}}{\partial x_1}=\frac{pq}{1+px_1}\epsilon_{ij}\\ \frac{\partial g}{\partial x_1}=\frac{pq}{1+px_1}g,\quad \frac{\partial g}{\partial x_2}=\frac{\partial g}{\partial x_3}=0\end{gathered} \tag{3-137}$$

以此代入式(3-136),便得

$$(1+p)\Sigma_{\alpha j}\Omega_{\alpha,j}+\frac{p}{2}\Sigma_{\alpha j}u_{\alpha,j}+(1+px_1)\frac{\bar{\partial} g}{\partial x_1}+pS_{ij}\frac{\partial x_i}{\partial x_j}=0 \tag{3-138}$$

利用关系 $pS_{ij}\partial x_i/\partial x_j=-pg$ 和式(3-137),则不变性条件式化为

$$(1+p)\Sigma_{\alpha j}\Omega_{\alpha,j}+pqg=0 \tag{3-139}$$

其解为

$$\Omega_\alpha=-\frac{pq}{2(1+p)}u_\alpha \tag{3-140}$$

最终得出守恒律

$$\begin{gathered}\left[S_{ij}+px_iS_{ij}+\frac{1}{2}p(1-q)\Sigma_{\alpha j}u_\alpha\right]_{,j}=0\\ \int_a\left[(1+px_i)S_{ij}+\frac{1}{2}p(1-q)\Sigma_{\alpha j}u_\alpha\right]n_j\mathrm{d}a=0\end{gathered} \tag{3-141}$$

3.7.6 横观各向同性材料

对横观各向同性材料,可取无穷小变换为

$$\Delta x_i=\varepsilon\omega_i(x_j),\quad \Delta u_\alpha=\varepsilon W_\alpha(u_\beta)=\varepsilon P_{\alpha\beta}u_\beta \tag{3-142}$$

式中 $P_{\alpha\beta}$是待定常数。把上式代入不变性条件式(3-118),便得

$$\omega_j\frac{\bar{\partial} g}{\partial x_j}+g\frac{\bar{\partial}\omega_j}{\partial x_j}+\Sigma_{\alpha j}\left(P_{\alpha\beta}u_{\beta,j}-u_{\alpha,i}\frac{\bar{\partial}\omega_i}{\partial x_j}\right)=0 \tag{3-143}$$

由上式推出把位移和电势明显写出的下列方程

$$\Pi_{ijkl}u_{i,j}u_{k,l}+\Pi_{kij}\varphi_{,k}u_{i,j}+\Pi_{ij}\varphi_{,i}\varphi_{,j}=0 \tag{3-144}$$

式中

$$\begin{aligned}\Pi_{ijkl}&=\frac{1}{2}\frac{\partial(\omega_nC_{ijkl})}{\partial x_n}+P_{mi}C_{mjkl}-\omega_{j,m}C_{imkl}+P_{4i}e_{jkl}\\ \Pi_{kij}&=\frac{\partial(\omega_ne_{kij})}{\partial x_n}+P_{44}e_{kij}+P_{mi}e_{kmj}-\omega_{j,m}e_{kim}-\omega_{k,m}e_{mij}+P_{m4}C_{mkij}-P_{4i}\in_{jk}\\ \Pi_{ij}&=-\frac{1}{2}\frac{\partial(\omega_n\in_{ij})}{\partial x_n}-P_{44}\in_{ij}+\omega_{i,m}\in_{mj}+P_{m4}e_{imj}\end{aligned} \tag{3-145}$$

式(3-144)中的二次项 $u_{i,j}u_{k,l}$, $\varphi_{,k}u_{i,j}$, $\varphi_{,i}\varphi_{,j}$并无确定的关系,所以各项前的系数应为零,由此推出

$$\Pi_{ijkl}+\Pi_{klij}=0,\quad \Pi_{kij}=0,\quad \Pi_{ij}+\Pi_{ji}=0 \tag{3-146}$$

对压电陶瓷(如 PZT 等)一类材料,设其极化方向沿 x_3 轴,则 x_1x_2 为各向同性平面,属于横观各向同性材料。为确定起见,现在讨论 x_1x_3 平面,本构方程采用 Voigt 符号。本构方

程为

$$\{\sigma\} = [C]\{\varepsilon\} - [e]^{\mathrm{T}}\{E\}, \quad \{D\} = [\epsilon]\{E\} + [e]\{\varepsilon\} \tag{3-147}$$

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2C_{66} \end{bmatrix} \tag{3-148a}$$

$$C_{11} = C_{1111}, \quad C_{12} = C_{1122}, \quad C_{13} = C_{1133}, \quad C_{33} = C_{3333}, \quad C_{44} = C_{1313}$$

$$[e] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\epsilon] = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \tag{3-148b, c}$$

$$e_{15} = e_{113}, \quad e_{31} = e_{311}, \quad e_{33} = e_{333}$$

虽然假设的无穷小变换式(3-142)中的待定系数较少,少于式(3-145)给出的代数方程数,但由于式(3-142)选择得合理,所以仍能确定合适的待定系数。根据横观各向同性材料系数的特点,最终可选

$$\begin{aligned} &\omega_1 = (b - P_{11})x_1 + P_{12}x_2 + C_1, \quad \omega_2 = -P_{12}x_1 + (b - P_{11})x_2 + C_2 \\ &\omega_3 = (b - P_{33})x_3 + C_3, \quad W_1 = P_{11}u_1 + P_{12}u_2, \quad W_2 = -P_{12}u_1 + P_{11}u_2 \\ &W_3 = P_{33}u_3 + P_{34}\varphi, \quad W_4 = P_{44}\varphi \end{aligned} \tag{3-149}$$

式中 C_i 是一些新的常数。当式(3-142)的系数取式(3-149)时,由无穷小变换不变性条件式(3-146),可得到一组一阶线性偏微分方程组来确定其中的待定系数。这组一阶线性偏微分方程组为

$$\begin{aligned} &\omega_n \frac{\partial C_{11}}{\partial x_n} + (2P_{11} - P_{33} + b)C_{11} = 0, \quad \omega_n \frac{\partial C_{33}}{\partial x_n} + (-2P_{11} + 3P_{33} + b)C_{33} = 0 \\ &\omega_n \frac{\partial C_{12}}{\partial x_n} + (2P_{11} - P_{33} + b)C_{12} = 0, \quad \omega_n \frac{\partial C_{13}}{\partial x_n} + (P_{33} + b)C_{13} = 0 \\ &\omega_n \frac{\partial C_{44}}{\partial x_n} + (P_{33} + b)C_{44} = 0, \quad \omega_n \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_n} + (2P_{44} - P_{33} + b)\varepsilon_{11} - 2P_{34}e_{15} = 0 \\ &\omega_n \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x_n} + (2P_{44} + P_{33} - 2P_{11} + b)\varepsilon_{33} - 2P_{34}e_{33} = 0 \\ &\omega_n \frac{\partial e_{15}}{\partial x_n} + (P_{44} + b)e_{15} + P_{34}C_{44} = 0, \quad \omega_n \frac{\partial e_{31}}{\partial x_n} + (P_{44} + b)e_{31} + P_{34}C_{13} = 0 \\ &\omega_n \frac{\partial e_{33}}{\partial x_n} + (P_{44} + 2P_{33} - 2P_{11} + b)e_{33} + P_{34}C_{33} = 0 \end{aligned} \tag{3-150}$$

当材料系数随坐标变化的关系允许上式解出待定系数时,便可以得到一组实用的无穷小变换,式(3-142)中的系数便可由材料的性质表示出来。再把式(3-142)代入(3-118),便可

得到守恒积分：

$$(S_{ij}\omega_i+\sigma_{ij}W_i+D_jW_4)_{,j}=0, \quad \int_a(S_{ij}\omega_i+\sigma_{ij}W_i+D_jW_4)n_j\mathrm{d}a=0 \tag{3-151}$$

对于材料系数为常数的均匀材料，式(3-150)成为线性代数方程，其解为

$$P_{34}=0, \quad P_{11}=P_{33}=P_{44}=-b \tag{3-152}$$

式中 b 和其他的 C_1，C_2，C_3，P_{12} 可任意选取。在这种情况下，式(3-151)化为

$$\begin{aligned}&\left\{C_1S_{ij}+C_2S_{2j}+C_3S_{3j}+2b\left[S_{ij}x_1-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}u_i+D_j\varphi)\right]+\right.\\&\left.P_{12}(S_{1j}x_2-S_{2j}x_1+\sigma_{1j}u_2-\sigma_{2j}u_1)\right\}_{,j}=0\\&\int_a\left\{C_1S_{ij}+C_2S_{2j}+C_3S_{3j}+2b\left[S_{ij}x_1-\frac{1}{2}(\sigma_{ij}u_i+D_j\varphi)\right]+\right.\\&\left.P_{12}(S_{1j}x_2-S_{2j}x_1+\sigma_{1j}u_2-\sigma_{2j}u_1)\right\}n_j\mathrm{d}a=0\end{aligned} \tag{3-153}$$

由于常数的任意性，上式可以分解为5个独立的守恒积分。

第4章

广义二维线性电弹性问题

4.1 广义二维线性电弹性问题

广义二维线性电弹性问题是指位移、电势、应力、应变和电位移，电场强度等只依赖于(x_1，x_2，x_3)中的2个，而不依赖于第三个，但位移可以有3个分量，应力和应变可以有6个分量，电位移和电场强度可以有3个分量。求解广义二维线性电弹性问题的方法是广义二维线性弹性问题的直接推广，不存在理论上的困难，不过问题变得更为复杂。

目前工程上使用较多的是以应变和电场强度为自变量的线性压电本构方程，即式(3-29)

$$\begin{gathered}\sigma_{ij}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl}-e_{kij}E_k-\alpha_{ij}\vartheta,\quad D_i=\epsilon_{ij}E_j+e_{ikl}\epsilon_{kl}+\tau_i\vartheta\\ s=\alpha_{ij}\varepsilon_{ij}+\tau_iE_i+C\vartheta/T_0,\quad \vartheta=T-T_0\end{gathered}\tag{4-1}$$

热传导定律为式(3-21)，即

$$q_i=-\lambda_{ij}T_{,j},\quad T_{,j}=-\lambda_{ji}^{-1}q_i\tag{4-2}$$

力学动量方程(不计体积力)和电学高斯方程分别为

$$\sigma_{ij,i}+(f_j^{\mathrm{m}}+f_j^{\mathrm{e}})=\rho\ddot{u}_j,\quad D_{i,i}=\rho_{\mathrm{e}}\tag{4-3}$$

热流方程为式(3-16)，结合式(4-1)，便得

$$-q_{i,i}=T\dot{s}-\dot{r}=T(\alpha_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}+\tau_i\dot{E}_i+C\dot{\vartheta}/T_0)-\dot{r}\tag{4-4}$$

几何方程和电学有势方程为

$$\varepsilon_{ij}=(u_{i,j}+u_{j,i})/2,\quad E_i=-\varphi_{,i}\tag{4-5}$$

力学、电学和热学边界条件为

$$\begin{aligned}&\sigma_{ij}n_j=t_i^*\ (\text{在 } a_\sigma \text{ 上}),\quad u_i=u_i^*\ (\text{在 } a_u \text{ 上})\\&D_in_i=-\sigma^*\ (\text{在 } a_D \text{ 上}),\quad \varphi=\varphi^*\ (\text{在 } a_\varphi \text{ 上})\\&q_in_i=q_0^*\ (\text{在 } a_q \text{ 上}),\quad T=T^*\ (\text{在 } a_T \text{ 上})\end{aligned}\tag{4-6}$$

式中 t^* 是边界上的面力，σ^* 是单位边界面上的电荷，q_0^* 是单位边界面上的法向热流。

在两种介质的界面上的连接条件为

$$\sigma_{ij}^+n_j=\sigma_{ij}^-n_j,\quad u_i^+=u_i^-,\quad D_i^+=D_i^-,\quad \varphi^+=\varphi^-,\quad T^+=T^-,\quad q^+=q^-\ (\text{在 } a^{\mathrm{itf}} \text{ 上})\tag{4-7}$$

由上列诸式可以推出用位移、电势和温度表示的基本方程和热传导能量方程

$$
\begin{aligned}
&(C_{ijlk}u_l + e_{kij}\varphi)_{,ik} - \alpha_{ij}\vartheta_{,i} + (f_j^{\mathrm{m}} + f_j^{\mathrm{e}}) = \rho\ddot{u}_j \\
&s = \alpha_{ij}\varepsilon_{ij} + \tau_i E_i + C\vartheta/T_0 \\
&(-\epsilon_{ik}\varphi + e_{ijk}u_j)_{,ik} + \tau_i T_{,i} = \rho_e \\
&(\lambda_{ij}T_{,j})_{,i} = T\alpha_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij} + T\tau_i\dot{E}_i + TC\dot{\vartheta}/T_0 - \dot{r}
\end{aligned}
\tag{4-8}
$$

式中 f_j^{m}为机械体积力,f_j^{e}为静电体积力。对多连域,位移、电势和温度还应满足单值性条件

$$
\oint_L \mathrm{d}u_i = 0,\quad \oint_L \mathrm{d}\varphi = 0,\quad \oint_L \mathrm{d}T = 0 \tag{4-9}
$$

式中 L 是包围多连域中任一单连域的围线。

4.2 等温齐次方程的广义位移解法

4.2.1 等温齐次方程的位移解法[4, 7, 8, 39, 40]

等温齐次方程的解是其他问题求解的基础,因此在此较详细地讨论它的解,此时本构方程式(4-1)化为

$$
\sigma_{ij} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - e_{kij}E_k,\quad D_i = \epsilon_{ij}E_j + e_{ikl}\varepsilon_{kl} \tag{4-10a}
$$

或把本构方程和平衡方程写成更简洁的形式

$$
\Sigma_{iJ} = E_{iJKl}Z_{Kl};\quad \Sigma_{iJ} = \begin{cases}\sigma_{ij},\ J=1,2,3,\\ D_i,\ J=4;\end{cases}\quad Z_{Kl,l} = \begin{cases}\varepsilon_{kl},\ K=1,2,3,\\ -E_l,\ K=4\end{cases}
$$

$$
U_K = \begin{cases}u_k,\ K=1,2,3,\\ \varphi,\ K=4;\end{cases}\quad E_{iJKl} = \begin{cases}C_{ijkl},\ J,K=1,2,3,\\ e_{lij},\ J=1,2,3,\ K=4,\\ e_{ikl},\ J=4,\ K=1,2,3,\\ -\epsilon_{ij},\ J=K=4,\end{cases}\quad \Sigma_{iJ,i}=0 \tag{4-10b}
$$

上式中小写字母下标取值 1, 2, 3;大写字母下标取值 1, 2, 3, 4;式中 U_K, Σ_{iJ}, Z_{Kl}和 E_{iJKl}分别为广义位移、广义应力、广义应变和广义弹性系数。由于电弹性理论中使用的记号过于复杂,因而每种记法不是绝对的。本书中许多情况下,下标全部采用小写字母,读者要根据物理量本身是几维的去理解下标的取值范围,但大写字母下标的取值范围一般均是 1～4。不计体积力和自由电荷时,式(4-3),用位移和电势表示的平衡方程为齐次方程

$$
(C_{ijlk}u_l + e_{kij}\varphi)_{,ik} = 0,\quad (-\epsilon_{ik}\varphi + e_{ilk}u_l)_{,ik} = 0 \tag{4-11}
$$

由于讨论的是广义平面问题,所以设其解为(Stroh,斯特劳)

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{U} = \boldsymbol{a}f(z),\quad 或\ u_i = a_i f(z),\quad \varphi = a_4 f(z)\\
&\boldsymbol{U} = [u_i,\ \varphi]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{a} = [a_i,\ a_4]^{\mathrm{T}},\quad z = x_1 + \mu x_2,\quad z_{,1} = 1,\quad z_{,2} = \mu
\end{aligned}
\tag{4-12}
$$

上式中的 $\boldsymbol{U} = [u_i,\ \varphi]^{\mathrm{T}}$ 也写成 $\boldsymbol{U} = [u_i]^{\mathrm{T}}$, $u_4 = \varphi$, 此时读者要根据 $\boldsymbol{u}$ 有 3 个分量,而 $\boldsymbol{U}$ 有 4 个分量去判断下标的取值范围。把式(4-12)代入(4-11),便得

$$(C_{\alpha jl\beta}a_l + e_{\beta j\alpha}a_4)z_{,\alpha}z_{,\beta} = 0, \quad (-\epsilon_{\alpha\beta}a_4 + e_{\beta l\alpha}a_l)z_{,\alpha}z_{,\beta} = 0 \tag{4-13}$$

式中希腊字母取值 1 和 2,英文字母取值 1, 2 和 3。上式详细写出为

$$\begin{aligned}&[C_{i1k1} + \mu(C_{i1k2} + C_{i2k1}) + \mu^2 C_{i2k2}]a_k + [e_{1i1} + \mu(e_{2i1} + e_{1i2}) + \mu^2 e_{2i2}]a_4 = 0\\&[e_{1k1} + \mu(e_{2k1} + e_{1k2}) + \mu^2 e_{2k2}]a_k - [\epsilon_{11} + \mu(\epsilon_{12} + \epsilon_{21}) + \mu^2 \epsilon_{22}]a_4 = 0\end{aligned} \tag{4-14a}$$

式中 i, $k=1, 2, 3$, i 代表行数,所以第一式代表三个方程。要 a_k, a_4 有非零解,其前的系数的行列式必须为零,即得下列求本征值 μ 的方程

$$|\boldsymbol{D}(\mu)| = \begin{vmatrix} C_{i1k1} + \mu(C_{i1k2} + C_{i2k1}) + \mu^2 C_{i2k2} & e_{1i1} + \mu(e_{2i1} + e_{1i2}) + \mu^2 e_{2i2} \\ e_{1k1} + \mu(e_{2k1} + e_{1k2}) + \mu^2 e_{2k2} & -\epsilon_{11} - \mu(\epsilon_{12} + \epsilon_{21}) - \mu^2 \epsilon_{22} \end{vmatrix} = 0 \tag{4-15a}$$

式中 $i=1, 2, 3$ 组成三行,$k=1, 2, 3$ 组成三列,所以上式是 4×4 阶的行列式,组成 μ 的 8 阶方程,故 μ 有 8 个根。

如果引入 4×4 阶的方阵 $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{T}$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} C_{i1k1} & e_{1i1} \\ e_{1k1} & -\epsilon_{11} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} C_{i1k2} & e_{2i1} \\ e_{1k2} & -\epsilon_{12} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} C_{i2k2} & e_{2i2} \\ e_{2k2} & -\epsilon_{22} \end{bmatrix} \tag{4-16}$$

$$Q_{JK} = E_{1JK1}, \quad R_{JK} = E_{1JK2}, \quad T_{JK} = E_{2JK2}$$

则式(4-14)和(4-15)还可分别写成

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{D}(\mu)\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{Q} + \mu(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}) + \mu^2 \boldsymbol{T}]\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}\\&(\boldsymbol{Q} + \mu\boldsymbol{R})\boldsymbol{a} = -\mu(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} + \mu\boldsymbol{T})\boldsymbol{a}, \quad (\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} + \mu\boldsymbol{T})\boldsymbol{a} = -(\mu^{-1}\boldsymbol{Q} + \boldsymbol{R})\boldsymbol{a}\end{aligned} \tag{4-14b}$$

$$|\boldsymbol{D}(\mu)| = |\boldsymbol{Q} + \mu(\boldsymbol{R} + \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}) + \mu^2 \boldsymbol{T}| = 0 \tag{4-15b}$$

设 μ 能取实根,则由式(4-14)知,a_k, a_4 可取实值,由于系数 C_{ijkl}, e_{ijk} 各自组成正定矩阵,故式(4-13)的左端大于零,不能等于零,从而产生矛盾,所以 μ 只能取共轭复根。不失一般性,取

$$\mu_k = \alpha_k + \mathrm{i}\beta_k, \ \beta_k > 0; \quad \mu_{k+4} = \bar{\mu}_k, \ k = 1, 2, 3, 4 \tag{4-17}$$

4.2.2 本征值 μ 无重根情形

当式(4-15)不存在重根时,称该矩阵为简单的,对应每个 μ_k 值,由式(4-14)可求得一组 $\boldsymbol{a}_k = [a_{k1}, a_{k2}, a_{k3}, a_{k4}]^{\mathrm{T}}$ 和相应的 $f_k(z_k)$,其中 $z_k = x_1 + \mu_k x_2$。右上角的字母“T”表示转置。引入

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{a}^{\mathrm{T}} = [\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4]^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{f}(z_*) = [f_1(z_1), f_2(z_2), f_3(z_3), f_4(z_4)]^{\mathrm{T}} \tag{4-18}$$

式中 $\boldsymbol{A}$ 为 4×4 的矩阵,且 $A_{ij} = a_{ji}$。利用线性叠加原理,计及 $\boldsymbol{U}$ 是实数,解可写成

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{U} = [u_i, \varphi]^{\mathrm{T}} = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4}\boldsymbol{a}_j f_j(z_j) = 2\mathrm{Re}[\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(z_*)] = 2\mathrm{Re}[\boldsymbol{A}\langle f_j(z_j)\rangle]\\&U_I = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4} a_{jI} f_j(z_j) = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4} A_{Ij} f_j(z_j), \ \langle f_j(z_j)\rangle = \mathrm{diag}[f_j(z_j)]\end{aligned} \tag{4-19a}$$

上式中 $\boldsymbol{a}_j f_j(z_j)$ 是一种矢量表示方式,表示 $\mu = \mu_j$ 时的解,$\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(z_*)$ 有时也写成 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{f}(z_j)$,本书

将同时采用，这是一种矩阵表示方式。当同一英文或希腊字母下标的个数大于2时，求和时将不用重复指标求和规则，而用符号Σ醒目地写出；但当字母下标的个数等于2时，仍将使用重复指标求和规则。对于大多数工程问题，式(4-19)中的 $f_j(z_j)$ 可采用相同的形式，取成 $f_j(z_j)=f(z_j)q_j$，其中 $\boldsymbol{q}$ 为常数矢量(不要和热流矢量混淆)。因而式(4-19a)又可写成

$$\boldsymbol{U}=2\mathrm{Re}[\boldsymbol{A}\langle f(z_*)\rangle\boldsymbol{q}],\quad \langle f(z_*)\rangle=\langle f(z_j)\rangle=\mathrm{diag}[f(z_j)],\ \boldsymbol{q}=[q_j,\ q_4]^{\mathrm{T}} \tag{4-19b}$$

式中 $\langle f(z_*)\rangle$ 和 $\langle f(z_j)\rangle$ 表示同一个意思。把式(4-19a)代入(4-10a)，可得

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}&=2\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{4}(C_{ijk\beta}A_{kp}+e_{\beta ij}A_{4p})F_p(z_p)z_{p,\beta}=\\&2\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{4}[(C_{ijk1}A_{kp}+e_{1ij}A_{4p})+\mu_p(C_{ijk2}A_{kp}+e_{2ij}A_{4p})]F_p(z_p)\\D_i&=2\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{4}(e_{ik\beta}A_{kp}-\epsilon_{i\beta}A_{4p})F_p(z_p)z_{p,\beta}=\\&2\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{4}[(e_{ik1}A_{kp}-\epsilon_{i1}A_{4p})+\mu_p(e_{ik2}A_{kp}-\epsilon_{i2}A_{4p})]F_p(z_p)]\end{aligned} \tag{4-20a}$$

如采用式(4-19b)，上式则改变为

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}&=2\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{4}(C_{ijk\beta}A_{kp}+e_{\beta ij}A_{4p})z_{p,\beta}F(z_p)q_p\\D_i&=2\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{4}(e_{ik\beta}A_{kp}-\epsilon_{i\beta}A_{4p})z_{p,\beta}F(z_p)q_p\end{aligned} \tag{4-20b}$$

式中 $F_p(z_p)=f'_p(z_p)$，是 $f_p(z_p)$ 对 z_p 的导数。令

$$\begin{aligned}b_{pi}&=B_{ip}=(C_{i2k\beta}A_{kp}+e_{\beta i2}A_{4p})z_{p,\beta}=-\mu_p^{-1}(C_{i1k\beta}A_{kp}+e_{\beta i1}A_{4p})z_{p,\beta}\\b_{p4}&=B_{4p}=(-\epsilon_{2\beta}a_{4p}+e_{\beta r2}a_{pr})z_{p,\beta}=-\mu_p^{-1}(-\epsilon_{1\beta}a_{p4}+e_{\beta r1}a_{pr})z_{p,\beta}\end{aligned} \tag{4-21}$$

推求上式时已利用了式(4-13)或(4-14)，则

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{b}_k=(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}+\mu_k\boldsymbol{T})\boldsymbol{a}_k=-\mu_k^{-1}(\boldsymbol{Q}+\mu_k\boldsymbol{R})\boldsymbol{a}_k,\quad \boldsymbol{b}=(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}+\langle\mu_*\rangle\boldsymbol{T})\boldsymbol{a}\\&\boldsymbol{B}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}=[\boldsymbol{b}_1,\ \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{b}_3,\ \boldsymbol{b}_4]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{B}=(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}+\langle\mu_*\rangle\boldsymbol{T})\boldsymbol{A}=-\langle\mu_*{}^{1}\rangle(\boldsymbol{Q}+\langle\mu_*\rangle\boldsymbol{R})\boldsymbol{A}\end{aligned} \tag{4-22}$$

式中 $\langle\mu_*\rangle=\langle\mu_j\rangle=\mathrm{diag}[\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \mu_4]$，为一对角阵，则应力和电位移又可表示为

$$\begin{aligned}&\Sigma_{I1}=-2\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{4}\mu_p b_{pI}F_p(z_p)=-2\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{4}\mu_p B_{Ip}F_p(z_p)\\&\Sigma_{I2}=2\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{4}b_{pI}F_p(z_p)=2\mathrm{Re}\sum_{p=1}^{4}B_{Ip}F_p(z_p)\\&\sigma_{i1}=\Sigma_{i1},\quad \sigma_{i2}=\Sigma_{i2},\ i=1,\ 2,\ 3;\quad D_1=\Sigma_{41},\quad D_2=\Sigma_{42}\end{aligned} \tag{4-23}$$

引入广义应力函数 $\boldsymbol{\Phi}$，使

$$\Sigma_{I1}=-\Phi_{I,2},\quad \Sigma_{I2}=\Phi_{I,1};\quad \boldsymbol{\Sigma}_1=-\boldsymbol{\Phi}_{,2},\quad \boldsymbol{\Sigma}_2=\boldsymbol{\Phi}_{,1} \tag{4-24a}$$

则力学平衡方程和电学 Gauss 方程自动满足。由式(4-22)～(4-24)可推出

$$\boldsymbol{\Phi}=[\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3,\Phi_4]^{\mathrm{T}}=2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4}\boldsymbol{b}_j f_j(z_j)=2\mathrm{Re}[\boldsymbol{Bf}(z_*)]$$

$$\Phi_I=2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4}b_{jI}f_j(z_j)=2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4}B_{Ij}f_j(z_j),\ I=1,2,3,4 \tag{4-25a}$$

或写得更详细些

$$\boldsymbol{\Phi}=\begin{Bmatrix}\Phi_i\\ \Phi_4\end{Bmatrix}=2\mathrm{Re}\left[\begin{bmatrix}(C_{i2k1}+\mu_jC_{i2k2})A_{kj} & (e_{1i2}+\mu_je_{2i2})A_{4j}\\ (e_{2k1}+\mu_je_{2k2})A_{kj} & -(\epsilon_{21}+\mu_j\epsilon_{22})A_{4j}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}f_j(z_j)\\ f_4(z_4)\end{Bmatrix}\right] \tag{4-25b}$$

解出位移 $\boldsymbol{U}$ 和 $\boldsymbol{\Phi}$ 后，σ_{33} 也容易求出，特别是在平面应力问题中，$\sigma_{33}=0$，根据 $\sigma_{12}=\sigma_{21}$，可推出 $\Phi_{1,1}+\Phi_{2,2}=0$。结合式(4-24a)和(4-25a)，应力可以表成

$$\boldsymbol{\Sigma}_1=-\boldsymbol{\Phi}_{,2}=-2\mathrm{Re}[\boldsymbol{B}\langle\mu_*\rangle\boldsymbol{F}(z_*)],\quad \boldsymbol{\Sigma}_2=\boldsymbol{\Phi}_{,1}=2\mathrm{Re}[\boldsymbol{BF}(z_*)] \tag{4-24b}$$

如采用式(4-19b)，则式(4-25a)可改写成

$$\boldsymbol{\Phi}=2\mathrm{Re}[\boldsymbol{B}\langle f(z_*)\rangle\boldsymbol{q}],\quad \Phi_i=2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4}B_{Ij}f(z_j)q_j \tag{4-25c}$$

现在来讨论 $\boldsymbol{\Phi}$ 的物理意义。设 L 为二维平面上物体的边界曲线，沿 L 的切线方向 $\boldsymbol{s}$ 运行时，使所讨论的物体保持在左边，法线方向 $\boldsymbol{n}$ 指向物体边界的外部，如图 1-9 所示的第一种运行方式或选用的第一种边界自然坐标系。此时按式(1-7)或(1-54a)有

$$n_1=\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s},\quad n_2=-\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s},\quad s_1=\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s},\quad s_2=\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s}$$

所以在边界上有

$$t_i=\sigma_{ij}n_j=\sigma_{i1}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s}-\sigma_{i2}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s}=-\Phi_{i,2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s}-\Phi_{i,1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s}=-\frac{\mathrm{d}\Phi_i}{\mathrm{d}s}$$

$$-\sigma=D_in_i=-\Phi_{4,2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s}-\Phi_{4,1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s}=-\frac{\mathrm{d}\Phi_4}{\mathrm{d}s} \tag{4-26a}$$

$$\boldsymbol{t}=-\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}/\mathrm{d}s,\ \boldsymbol{t}=[t_1,t_2,t_3,-\sigma],\ t_4=-\sigma$$

由此推出

$$\boldsymbol{\Phi}\Big|_0^s=-\int_0^s\boldsymbol{t}\mathrm{d}s,\quad \Phi_i\Big|_0^s=-\int_0^s t_i\mathrm{d}s,\quad \Phi_4\Big|_0^s=\int_0^s\sigma\mathrm{d}s \tag{4-27a}$$

上式表示($-\boldsymbol{\Phi}$)代表边界面上的合力。

有些作者采用沿 L 的切线方向 $\boldsymbol{s}$ 运行时，使所讨论的物体保持在右边，法线方向 $\boldsymbol{n}$ 仍指向物体边界的外部，如图 1-10 所示的第二种运行方式或第二种边界自然坐标系。此时有

$$n_1=-\mathrm{d}x_2/\mathrm{d}s,\quad n_2=\mathrm{d}x_1/\mathrm{d}s,\quad s_1=\mathrm{d}x_1/\mathrm{d}s,\quad s_2=\mathrm{d}x_2/\mathrm{d}s$$

所以在边界上有

$$t_i=\mathrm{d}\Phi_i/\mathrm{d}s,\quad -\sigma=\mathrm{d}\Phi_4/\mathrm{d}s,\quad \boldsymbol{t}=\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}/\mathrm{d}s \tag{4-26b}$$

由此推出

$$\boldsymbol{\Phi}_i \Big|_0^s = \int_0^s t \mathrm{d}s, \quad \Phi_i \Big|_0^s = \int_0^s t_i \mathrm{d}s \tag{4-27b}$$

此时 $\boldsymbol{\Phi}$ 代表边界面上的合力，特别是有 $\Phi_4 \Big|_0^s = -\int_0^s \sigma \mathrm{d}s$。多数情况下，本书主要采用第一种运行路线，但由于采用材料的来源不同，有时也采用第二种运行路线。

4.2.3 A 和 B 的正交关系[8]

式(4-22)的第一行可以写成下列形式

$$\begin{bmatrix} -\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{0} \\ -\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{Bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} \boldsymbol{R} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{T} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{Bmatrix} \tag{4-28}$$

两边同时右乘

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{T}^{-1} \\ \boldsymbol{I} & -\boldsymbol{R}\boldsymbol{T}^{-1} \end{bmatrix}$$

则式(4-28)可以写成标准的 8×8 右本征方程

$$\boldsymbol{N}\boldsymbol{\xi} = \mu\boldsymbol{\xi},\ \boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_1 & \boldsymbol{N}_2 \\ \boldsymbol{N}_3 & \boldsymbol{N}_1^{\mathrm{T}} \end{bmatrix},\ \boldsymbol{\xi} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{Bmatrix} \tag{4-29}$$

$$\boldsymbol{N}_1 = -\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{N}_2 = \boldsymbol{T}^{-1}, \quad \boldsymbol{N}_3 = \boldsymbol{R}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} - \boldsymbol{Q}$$

有时称 $\boldsymbol{N}$ 为标准压电矩阵。如求出本征值 μ_k，则可解出相应的本征矢量 $\boldsymbol{a}_k$，$\boldsymbol{b}_k$，这和式(4-22)一致。利用式(4-19a)和(4-25a)，由式(4-29)还可推出

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{U}_{,2} \\ \boldsymbol{\Phi}_{,2} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{N} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{U}_{,1} \\ \boldsymbol{\Phi}_{,1} \end{Bmatrix} \tag{4-30}$$

引入矩阵

$$\boldsymbol{J} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \\ \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{J}^{-1}, \quad \boldsymbol{J}\boldsymbol{N} = (\boldsymbol{J}\boldsymbol{N})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J} \tag{4-31}$$

把标准的右本征方程式(4-29)左乘 $\boldsymbol{J}$，便得

$$\boldsymbol{J}\boldsymbol{N}\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\xi}) = \mu(\boldsymbol{J}\boldsymbol{\xi}), \quad \text{或 } \boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta} = \mu\boldsymbol{\eta},\ \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{J}\boldsymbol{\xi} = [\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{a}]^{\mathrm{T}} \tag{4-32}$$

上式是标准的左本征方程。按 1.2.2 节的讨论，本征矢量正则化后有

$$\boldsymbol{\eta}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_j = \delta_{ij}, \quad \text{或 } \boldsymbol{b}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{a}_j + \boldsymbol{a}_i^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_j = \delta_{ij},\ \mu_i \neq \mu_j \tag{4-33a}$$

利用式(4-18)、(4-22)和(4-29)，详细写出上式便有

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} = \overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{A}} + \overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I}, \quad \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{A}} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{B}} = \overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A} + \overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{0} \tag{4-33b}$$

由上式又可推出

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ \overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}} & \overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \overline{\boldsymbol{A}} \\ \boldsymbol{B} & \overline{\boldsymbol{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \overline{\boldsymbol{A}} \\ \boldsymbol{B} & \overline{\boldsymbol{B}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ \overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}} & \overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \tag{4-34a}$$

写出上式的第二个详细式便是

$$AB^{T}+\bar{A}\bar{B}^{T}=BA^{T}+\bar{B}\bar{A}^{T}=I,\quad AA^{T}+\bar{A}\bar{A}^{T}=BB^{T}+\bar{B}\bar{B}^{T}=0 \tag{4-34b}$$

由上式知,AA^{T}, BB^{T} 是纯虚数。令

$$M=2\mathrm{i}AA^{T},\quad L=-2\mathrm{i}BB^{T},\quad S=\mathrm{i}(2AB^{T}-I) \tag{4-35}$$

则 M, L 是实对称阵,如设能量正定,则可证 M, L 是实正定的,S 也是实阵。直接代入可证

$$LS+S^{T}L=0,\quad MS^{T}+SM=0,\quad ML-SS=I$$
$$SL^{-1}+L^{-1}S^{T}=0,\quad S^{T}M^{-1}+M^{-1}S=0$$

由上式知 SL^{-1}, $M^{-1}S$ 是反对称阵。利用 $AB^{-1}=AB^{T}(BB^{T})^{-1}$, $BA^{-1}=(AB^{T})^{T}(AA^{T})^{-1}$ 以及上面诸式,可得

$$Y=\mathrm{i}AB^{-1}=-\mathrm{i}(S+\mathrm{i}I)L^{-1}=\mathrm{i}L^{-1}(S^{T}-\mathrm{i}I),\quad \bar{Y}^{T}=\mathrm{i}(SL^{-1})^{T}+L^{-1}=-\mathrm{i}SL^{-1}+L^{-1}=Y$$
$$Y^{-1}=-\mathrm{i}BA^{-1}=-\mathrm{i}(S^{T}+\mathrm{i}I)M^{-1}=\mathrm{i}M^{-1}(S-\mathrm{i}I)=M^{-1}+\mathrm{i}M^{-1}S \tag{4-36}$$

显然,上面定义的 $Y=\mathrm{i}AB^{-1}=\bar{Y}^{T}$, $Y^{-1}=\bar{Y}^{-T}$ 是 Hermite 矩阵。

4.2.4 本征值 μ 有重根情形

当式(4-15)存在重根时,对于半简单矩阵,因其具有和根的重数相同的独立的本征矢量,因而此时 U 的通解仍由式(4-19)表示。如对应 p 重根 μ_p 的独立的本征矢量的个数少于 p,则须增加广义本征矢量,使本征矢量之总和等于 p,如 1.4.3 节所述。压电体的 D 矩阵是 $n=4$ 阶的,只可能存在二或三重根的情形,因为如存在四重根,便是各向同性体,而不是压电体了。对于有重根的情形,在增加了新的本征矢量后,独立的本征矢量的个数便是 4,解 U 的形式仍为式(4-19),但式(4-18)要改变,其中的 A, a 将由本征矢量和新本征矢量组成;如 μ_1 是二重根,则 $f(z_*)=[f_1(\mu_1),\ f_2(\mu_1),\ f_3(\mu_3),\ f_4(\mu_4)]^{T}$ 组成;Φ 仍由式(4-25)表示,但要注意此时 $\mu_1=\mu_2$。三重根的情形类似。

为处理问题方便,我们希望所有的本征矢量和广义本征矢量都正交和正则化。由 1.4.3 节知,不同本征值的本征矢量相互正交,因此,只需讨论退化矩阵中对应同一个本征值(重根的情形)的几个本征矢量正交的构造方法。为了较为方便地讨论正交关系,从式(4-29)出发。设 μ_1 是二重根,按 1.4.3 节所述,对右本征矢量 ξ',有

$$N\xi'_1=\mu_1\xi'_1,\quad N\xi'_2=\mu_1\xi'_2+\xi'_1 \tag{4-37}$$

式中 ξ'_2 是新构造的(广义)本征矢量。把式(4-37)的第一式乘以式(4-31)定义的 J,并注意到 $JN=N^{T}J$,便得

$$N^{T}\eta'_2=\mu_1\eta'_2,\quad N^{T}\eta'_1=\mu_1\eta'_1+\eta'_2$$
$$\eta'_2=J\xi'_1,\quad \eta'_1=J\xi'_2 \tag{4-38}$$

式中 η'_1, η'_2 是左本征矢量。上述本征矢量的线性组合仍然是本征矢量,引入新的右、左本征矢量 ξ_1, ξ_2, η_1, η_2,它们仍满足式(4-37) 和(4-38)。按 1.4 节所述,左、右本征矢量应当存在正交关系式(1-39),即 $\eta_i^{T}\xi_j=\delta_{ij}$。用 ξ_1, ξ_2 代换 η_1, η_2 后,正则化的正交条件要求

$$(\xi_1^{T}J)\xi_1=0,\quad (\xi_2^{T}J)\xi_2=0,\quad (\xi_2^{T}J)\xi_1=1,\quad (\xi_1^{T}J)\xi_2=1 \tag{4-39}$$

上式中第三式和第四式显然是相同的，而第一式是自动满足的。事实上，把式(4-37)的第一式乘以 $\boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}}$ 便得 $\boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}\boldsymbol{\xi}_1=\mu_1\boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_1$，或 $(\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}_1)^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_1=\mu_1\boldsymbol{\eta}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_1$，再把式(4-38)的第二式代入便得 $\boldsymbol{\eta}_2^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_1=0$，这正是式(4-39)的第一式。所以只需令

$$\boldsymbol{\xi}_1=\alpha\boldsymbol{\xi}',\quad \boldsymbol{\xi}_2=\alpha\boldsymbol{\xi}'_2+\beta\boldsymbol{\xi}' \tag{4-40}$$

引入两个常数已足够。把式(4-40)代入(4-39)，解出

$$\alpha^2=(\boldsymbol{\xi}_1'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{\xi}'_2)^{-1},\quad \beta=-\frac{1}{2}\alpha^3(\boldsymbol{\xi}_2'^{\mathrm{T}}\boldsymbol{J}\boldsymbol{\xi}'_2) \tag{4-41}$$

这样求得的 $\boldsymbol{\xi}_1$，$\boldsymbol{\xi}_2$ 是相互正交和正则化的。其他的本征值矢量正则化正交的方法，在其他许多文献中多有叙述，不再累赘。三个重根的情形较少遇到。在实际计算中，遇到重根时，往往给它们以极其微小的差别，然后加以数值计算。

4.2.5 (广义)本征矢量的统一讨论[41]

用下述方法可以统一讨论简单、半简单和退化矩阵问题。

定理：设 μ 为 n 阶方阵(压电材料 $n=4$)$\boldsymbol{D}$ 的一个本征值，$\boldsymbol{a}$ 为与之对应的本征矢量，如果秩 $m=n-r<n$，其中 r 为对应于同一个本征值的本征矢量的个数。当 $\mu=\mu_p$ 时有

$$\boldsymbol{D}\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0} \tag{4-42a}$$

$$\mathrm{d}(\boldsymbol{D}\boldsymbol{a})/\mathrm{d}\mu=(\mathrm{d}\boldsymbol{D}/\mathrm{d}\mu)\boldsymbol{a}+\boldsymbol{D}(\mathrm{d}\boldsymbol{a}/\mathrm{d}\mu)=\boldsymbol{0} \tag{4-42b}$$

$$\mathrm{d}^2(\boldsymbol{D}\boldsymbol{a})/\mathrm{d}\mu^2=(\mathrm{d}^2\boldsymbol{D}/\mathrm{d}\mu^2)\boldsymbol{a}+2(\mathrm{d}\boldsymbol{D}/\mathrm{d}\mu)(\mathrm{d}\boldsymbol{a}/\mathrm{d}\mu)+\boldsymbol{D}(\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}/\mathrm{d}\mu^2)=\boldsymbol{0} \tag{4-42c}$$

那么方程(4-42a)有非零解 $\boldsymbol{a}$ 的充要条件是

$$|\boldsymbol{D}|=0 \tag{4-43a}$$

方程(4-42b)有非零解 $\boldsymbol{a}$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}/\mathrm{d}\mu$ 的充要条件是

$$|\boldsymbol{D}|=\mathrm{d}^{n-m}|\boldsymbol{D}|/\mathrm{d}\mu^{n-m}=0 \tag{4-43b}$$

方程(4-42c)有非零解 $\boldsymbol{a}$、$\mathrm{d}\boldsymbol{a}/\mathrm{d}\mu$ 和 $\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}/\mathrm{d}\mu^2$ 的充要条件是

$$|\boldsymbol{D}|=\mathrm{d}^{n-m}|\boldsymbol{D}|/\mathrm{d}\mu^{n-m}=\mathrm{d}^{2(n-m)}|\boldsymbol{D}|/\mathrm{d}\mu^{2(n-m)}=0 \tag{4-43c}$$

(1) μ_1，μ_2，μ_3，μ_4 为单根：行列式为 μ_j 的一次多项式，$\mathrm{d}|\boldsymbol{D}|/\mathrm{d}\mu_j\neq0$。此时 $m=n-1=3$，式(4-43b)不满足，只有式(4-42a)有非零解，存在4个独立的本征矢量 $\boldsymbol{a}_j$，问题的通解由式(4-19)表示。

(2) μ_1 为二重根，μ_3，μ_4 为单根：行列式为 μ_1 的二次多项式，$\mathrm{d}^2|\boldsymbol{D}|/\mathrm{d}\mu_1^2\neq0$。

① 对应 μ_1 有两个独立的本征矢量，$m=n-2=2$。此时式(4-43b)不满足，仍只有式(4-42a)有非零解，$\boldsymbol{U}$ 的通解的形式仍为式(4-19)。

② 对应 μ_1 只有一个独立的本征矢量，$m=n-1=3$。此时式(4-43b)能满足，式(4-42b)中的 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}_1/\mathrm{d}\mu_1$ 都有非零解，此时通解的形式可以写成

$$\begin{gathered}\boldsymbol{U}=2\mathrm{Re}[\boldsymbol{A}'\boldsymbol{f}(z_*)+x_2\boldsymbol{a}_1f_1'(z_1)],\quad \boldsymbol{A}'=[\boldsymbol{a}_1,\ \mathrm{d}\boldsymbol{a}_1/\mathrm{d}\mu_1,\ \boldsymbol{a}_3,\ \boldsymbol{a}_4]\\ \boldsymbol{f}(z_*)=[f_1(z_1),\ f_1(z_1),\ f_3(z_3),\ f_4(z_4)]^{\mathrm{T}}\end{gathered} \tag{4-44}$$

(3) μ_1 为三重根，μ_3 为单根：行列式为 μ_1 的三次多项式，$\mathrm{d}^3|\boldsymbol{D}|/\mathrm{d}\mu_1^3\neq0$。

① 对应 μ_1 有三个独立的本征矢量，$m=n-1=3$。此时仍只有式(4－42a)有非零解，$\boldsymbol{U}$ 的通解的形式仍为式(4－19)。

② 对应 μ_1 有两个独立的本征矢量，$m=n-2=2$。此时式(4－43b)能满足，式(4－42b)中的 $\boldsymbol{a}_1$ 和 $\mathrm{d}\boldsymbol{a}_1/\mathrm{d}\mu_1$ 都有非零解，$\boldsymbol{U}$ 的通解的形式和式(4－44)相同

③ 对应 μ_1 只有一个独立的本征矢量，$m=n-1=3$。此时式(4－43c)能满足，式(4－42c)中的 $\boldsymbol{a}_1$、$\mathrm{d}\boldsymbol{a}_1/\mathrm{d}\mu_1$ 和 $\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}_1/\mathrm{d}\mu_1^2$ 都有非零解，$\boldsymbol{U}$ 的通解的形式为

$$\boldsymbol{U}=2\mathrm{Re}[\boldsymbol{A}''\boldsymbol{f}(z_*)+x_2\boldsymbol{a}_1 f_1'(z_1)+2x_2(\mathrm{d}\boldsymbol{a}_1/\mathrm{d}\mu_1)f_1'(z_1)+x_2^2\boldsymbol{a}_1 f''_1(z_1)]$$
$$\boldsymbol{A}''=[\boldsymbol{a}_1,\ \mathrm{d}\boldsymbol{a}_1/\mathrm{d}\mu_1,\ \boldsymbol{a}_3,\ \mathrm{d}^2\boldsymbol{a}_1/\mathrm{d}\mu_1^2],\quad \boldsymbol{f}(z_*)=[f_1(z_1),\ f_1(z_1),\ f_3(z_3),\ f_1(z_1)]^{\mathrm{T}} \tag{4-45}$$

4.2.6 电位移张量法[42]

采用由内能导出的本构关系，即以应变和电位移为自变量，本构关系取为

$$\sigma_{ij}=c_{ijmn}\varepsilon_{mn}-h_{nij}D_n,\quad E_i=-h_{imn}\varepsilon_{mn}+\beta_{in}D_n \tag{4-46}$$

式中 $\boldsymbol{c}$，$\boldsymbol{h}$，$\boldsymbol{\beta}$ 为材料系数。按电学 Gauss 定律 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D}=0$，Shen 和 Kuang 引入二阶反对称电位移张量 $\boldsymbol{P}$ 和电位移张量的矢量势(函数)$\boldsymbol{\Psi}$，使

$$D_i=\hat{\varepsilon}_{imn}P_{mn},\quad P_{ij}=(\psi_{i,j}-\psi_{j,i})/2,\quad P_{ij}=-P_{ji} \tag{4-47}$$

式中 $\hat{\varepsilon}_{imn}$ 是三指标置换张量，其中任两个下标相同时为零，在直角坐标系中，下标按 1，2，3 顺序轮换时为 1，反序轮换时为 −1；显然上述定义自动满足 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{D}=0$。事实上有

$$D_{i,i}=\sum_{i,m,n}\hat{\varepsilon}_{imn}P_{mn,i}=\frac{1}{2}\sum_{i,m,n}\hat{\varepsilon}_{imn}(\psi_{m,ni}-\psi_{n,mi})=\sum_{i}\hat{\varepsilon}_{imn}(\psi_{m,ni}-\psi_{n,mi})=0$$

式(4－47)不能唯一确定 $\boldsymbol{\Psi}$，可以人为地引入一个规范条件

$$\psi_{i,i}=0 \tag{4-48}$$

引入二阶电场张量 $\boldsymbol{V}$，使

$$E_i=\frac{1}{2}\hat{\varepsilon}_{imn}V_{mn},\ V_{mn}=\hat{\varepsilon}_{imn}E_i=-V_{nm} \tag{4-49}$$

静电场有 $\boldsymbol{E}=-\boldsymbol{\nabla}\varphi$，所以 $E_{i,j}=E_{j,i}$，从而上式可以写成

$$V_{ij,j}=\hat{\varepsilon}_{mij}E_{m,j}=\hat{\varepsilon}_{ijm}E_{m,j}=\hat{\varepsilon}_{imj}\varphi_{,mj}=0 \tag{4-50}$$

利用式(4－47)和(4－49)，本构方程又可写成

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}&=c_{ijmn}\varepsilon_{mn}-h_{tij}\hat{\varepsilon}_{tmn}P_{mn}=c_{ijmn}\varepsilon_{mn}-\bar{h}_{mnij}P_{mn}\\ V_{ij}&=\hat{\varepsilon}_{tij}E_t=\hat{\varepsilon}_{tij}(-h_{tmn}\varepsilon_{mn}+\beta_{tn}\varepsilon_{npq}P_{pq})=-\bar{h}_{ijmn}\varepsilon_{mn}+\bar{\beta}_{ijmn}P_{mn}\end{aligned} \tag{4-51}$$

式中

$$\begin{aligned}\bar{h}_{mnij}&=\bar{h}_{mnji}=-\bar{h}_{nmij}=\hat{\varepsilon}_{tmn}h_{tij}\\ \bar{\beta}_{ijmn}&=\bar{\beta}_{mnij}=-\bar{\beta}_{jimn}=-\bar{\beta}_{ijnm}\hat{\varepsilon}_{tij}\hat{\varepsilon}_{npq}\beta_{tn}\end{aligned} \tag{4-52}$$

利用上述关系可得到

$$\bar{h}_{ijkl}\varepsilon_{kl}=\bar{h}_{ijkl}u_{k,l},\quad \bar{h}_{ijkl}P_{ij}=\bar{h}_{ijkl}\psi_{i,j},\quad \bar{\beta}_{ijkl}P_{kl}=\bar{\beta}_{ijkl}\psi_{k,l} \tag{4-53}$$

利用这些关系,可得到用位移和电位移张量势表示的平衡方程和电场有势方程

$$(c_{ijkl}u_{k,l}-\bar{h}_{klij}\psi_{k,l})_{,j}=0,\quad (\bar{h}_{ijkl}u_{k,l}-\bar{\beta}_{ijkl}\psi_{k,l})_{,j}=0$$

或对常系数有 $U_{ilj,lj}=0,\quad V_{ilj,lj}=0,\quad U_{ilj}=c_{ijkl}u_k-\bar{h}_{klij}\psi_k,\quad V_{ilj}=\bar{h}_{ijkl}u_k-\bar{\beta}_{ijkl}\psi_k$ (4-54)

上述方程非常优美,是求解电弹性问题的又一基本方程,但它在工程中的应用还有待开发。

4.3 等温齐次方程的应力函数解法[9, 43]

4.3.1 一般压电体问题的解

本处采用 Voigt 符号的下述本构方程形式

$$\varepsilon_i=s_{ij}\sigma_j+g_{\alpha i}D_\alpha,\quad E_\alpha=-g_{\alpha j}\sigma_j+\gamma_{\alpha\beta}D_\beta \tag{4-55}$$

式中 $i, j=1, 2\cdots, 6$; $\alpha, \beta=1, 2, 3$。对广义平面应变问题,有 $\partial u_i/\partial x_3=0$ 和

$$\varepsilon_3=u_{3,3}=s_{3j}\sigma_j+g_{\alpha 3}D_\alpha=0,\quad E_3=-\varphi_{,3}=-g_{3j}\sigma_j+\gamma_{3\alpha}D_\alpha=0 \tag{4-56}$$

从式(4-56)解出 σ_3 和 D_3,有

$$\begin{gathered}\sigma_3=F_j\sigma_j+G_\alpha D_\alpha,\quad D_3=H_j\sigma_j+J_\alpha D_\alpha\\ F_j=-(g_{33}g_{3j}+s_{3j}\gamma_{33})M,\quad G_\alpha=(g_{33}\gamma_{3\alpha}-g_{\alpha 3}\gamma_{33})M\\ H_j=(s_{33}g_{3j}-s_{3j}g_{33})M,\ J_\alpha=-(s_{33}\gamma_{3\alpha}+g_{33}g_{\alpha 3})M\\ M=1/(g_{33}^2+s_{33}\gamma_{33}),\quad j, \alpha\neq 3\end{gathered} \tag{4-57}$$

把式(4-57)代入(4-55)便得

$$\begin{gathered}u_{1,1}=\beta_{1j}\sigma_j+\eta_{1\alpha}D_\alpha,\quad u_{2,2}=\beta_{2j}\sigma_j+\eta_{2\alpha}D_\alpha,\quad u_{3,2}=\beta_{4j}\sigma_j+\eta_{4\alpha}D_\alpha\\ u_{3,1}=\beta_{5j}\sigma_j+\eta_{5\alpha}D_\alpha,\quad u_{2,1}+u_{1,2}=\beta_{6j}\sigma_j+\eta_{6\alpha}D_\alpha\\ E_1=-h_{1j}\sigma_j+\xi_{1\alpha}D_\alpha,\quad E_2=-h_{2j}\sigma_j+\xi_{2\alpha}D_\alpha,\quad j, \alpha\neq 3\end{gathered} \tag{4-58}$$

式中 β_{ij}, $\eta_{i\alpha}$, $h_{\alpha j}$, $\xi_{\alpha\beta}$是折算弹性系数,分别为

$$\begin{gathered}\beta_{ij}=s_{ij}+s_{i3}F_j+g_{3i}H_j=\beta_{ji},\ \eta_{i\alpha}=g_{\alpha j}+s_{j3}G_\alpha+g_{3j}J_\alpha\\ h_{\alpha j}=g_{\alpha j}+g_{\alpha 3}F_j-\gamma_{\alpha 3}H_j,\ \xi_{\beta\alpha}=\gamma_{\beta\alpha}-g_{\beta 3}G_\alpha+\gamma_{\beta 3}J_\alpha\end{gathered} \tag{4-59}$$

引入应力函数 Λ, Ψ 和电位移势 V(Лехницкий[6], Huang and Kuang[43])

$$\begin{gathered}\sigma_1=\Lambda_{,22},\quad \sigma_2=\Lambda_{,11},\quad \sigma_6=-\Lambda_{,12}\\ \sigma_4=-\Psi_{,1},\quad \sigma_5=\Psi_{,2},\quad D_1=V_{,2},\quad D_2=-V_{,1}\end{gathered} \tag{4-60}$$

则无体积力的力学平衡方程和无自由电荷的电学 Gauss 方程自动满足。把式(4-60)代入(4-58),最终可以化成用 Λ, Ψ 和 V 表示的广义协调方程

$$L_4\Lambda+L_3\Psi+L_5V=0,\quad L_3\Lambda+L_2\Psi+L_6V=0,\quad L_7\Lambda+L_8\Psi+L_9V=0 \tag{4-61}$$

式中

$$
\begin{aligned}
L_2 &= \beta_{55}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - 2\beta_{45}\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_1} + \beta_{44}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \\
L_3 &= \beta_{15}\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} - (\beta_{14}+\beta_{56})\frac{\partial^3}{\partial x_2^2\partial x_1} + (\beta_{55}+\beta_{46})\frac{\partial^3}{\partial x_2\partial x_1^2} - \beta_{24}\frac{\partial^3}{\partial x_1^3} \\
L_4 &= \beta_{11}\frac{\partial^4}{\partial x_2^4} - 2\beta_{16}\frac{\partial^4}{\partial x_2^3\partial x_1} + (2\beta_{12}+\beta_{66})\frac{\partial^4}{\partial x_2^2\partial x_1^2} - 2\beta_{26}\frac{\partial^4}{\partial x_2\partial x_1^3} + \beta_{22}\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} \\
L_5 &= \eta_{11}\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} - (\eta_{12}+\eta_{61})\frac{\partial^3}{\partial x_2^2\partial x_1} + (\eta_{21}+\eta_{62})\frac{\partial^3}{\partial x_2\partial x_1^2} - \eta_{22}\frac{\partial^3}{\partial x_1^3} \\
L_6 &= \eta_{51}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - (\eta_{52}+\eta_{41})\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_1} + \eta_{42}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \\
L_7 &= -h_{11}\frac{\partial^3}{\partial x_2^3} + (h_{16}+h_{21})\frac{\partial^3}{\partial x_2^2\partial x_1} - (h_{12}+h_{26})\frac{\partial^3}{\partial x_2\partial x_1^2} + h_{22}\frac{\partial^3}{\partial x_1^3} \\
L_8 &= -h_{15}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + (h_{14}+h_{25})\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_1} - h_{24}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} \\
L_9 &= \xi_{11}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - (\xi_{12}+\xi_{21})\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_1} + \xi_{22}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}
\end{aligned}
\tag{4-62}
$$

从上式中消去 Ψ 和 V，得到 Λ 的 8 阶微分方程

$$(L_6L_8L_4 - L_9L_4L_2 + L_9L_3^2 - L_5L_3L_8 + L_2L_5L_7 - L_3L_6L_7)\Lambda = 0 \tag{4-63}$$

其解为

$$\Lambda = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4}\tilde{f}_j(z_j),\quad z_j = x_1 + \mu_j x_2 \tag{4-64}$$

式中 $\tilde{f}_j(z_j)$ 是 z_j 的解析函数，μ_j 是下列方程的根

$$l_6l_8l_4 - l_9l_4l_2 + l_9l_3^2 - l_5l_3l_8 + l_2l_5l_7 - l_3l_6l_7 = 0 \tag{4-65}$$

式中 $l_i(\mu)$ 为用 μ^k 代替式(4-62)中算子 L_i 中的 $\partial^k/\partial x^k$ 得到的，如

$$l_3(\mu) = \beta_{15}\mu^3 - (\beta_{14}+\beta_{56})\mu^2 + (\beta_{55}+\beta_{46})\mu - \beta_{24}$$

式中 μ_j 是复数，可取其实部大于零，和 Stroh 公式所得相同。由式(4-61)可推出

$$\Psi = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4}a_jf_j(z_j),\quad V = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4}b_jf_j(z_j),\quad f_j(z_j) = \tilde{f}'_j(z_j) \tag{4-66}$$

式中

$$a_j = -\frac{l_5d_j + l_4}{l_3} = -\frac{l_6d_j + l_3}{l_2} = -\frac{l_9d_j + l_7}{l_8},\quad b_j = \frac{l_3^2 - l_4l_2}{l_2l_5 - l_3l_6} = \frac{l_8l_4 - l_2l_7}{l_2l_9 - l_8l_6} \tag{4-67}$$

把 Λ，Ψ，V 代入式(4-60)，便可求出广义应力，代入式(4-58)并积分之，便得广义位移，它们具有和 Stroh 公式相同的形式，但 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 已用材料系数明显地表出

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -\mu_1 & -\mu_2 & -\mu_3 & -\mu_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 & -b_4 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A} = [A_{ij}] \tag{4-68}$$

式中

$$
\begin{aligned}
A_{1j} &= \beta_{11}\mu_j^2 + \beta_{12} - \beta_{16}\mu_j + a_j(\beta_{15}\mu_j - \beta_{14}) + (\eta_{11}\mu_j - \eta_{12})b_j \\
A_{2j} &= [\beta_{21}\mu_j^2 + \beta_{22} - \beta_{26}\mu_j + a_j(\beta_{25}\mu_j - \beta_{24}) + (\eta_{21}\mu_j - \eta_{22})b_j]/\mu_j \\
A_{3j} &= [\beta_{41}\mu_j^2 + \beta_{42} - \beta_{46}\mu_j + a_j(\beta_{45}\mu_j - \beta_{44}) + (\eta_{41}\mu_j - \eta_{42})b_j]/\mu_j \\
A_{4j} &= h_{11}\mu_j^2 + h_{12} - h_{16}\mu_j + a_j(h_{15}\mu_j - h_{14}) + (\xi_{11}\mu_j - \xi_{12})b_j
\end{aligned}
\quad (4-69)
$$

显然,两组公式是一致的。虽然推导过程中,Stroh 并未预先假设平面应变或应力,但要解不依赖 x_3,大概只有平面应变或应力了。上面的结果适用于平面应变,对于平面应力只需令

$$
\beta_{ij} = s_{ij} = \beta_{ji}, \quad \eta_{j\alpha} = g_{\alpha j}, \quad h_{\alpha j} = g_{\alpha j}, \quad \xi_{\beta\alpha} = \gamma_{\beta\alpha}, \quad j,\alpha,\beta \neq 3 \quad (4-70)
$$

根据应力函数的性质式(4-60)推知

$$
\begin{aligned}
&\Phi_1 = -\Lambda_{,2} = -2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4} f_j(z_j)\mu_j, \quad \Phi_2 = \Lambda_{,1} = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4} f_j(z_j) \\
&\Phi_3 = -\Psi = -2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4} a_j f_j(z_j), \quad \Phi_4 = -V = -2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4} b_j f_j(z_j)
\end{aligned}
\quad (4-71)
$$

上式中的 $\boldsymbol{\Phi}$ 和式(4-25)有相同的物理意义。

4.3.2 横观各向同性压电体问题的解[9, 44, 45]

对于正交各向异性材料,本构方程可以写成

$$
\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix} =
\begin{bmatrix}
s_{11} & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{31} \\
s_{12} & s_{22} & s_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{32} \\
s_{13} & s_{23} & s_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{33} \\
0 & 0 & 0 & s_{44} & 0 & 0 & 0 & g_{24} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & s_{55} & 0 & g_{15} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & s_{66} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -g_{15} & 0 & \beta_{11} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -g_{24} & 0 & 0 & 0 & \beta_{11} & 0 \\
-g_{31} & -g_{32} & -g_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_{33}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \\ D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix}
\quad (4-72a)
$$

或

$$
\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} \\ D_x \\ D_y \\ D_z \end{Bmatrix} =
\begin{bmatrix}
C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{31} \\
C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{32} \\
C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e_{33} \\
0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 & 0 & -e_{24} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 & -e_{15} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & \epsilon_{11} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & e_{24} & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{22} & 0 \\
e_{31} & e_{32} & e_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{33}
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{yz} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{xy} \\ E_x \\ E_y \\ E_z \end{Bmatrix}
\quad (4-72b)
$$

一般压电体有 45 个独立材料常数:21 个弹性常数,18 个压电常数,6 个介电常数。

由上式知,对于正交各向异性材料,在材料主坐标系中只有 17 个独立材料常数:9 个弹性常数为 C_{11}, C_{12}, C_{13}, C_{22}, C_{23}, C_{33}, C_{44}, C_{55}, C_{66}, 5 个压电常数为 e_{15}, e_{24}, e_{31}, e_{32}, e_{33}, 3 个介电常数为 ϵ_{11}, ϵ_{22}, ϵ_{33}。而工程中广泛应用的横观各向同性压电体,在材料主坐标系中只有 9 个独立材料常数,因为当 x_1x_2 为各向同性平面时存在下述关系

$$s_{13}=s_{23},\quad s_{11}=s_{22},\quad s_{44}=s_{55},\quad s_{66}=2(s_{11}-s_{22}),\quad g_{31}=g_{32},\quad g_{15}=g_{24},\quad \gamma_{11}=\gamma_{22}$$

$$C_{13}=C_{23},\quad C_{11}=C_{22},\quad C_{44}=C_{55},\quad C_{66}=\frac{1}{2}(C_{11}-C_{12}),\quad e_{31}=e_{32},\quad e_{15}=e_{24},\quad \epsilon_{11}=\epsilon_{22} \tag{4-72c}$$

压电陶瓷(如 PZT 等)属横观各向同性材料,通常给出的材料常数是极化方向沿 z 轴的,并设 xy 为各向同性平面,面内的电学量只和面外的力学量相关,而和面内的力学量不耦合,因此,只有讨论各向同性"面外剪切"问题时,力学量和电学量才相关;若要讨论面内的力学量和面内的电学量相互作用,则要讨论各向异性平面 xz 或 yz。为确定起见,现讨论 xz 平面。

对于平面应变问题有

$$\varepsilon_y=\varepsilon_{yz}=\varepsilon_{yx}=E_y=0 \tag{4-73}$$

由上式推知

$$D_y=0,\quad \sigma_{yx}=\sigma_{yz}=0,\quad \sigma_y=-(s_{12}\sigma_x+s_{13}\sigma_z+g_{31}D_z)/s_{11} \tag{4-74}$$

把式(4-73)和(4-74)代入(4-72),并记 x 为 x_1, z 为 x_2, $\varepsilon_x=\varepsilon_1$, $\varepsilon_z=\varepsilon_2$, $2\varepsilon_{xz}=\varepsilon_3$, $E_x=E_1$, $E_z=E_2$ 和应力的相应表达式,则得

$$\begin{Bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\\ E_1\\ E_2\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & b_{21}\\ a_{12} & a_{22} & 0 & 0 & b_{22}\\ 0 & 0 & a_{33} & b_{13} & 0\\ 0 & 0 & -b_{13} & k_{11} & 0\\ -b_{21} & -b_{22} & 0 & 0 & k_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_1\\ \sigma_2\\ \sigma_3\\ D_1\\ D_2\end{Bmatrix} \tag{4-75}$$

式中 a_{ij}, b_{ij}, k_{ij} 是折算广义弹性系数,分别是

$$\begin{gathered}a_{11}=s_{11}-s_{12}^2/s_{11},\quad a_{12}=s_{12}-s_{12}s_{13}/s_{11},\quad a_{22}=s_{22}-s_{13}^2/s_{11}\\ a_{33}=s_{44},\quad b_{21}=(1-s_{12}/s_{11})g_{11},\quad b_{22}=g_{33}-s_{13}/s_{11}\\ b_{13}=g_{15},\quad k_{11}=\beta_{11},\quad k_{22}=\beta_{33}-g_{31}^2/s_{11}\end{gathered} \tag{4-76}$$

式中 $s_{ij}g_{ij}$, γ_{ij} 是极化轴沿 z 轴时测得的材料系数。平衡方程和 Gauss 电学方程为

$$\frac{\partial\sigma_1}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_3}{\partial x_2}=0,\quad \frac{\partial\sigma_3}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_2}{\partial x_2}=0,\quad \frac{\partial D_1}{\partial x_1}+\frac{\partial D_2}{\partial x_2}=0 \tag{4-77}$$

位移协调方程和电场有势方程为

$$\frac{\partial^2\varepsilon_1}{\partial x_2^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_2}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2\varepsilon_3}{\partial x_1\partial x_2}=0,\quad \frac{\partial E_1}{\partial x_2}-\frac{\partial E_2}{\partial x_1}=0 \tag{4-78}$$

引入应力函数 Λ 和电位移势 V(因为 $\sigma_{yx}=\sigma_{yz}=0$,无需引入应力函数 Ψ),使

$$\sigma_1 = \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_2 = \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_3 = -\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad D_1 = \frac{\partial V}{\partial x_2}, \quad D_2 = -\frac{\partial V}{\partial x_1} \qquad (4-79)$$

则式(4－77)自动满足。把上式代入式(4－75),再代入式(4－78)便得

$$L_4 \Lambda - L_3 V = 0,\ L_3 \Lambda + L_2 V = 0$$
$$L_4 = a_{22}\frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + a_{11}\frac{\partial^4}{\partial x_2^4} + (2a_{12} + a_{33})\frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \qquad (4-80)$$
$$L_3 = b_{22}\frac{\partial^3}{\partial x_1^3} + (b_{21} + b_{13})\frac{\partial^3}{\partial x_1 \partial x_2^2}, \quad L_2 = k_{22}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + k_{11}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

从式(4－80)中消去 Λ 或 V,便得

$$(L_4 L_2 + L_3^2)\Lambda = 0, \quad (L_4 L_2 + L_3^2) V = 0 \qquad (4-81)$$

由上式可见,对于横观各向同性压电体平面应变问题,由于 $\sigma_{yz} = \sigma_{yx} = 0$,控制微分方程降低了两阶,从而本征方程是 6 阶,只有 6 个本征值。和一般情况类似,设其解为

$$\Lambda = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3} \tilde{f}_j(z),\ z = x_1 + \mu x_2 \qquad (4-82)$$

式中$\tilde{f}_j(z_j)$是 z_j 的解析函数。把式(4－82)代入(4－81),得到$\partial^6 \Lambda / \partial z^6$ 的齐次方程,所以要 Λ 有解,必须其前的系数为零,这便得到 μ 的 6 阶代数方程,或 μ 是下列特征方程的根

$$a_{11}k_{11}\mu^6 + (a_{11}k_{22} + 2a_{12}k_{11} + a_{33}k_{11} + b_{21}^2 + b_{13}^2 + 2b_{21}b_{13})\mu^4 + (a_{22}k_{11} + 2a_{12}k_{22} + a_{33}k_{22} + 2b_{21}b_{22} + 2b_{22}b_{13})\mu^2 + a_{22}k_{22} + b_{22}^2 = l_4(\mu)l_2(\mu) + l_3^2(\mu) = 0 \qquad (4-83)$$

式中 $l_2(\mu)$, $l_3(\mu)$, $l_4(\mu)$分别为把式(4－80)中的微分算子 L_2, L_3, L_4 中的$\partial^k/\partial x^k$ 换成μ^k 得到的,即

$$l_4 = a_{22} + a_{11}\mu^4 + (2a_{12} + a_{33})\mu^2$$
$$l_3 = b_{22} + (b_{21} + b_{13})\mu^2, \quad l_2 = k_{22} + k_{11}\mu^2$$

式(4－83)是 μ 的 6 阶方程,所以有 6 个根,μ 是复数,且

$$\mu_k = \alpha_k + \mathrm{i}\beta_k, \quad \alpha_1 = 0, \quad \mu_3 = -\bar{\mu}_2, \quad \mu_{k+3} = \bar{\mu}_k \qquad (4-84)$$

由式(4－80)可推出

$$V = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3} \eta_j \tilde{f}'_j(z_j),\ \eta_j = -\frac{l_3}{l_2} = \frac{l_4}{l_3} = -\frac{(b_{21} + b_{13})\mu_j^2 + b_{22}}{k_{11}\mu_j^2 + k_{22}} \qquad (4-85)$$

把 Λ, V 代入式(4－79),便可求出广义应力

$$\sigma_1 = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\mu_j^2 F_j(z_j), \quad \sigma_2 = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3} F_j(z_j), \quad \sigma_3 = -2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\mu_j F_j(z_j)$$
$$D_1 = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\mu_j \eta_j F_j(z_j), \quad D_2 = -2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\eta_j F_j(z_j) \qquad (4-86)$$

式中 $F_j(z_j) = f'_j(z_j) = \tilde{f}''_j(z_j)$,代入式(4－75)得

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3} p_j F_j(z_j),\ p_j = a_{11}\mu_j^2 + a_{12} - b_{21}\eta_j \\
\varepsilon_2 &= 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3} q_j F_j(z_j),\ q_j = (a_{12}\mu_j^2 + a_{22} - b_{22}\eta_j)/\mu_j \\
\varepsilon_3 &= 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3} (-a_{33}\mu_j + b_{13}\mu_j\eta_j)F_j(z_j) \qquad (4-87) \\
E_1 &= 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\lambda_j F_j(z_j),\quad E_2 = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\lambda_j\mu_j F_j(z_j) \\
\lambda_j &= (b_{13} + k_{11}\eta_j)\mu_j,\ \lambda_j\mu_j = -(b_{21}\mu_j^2 + b_{22} + k_{22}\eta_j)
\end{aligned}
$$

现在给出上式最后一式的证明

$$
\lambda_j\mu_j = \left(b_{13} - k_{11}\frac{l_3}{l_2}\right)\mu_j^2 = b_{13}\mu_j^2 - l_3 + k_{22}\frac{l_3}{l_8} = -b_{22} - b_{21}\mu_j^2 - k_{22}\eta_j
$$

由式(4-87)可求出位移

$$
u_1 = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3} p_j f_j(z_j) - \omega x_2,\quad u_2 = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3} q_j f_j(z_j) + \omega x_1,\quad \varphi = -2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\lambda_j f_j(z_j) \qquad (4-88)
$$

按式(4-69)可推出 Stroh 公式中的应力函数为

$$
\Phi_1 = -2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\mu_j f_j(z_j),\quad \Phi_2 = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3} f_j(z_j),\quad \Phi_3 = -2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\eta_j f_j(z_j) \qquad (4-89)
$$

故 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 可用材料系数明显表出为

$$
\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} -\mu_1 & -\mu_2 & -\mu_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -\eta_1 & -\eta_2 & -\eta_3 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \\ -\lambda_1 & -\lambda_2 & -\lambda_3 \end{bmatrix} \qquad (4-90)
$$

4.4 横观各向同性压电体中有一椭圆孔的解[9, 44~47]

4.4.1 开路(电学渗透)椭圆孔问题的提法

设无限体内有一长短半轴分别为 a, b 的椭圆孔,孔内充满空气,孔边无外力作用(图 4-1)。记椭圆孔的内部区域为 Ω^c,其中空气中的物理量在其上方标以上标 c,如 φ^c, $\boldsymbol{E}^c$, $\boldsymbol{D}^c$ 等,孔外的电介质区域记为 Ω,两者的边界记为 Γ, Γ 的外法线记为 $\boldsymbol{n}$,指向孔内。只计空气中电场的作用,不计压力,空气为各向同性介质,它的介电系数记为ϵ^c。设在无穷远处电介质须服从的边界条件是

$$
\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^\infty,\quad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}^\infty \qquad (4-91)
$$

开路或电渗透夹杂问题最早由 Parton[48] 研究,在界面 Γ 上的连接条件是

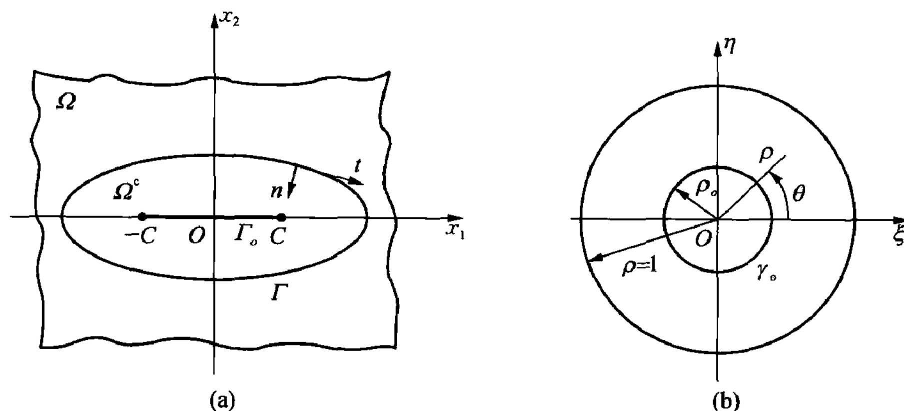


图 4-1 含椭圆孔的无限压电体

(a) 物理平面；(b) 变换平面

$$T_1 = T_2 = 0,\quad D_n = D_n^c = -\epsilon^c \partial\varphi^c / \partial n,\quad \varphi = \varphi^c (\text{在 } \Gamma \text{ 上}) \tag{4-92}$$

压电体中缺陷问题的解可以从各向异性弹性体中缺陷问题的解直接推广得到，从数学上讲，不存在困难。弹性体中缺陷问题的研究可参阅 Mura[49] 的书。

下面分别求解空气和电介质中的电弹性场。

4.4.2 椭圆孔的内部(空气)电场的通解

设空气中没有自由电荷。根据 $\nabla \cdot \boldsymbol{D}^c = 0$，$\boldsymbol{D}^c = \epsilon^c \boldsymbol{E}^c$ 和 $\boldsymbol{E}^c = -\nabla \varphi^c$ 推出

$$\nabla^2 \varphi^c = 0\ (\text{在 } \Omega^c \text{ 内}) \tag{4-93}$$

采用保角变换方法求解。首先讨论保角变换函数

$$z = \omega(\varsigma) = \frac{a+b}{2}\varsigma + \frac{a-b}{2}\frac{1}{\varsigma},\quad \varsigma = \frac{z + \sqrt{z^2 - (a^2 - b^2)}}{a+b} \tag{4-94}$$

把 z 平面上的椭圆边界 Γ 变换为变换平面ς上的单位圆周 γ，γ 内任一点记为 $\varsigma = \rho e^{i\psi}$，同时把 z 平面上由 $-c$ 到 c 的一段实轴 Γ_0(分支线段)变换到ς平面上半径为 $\rho_0 = \sqrt{(a-b)/(a+b)} < 1$ 的圆周 γ_0，$c = \sqrt{a^2 - b^2}$ 是半焦距。所以变换函数把 z 平面上 Γ 的内部变换到ς平面上的环形域 $\rho_0 \leqslant \rho \leqslant 1$，$0 \leqslant \theta < 2\pi$(参阅 1.5.4 小节)。由此可看到，区域内部问题的保角变换比区域外部的要复杂。

因为 φ^c 是调和函数，故可用解析函数 $\phi(z)$表示为

$$\begin{aligned} &\varphi^c(x_1,\ x_2) = \phi(z) + \overline{\phi(z)}(\text{在 } z \text{ 平面上}) \\ &\varphi^c(\rho,\ \psi) = \phi(\varsigma) + \overline{\phi(\varsigma)}(\text{在}\varsigma\text{平面上}) \end{aligned} \tag{4-95}$$

式中 $\phi(\varsigma) = \phi[\omega(\varsigma)]$。由于 $\phi(z)$在 Γ 内处处解析，所以在 Γ_0 上连续，即存在关系

$$\phi(\rho_0 e^{i\psi}) = \phi(\rho_0 e^{-i\psi}) \tag{4-96}$$

顾及上式，在环形域把 $\phi(\varsigma)$展成 Laurent(劳伦)级数时便有

$$\phi(\varsigma)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}d_k\varsigma^k,\quad d_k=\rho_0^{2k}d_k(\text{对 }k\text{ 不求和}),\ \rho_0\leqslant|\varsigma|\leqslant 1 \tag{4-97}$$

4.4.3 椭圆孔的外部(压电介质)场的通解

4.3.2 节指出，横观各向同性压电体的广义位移解由三个任意函数 $f_j(z_j)$ 和他的共轭函数组成。z 平面上椭圆孔的边界点($a\cos\psi+ib\sin\psi$)和 z_j 平面上对应的孔的边界点变换到ς平面上的单位圆周 γ 的变换函数(这一变换对于 z 平面是保角的，而对于 z_j 平面是非保角的，即 z_j 平面上两直线间的夹角和与其变换后的ς_j 平面上相对应的两条直线间的夹角是不同的)为

$$\begin{aligned}z_j&=\omega_j(\varsigma_j)=\frac{1}{2}[(a-i\mu_jb)\varsigma_j+(a+i\mu_jb)\varsigma_j^{-1}]\\ \varsigma_j&=\frac{z_j+\sqrt{z_j^2-(a^2+\mu_j^2b^2)}}{a-i\mu_jb},\quad \frac{1}{\varsigma_j}=\frac{z_j-\sqrt{z_j^2-(a^2+\mu_j^2b^2)}}{a+i\mu_jb}\end{aligned} \tag{4-98}$$

当ς_j 在单位圆周 $\gamma=e^{i\psi}$ 时，z_j 便位于各自 z_j 平面上的孔的边界上。上述变换函数把 z 平面上椭圆孔的外部和所有 z_j 平面上对应的边界外部变换到ς平面上的单位圆周 γ 的外部。因此，在ς平面上，任一在无穷远处解析的函数 $f_j(z_j)$ 可写成

$$f_j(z_j)=C_jz_j+f_j^0(\varsigma_j),\ f_j^0(\varsigma_j)=f_j^0[\omega(\varsigma_j)]=a_{j0}+\sum_{k=1}^{\infty}a_{jk}\varsigma_j^{-k}\ (\text{对 }j\text{ 不求和}) \tag{4-99}$$

式中 $f_j^0(z_j)$是 z 平面上无限域上的解析函数，$f_j^0(\varsigma_j)$是ς平面上无限域上的解析函数，C_j 由无穷远处的边界条件确定，a_{jk}是待定系数，不要和前面的材料系数混淆。由式(4-86)和(4-99)知

$$\begin{aligned}&\sigma_1^\infty=2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\mu_j^2C_j,\quad \sigma_2^\infty=2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}C_j,\quad \sigma_3^\infty=-2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\mu_jC_j\\ &D_1^\infty=2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\mu_j\eta_jC_j,\quad D_2^\infty=-2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\eta_jC_j\\ &E_1=2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\lambda_jC_j,\quad E_2=2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\lambda_j\mu_jC_j\end{aligned} \tag{4-100}$$

上式共有 5 个方程，但需要确定的常数 C_j 却有 6 个，但可任取 $\mathrm{Im}C_1=0$ 而不影响应力和电位移。

4.4.4 椭圆孔边界 Γ 上的力学连接条件

因为在椭圆孔的界面上没有外力，所以按式(4-27)和(4-89)，存在下列边界条件

$$\begin{aligned}&\Phi_1=-2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\mu_jf_j(\sigma)=-\int_0^lT_1^*\,ds=0,\quad \Phi_2=2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}f_j(\sigma)=-\int_0^lT_2^*\,ds=0\\ &\Phi_4=-2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\eta_jf_j(z_j)=-\int_0^lD_n\,ds\end{aligned} \tag{4-101}$$

式中 σ 为ς平面上单位圆周 γ 上的ς值。上式中的第一和第二式化为

$$\sum_{j=1}^{3}\left[f_j^0(z_j)+\overline{f_j^0(z_j)}\right]=\bar{l}_1\sigma+l_1\bar{\sigma}$$
$$\sum_{j=1}^{3}\left\{\mu_j f_j^0(z_j)+\bar{\mu}_j\left[\overline{f_j^0(z_j)}\right]\right\}=\bar{l}_2\sigma+l_2\bar{\sigma}$$
$$l_1=\sum_{j=1}^{3}\left[a\mathrm{Re}C_j+\mathrm{i}\,b\mathrm{Re}(C_j\mu_j)\right]=-\frac{1}{2}(a\sigma_2^\infty-\mathrm{i}b\sigma_3^\infty)$$
$$l_2=-\sum_{j=1}^{3}\left[a\mathrm{Re}(C_j\mu_j)+\mathrm{i}b\mathrm{Re}(C_j\mu_j^2)\right]=\frac{1}{2}(a\sigma_3^\infty-\mathrm{i}b\sigma_1^\infty)\tag{4-102}$$

4.4.5 椭圆孔边界 Γ 上的电学连接条件

设 $\boldsymbol{n}$ 为 Γ 上的外向法线，即指向椭圆孔内部，切线 $\boldsymbol{t}$ 的走向使电介质保持在左边，则有

$$\boldsymbol{n}=n_1+\mathrm{i}n_2=\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s}-\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s}=\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}=-\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}z}{|\mathrm{d}z|}=\frac{\omega'(\varsigma)}{|\omega'(\varsigma)|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$$
$$\boldsymbol{t}=t_1+\mathrm{i}t_2=\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s}+\mathrm{i}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}=\frac{\mathrm{d}z}{|\mathrm{d}z|}=\mathrm{i}\frac{\omega'(\varsigma)}{|\omega'(\varsigma)|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}\tag{4-103}$$
$$\mathrm{d}l=|\mathrm{d}z|=|\omega'(\varsigma)||d\varsigma|=|\omega'(\varsigma)|\rho\mathrm{d}\theta$$

利用式(4-95)可得

$$\frac{\partial\varphi^c}{\partial n}=\frac{\partial\varphi^c}{\partial x_1}n_1+\frac{\partial\varphi^c}{\partial x_2}n_2=\left(\frac{\partial\varphi^c}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}+\frac{\partial\varphi^c}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\bar{z}}{\partial x_1}\right)n_1+\left(\frac{\partial\varphi^c}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_2}+\frac{\partial\varphi^c}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\bar{z}}{\partial x_2}\right)n_2=$$
$$\left(\frac{\partial\varphi^c}{\partial z}n+\frac{\partial\varphi^c}{\partial\bar{z}}\bar{n}\right)=\phi'(z)n+\overline{\phi'(z)}\bar{n}\tag{4-104}$$

从而在 Γ 上有

$$-\epsilon^c\int_0^l\frac{\partial\varphi^c}{\partial n}\mathrm{d}l=-\epsilon^c\int_0^\psi\left[\frac{\phi'(\varsigma)}{\omega'(\varsigma)}\frac{\omega'(\varsigma)}{|\omega'(\varsigma)|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}+\frac{\overline{\phi'(\varsigma)}}{\overline{\omega'(\varsigma)}}\frac{\overline{\omega'(\varsigma)}}{|\omega'(\varsigma)|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi}\right]|\omega'(\varsigma)|\mathrm{d}\psi=$$
$$-\epsilon^c\int_0^\psi\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}\phi'(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi})+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi}\overline{\phi'(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi})}\right]\mathrm{d}\psi=\mathrm{i}\epsilon^c\left[\phi(\sigma)-\overline{\phi(\sigma)}\right]\tag{4-105}$$

推导上式时已令无关紧要的常数 $\phi(1)=0$。

把式(4-97)、(4-99)、(4-101)中的第三式代入式(4-92)中的第三和第四式，便得

$$\sum_{j=1}^{3}\left[\eta_j f_j^0(\sigma)+\bar{\eta}_j\overline{f_j^0(\sigma)}\right]=\overline{l'}_3\sigma+l'_3\bar{\sigma}+\mathrm{i}\epsilon^c\left[\phi(\sigma)-\overline{\phi(\sigma)}\right]$$
$$\sum_{j=1}^{3}\left[\lambda_j f_j^0(\sigma)+\bar{\lambda}_j\overline{f_j^0(\sigma)}\right]=\bar{l}_4\sigma+l_4\bar{\sigma}-\left[\phi(\sigma)+\overline{\phi(\sigma)}\right]$$
$$l'_3=-\sum_{j=1}^{3}\left[a\mathrm{Re}(C_j\eta_j)+\mathrm{i}b\mathrm{Re}(C_j\eta_j\mu_j)\right]=\frac{1}{2}(aD_2^\infty-\mathrm{i}bD_1^\infty)$$
$$l_4=-\sum_{j=1}^{3}\left[a\mathrm{Re}(C_j\lambda_j)+\mathrm{i}b\mathrm{Re}(C_j\lambda_j\mu_j)\right]=-\frac{1}{2}(aE_1^\infty+\mathrm{i}bE_2^\infty)\tag{4-106}$$

4.4.6 确定解中待定系数的方程

式(4-102)是椭圆孔边界 Γ 上的力学连接(边界)条件,式(4-106)是椭圆孔边界 Γ 上的电学连接条件。把含有待定系数的解式(4-97)和(4-99)(略去常数项)代入这些条件可得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{3}(a_{jk}\bar{\sigma}^{k}+\bar{a}_{jk}\sigma^{k})=(\bar{l}_1\sigma+l_1\bar{\sigma})\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{3}(\mu_j a_{jk}\bar{\sigma}^{k}+\bar{\mu}_j\bar{a}_{jk}\sigma^{k})=(\bar{l}_2\sigma+l_2\bar{\sigma})\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{3}(\eta_j a_{jk}\bar{\sigma}^{k}+\bar{\eta}_j\bar{a}_{jk}\sigma^{k})=(\bar{l}'_3\sigma+l'_3\bar{\sigma})+\mathrm{i}\epsilon^{c}(d_k\sigma^{k}+\rho_0^{2k}d_k\bar{\sigma}^{k}-\bar{d}_k\bar{\sigma}^{k}-\rho_0^{2k}\bar{d}_k\sigma^{k})\\
&\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{3}(\lambda_j a_{jk}\bar{\sigma}^{k}+\bar{\lambda}_j\bar{a}_{jk}\sigma^{k})=(\bar{l}_4\sigma+l_4\bar{\sigma})+(d_k\sigma^{k}+\rho_0^{2k}d_k\bar{\sigma}^{k}+\bar{d}_k\bar{\sigma}^{k}+\rho_0^{2k}\bar{d}_k\sigma^{k})
\end{aligned}
\tag{4-107}
$$

由上式知,当 $k\neq1$ 时有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{3}a_{jk}=0,\quad \sum_{j=1}^{3}\mu_j a_{jk}=0\\
&\sum_{j=1}^{3}\eta_j a_{jk}+\mathrm{i}\epsilon^{c}(\bar{d}_k-\rho_0^{2k}d_k)=0,\quad \sum_{j=1}^{3}\lambda_j a_{jk}+\bar{d}+\rho_0^{2k}d_k=0
\end{aligned}
\tag{4-108}
$$

上式对任何 k 都是 8 个待定系数的 8 个齐次方程,一般来讲,其系数行列式不为 0,所以只有零解。当 $k=1$ 时有

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{3}a_{j1}=l_1,\quad \sum_{j=1}^{3}\mu_j a_{j1}=l_2\\
&\sum_{j=1}^{3}\eta_j a_{j1}+\mathrm{i}\epsilon^{c}(\bar{d}_1-\rho_0^{2}d_1)=l'_3,\quad \sum_{j=1}^{3}\lambda_j a_{j1}+\bar{d}_1+\rho_0^{2}d_1=l_4
\end{aligned}
\tag{4-109}
$$

结果表明,式(4-97)中只有 $d_1(d_{-1}=\rho_0^2 d_1)$ 不为零,式(4-99)中只有 a_{11}, a_{21}, a_{31} 不为零。上述式(4-109)共有 8 个方程,正好解出 8 个未知数。

4.4.7 待定系数的确定

因为只有 d_1, $d_{-1}=\rho_0^2 d_1$ 不为零,由式(4-95)和(4-97)可得闭合解

$$
\varphi^{c}=d_1\left(\varsigma+\frac{\rho_0^2}{\varsigma}\right)+\bar{d}_1\left(\bar{\varsigma}+\frac{\rho_0^2}{\bar{\varsigma}}\right)+d_0+\bar{d}_0 \tag{4-110}
$$

应用式(4-94)和 $\rho_0^2=(a-b)/(a+b)$,由上式可得

$$
\varphi^{c}=\frac{2}{a+b}(d_1 z+\bar{d}_1\bar{z})+d_0+\bar{d}_0 \tag{4-111}
$$

由上式知,孔内的电场为

$$
\begin{aligned}
&E_1^{c}=-\frac{2(d_1+\bar{d}_1)}{a+b},\quad E_2^{c}=-\frac{2\mathrm{i}(d_1-\bar{d}_1)}{a+b}\\
&D_1^{c}=\epsilon^{c}E_1^{c},\quad D_2^{c}=\epsilon^{c}E_2^{c}
\end{aligned}
\tag{4-112}
$$

上式表明孔内空气中的电场是均匀的。由上式可推出

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{i}\epsilon^{c}\bar{d}_1 - \mathrm{i}\epsilon^{c}\rho_0^2 d_1 = \frac{1}{2}(aD_2^{c} - \mathrm{i}bD_1^{c}) \\
&\bar{d}_1 + \rho_0^2 d_1 = -\frac{1}{2}(aE_1^{c} + \mathrm{i}bE_2^{c}) = -\frac{1}{2\epsilon^{c}}(aD_1^{c} + \mathrm{i}bD_2^{c})
\end{aligned}
\tag{4-113}
$$

把上式中的第一式代入(4-109)中的第三式,可得

$$
\sum_{j=1}^{3}\eta_j a_{j1} = l_3, \quad l_3 = \frac{1}{2}[a(D_2^{\infty} - D_2^{c}) - \mathrm{i}b(D_1^{\infty} - D_1^{c})]
\tag{4-114}
$$

由上式和(4-109)中的第一和第二式可解得

$$
\begin{aligned}
&a_{j1} = \sum_{k=1}^{3}\alpha_{jk} l_k \\
&\boldsymbol{\alpha} = \frac{1}{N}\begin{bmatrix} \mu_2\eta_3 - \mu_3\eta_2 & \eta_2 - \eta_3 & \mu_3 - \mu_2 \\ \mu_3\eta_1 - \mu_1\eta_3 & \eta_3 - \eta_1 & \mu_1 - \mu_3 \\ \mu_1\eta_2 - \mu_2\eta_1 & \eta_1 - \eta_2 & \mu_2 - \mu_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{bmatrix}^{-1} \\
&N = (\eta_2 - \eta_3)\mu_1 + (\eta_3 - \eta_1)\mu_2 + (\eta_1 - \eta_2)\mu_3
\end{aligned}
\tag{4-115}
$$

把式(4-113)、(4-115)、(4-106)代入(4-109)中的第四式,并把 l_3 单独写出,便得

$$
\begin{aligned}
&2\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{2}\lambda_j\alpha_{jk}l_k + \sum_{j=1}^{3}\lambda_j\alpha_{j3}[a(D_2^{\infty} - D_2^{c}) - \mathrm{i}b(D_1^{\infty} - D_1^{c})] - \\
&\quad \frac{1}{\epsilon^{c}}(aD_1^{c} + \mathrm{i}bD_2^{c}) + (aE_1^{\infty} + \mathrm{i}bE_2^{\infty}) = 0
\end{aligned}
$$

或

$$
\begin{aligned}
&\left(a - \mathrm{i}b\epsilon^{c}\sum_{j=1}^{3}\lambda_j\alpha_{j3}\right)D_1^{c} + \left(a\epsilon^{c}\sum_{j=1}^{3}\lambda_j\alpha_{j3} + \mathrm{i}b\right)D_2^{c} = \\
&\quad \epsilon^{c}\left(2\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{2}\lambda_j\alpha_{jk}l_k + 2\sum_{j=1}^{3}\lambda_j\alpha_{j3}l_3' + aE_1^{\infty} + \mathrm{i}bE_2^{\infty}\right)
\end{aligned}
\tag{4-116}
$$

由上式可确定 D_1^{c}, D_2^{c}。至此,全部待定系数均已求出。

4.4.8 问题的解

1) 孔内空气中的电场解

由式(4-110)表示,其中的常数 $d_0+\bar{d}_0$ 无关紧要。

2) 孔外介质中的解

由式(4-98)和(4-99)可得介质中的 $f_j(z_j)$ 为

$$
\begin{aligned}
f_j(z_j) &= C_j z_j + a_{j1}/\varsigma_j = C_j z_j + \sum_{k=1}^{3}\alpha_{jk}l_k/\varsigma_j = \\
&\quad C_j z_j + (\alpha_{j1}l_1 + \alpha_{j2}l_2 + \alpha_{j3}l_3)\frac{z_j - \sqrt{z_j^2 - (a^2 + \mu_j^2 b^2)}}{a + \mathrm{i}\mu_j b}
\end{aligned}
\tag{4-117}
$$

它的导数为

$$F_j(z_j)=C_j+(\alpha_{j1}l_1+\alpha_{j2}l_2+\alpha_{j3}l_3)\frac{1}{a+\mathrm{i}\mu_j b}\left[1-\frac{z_j}{\sqrt{z_j^2-(a^2+\mu_j^2 b^2)}}\right] \quad (4-118)$$

4.4.9 绝缘椭圆孔的解

由于压电材料具有很强的电弹性耦合，压电常数很大，为简单计，也常把空气近似看成绝缘体，即令 $\epsilon^c=0$，则孔内空气中的电位移 $D_1^c=D_2^c=0$，从而式(4-92)中孔边界上的电学连接条件改为 $D_n=0$。代表孔边界上的电学连接条件的式(4-106)改为

$$\sum_{j=1}^{3}[\eta_j f_j^0(\sigma)+\bar{\eta}_j\overline{f_j^0(\sigma)}]=\bar{l}'_3\sigma+l'_3\bar{\sigma}$$
$$l'_3=-\sum_{j-1}^{3}[a\mathrm{Re}(C_j\eta_j)+\mathrm{i}b\mathrm{Re}(C_j\eta_j\mu_j)]=\frac{1}{2}(aD_2^\infty-\mathrm{i}bD_1^\infty) \quad (4-119)$$

相应地，式(4-109)只有前3个方程，且不含 d_1，即

$$\sum_{j=1}^{3}a_{j1}=l_1,\quad \sum_{j=1}^{3}\mu_j a_{j1}=l_2,\quad \sum_{j=1}^{3}\eta_j a_{j1}=l'_3 \quad (4-120)$$

压电介质中的解仍为式(4-117)、(4-115)和(4-118)，只需令解中的 $\epsilon^c=0$。

4.4.10 传导椭圆孔的解

设空气内充满导电液体，或在孔的边界上沉积无刚性的一薄层金属，空洞边界上的电势可设为零，从而式(4-92)中孔边界上的电学连接条件改为 $\varphi=0$，即式(4-97)中的所有 $d_k=0$。代表孔边界上的电学连接条件的式(4-106)改为

$$\sum_{j=1}^{3}[\lambda_j f_j^0(\sigma)+\bar{\lambda}_j\overline{f_j^0(\sigma)}]=\bar{l}_4\sigma+l_4\bar{\sigma}$$
$$l_4=-\sum_{j-1}^{3}[a\mathrm{Re}(C_j\lambda_j)+\mathrm{i}b\mathrm{Re}(C_j\lambda_j\mu_j)]=-\frac{1}{2}(aE_1^\infty+\mathrm{i}bE_2^\infty) \quad (4-121)$$

上式也可从式(4-106)中使 $1/\epsilon^c=0$ 得到。相应地，式(4-109)化为

$$\sum_{j=1}^{3}a_{j1}=l_1,\quad \sum_{j=1}^{3}\mu_j a_{j1}=l_2,\quad \sum_{j=1}^{3}\lambda_j a_{j1}=l_4 \quad (4-122)$$

式(4-115)改为

$$a_{j1}=\sum_{k-1}^{3}\tilde{\alpha}_{jk}l_k$$
$$\tilde{\boldsymbol{\alpha}}=\frac{1}{\tilde{N}}\begin{bmatrix}\mu_2\lambda_3-\mu_3\lambda_2 & \lambda_2-\lambda_3 & \mu_3-\mu_2\\ \mu_3\lambda_1-\mu_1\lambda_3 & \lambda_3-\lambda_1 & \mu_1-\mu_3\\ \mu_1\lambda_2-\mu_2\lambda_1 & \lambda_1-\lambda_2 & \mu_2-\mu_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\end{bmatrix}^{-1} \quad (4-123)$$
$$N=(\lambda_2-\lambda_3)\mu_1+(\lambda_3-\lambda_1)\mu_2+(\lambda_1-\lambda_2)\mu_3$$

压电介质中的解仍为式(4-117)、(4-123)和(4-118)。开路、绝缘和传导边界条件最好是分开研究，由电渗透条件极限过渡到其他边界条件的方法容易引起混淆。

4.4.11 细长椭圆孔(钝裂纹)端部的渐近电弹性场[50]

类似弹性钝裂纹[9],Huang 和 Kuang[50]研究了压电体中钝裂纹端部的渐近电弹性场。为简化符号,本小节取 x_1 为 x, x_2 为 y。取整体坐标系 $z_g(x_g,\ y_g)$,z_j 平面上原点取在 z_{0k} 的局部坐标系 $z_k(x_k,\ y_k)$(图 4-2a),按 1.5.4 节中的式(1-57),z_{0k}是 z_k 平面上和变换平面上 $\omega'(\varsigma_i)=0$ 的分支点ς_i 的对应点。有

$$
\begin{aligned}
&z_{0k}=x_{0k}+\mu_k y_{0k}=\sqrt{a^2+\mu_k^2 b^2}\approx a+\mu_k^2 r_0,\ r_0=b^2/2a\\
&x_{0k}=a^2-\mu^2 r_0,\ y_{0k}=2\alpha_k r_0,\ \mu_k=\alpha_k+\mathrm{i}\beta_k,\ \mu^2=\alpha_k^2+\beta_k^2
\end{aligned}
\tag{4-124}
$$

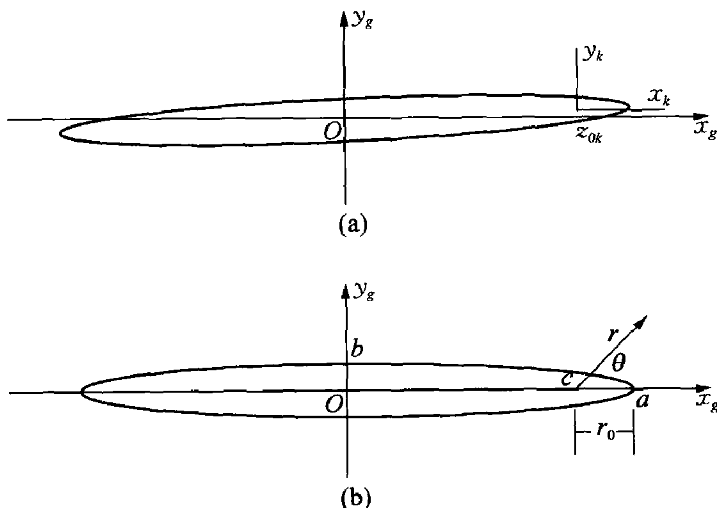


图 4-2 局部坐标系

(a) z_j 平面上原点位分支点 z_{0j}的局部坐标系;(b) 物理平面 z 上原点位于细长椭圆体焦点处的局部坐标系

式中 $2r_0$ 是细长椭圆端部的曲率半径。在局部坐标系中有

$$
z_k=x_k+\mu_k y_k=z_{gk}-z_{0k}=(x_g-x_{0k})+\mu_k(y_g-y_{0k})
$$

在物理 z 平面上,局部坐标系 $z(r,\ \theta)$的原点取在细长椭圆的焦点 $x_1=c$ 处,或离钝裂纹端部 $r_0/2=a-c$ 处[9](图 4-2b)。按解析几何有

$$
x_g=c+r\cos\theta,\quad y_g=r\sin\theta,\quad a=r_0+\sqrt{c^2+r_0^2}\approx c+r_0
$$

由上列诸式推出

$$
\begin{aligned}
&z_k=r\Theta_k-(1+\mu_k^2)r_0+0(r_0^2/c)\approx r\Theta_k\{1-[(1+\mu_k^2)r_0/\Theta_k r]\}\\
&\Theta_k=\cos\theta+\mu_k\sin\theta
\end{aligned}
\tag{4-125}
$$

从而在局部坐标系中,式(4-118)化为

$$
F_j(z_j)=-\sum_{k=1}^{3}\alpha_{jk}l_k\frac{1}{a+\mathrm{i}\mu_j b}\sqrt{\frac{c}{2r\Theta_j}}\left(1-\frac{1+\mu_j^2}{\Theta_j}\frac{r_0}{r}\right)^{-1/2}+C_j+\frac{1}{a+\mathrm{i}\mu_j b}\sum_{k=1}^{3}\alpha_{jk}l_k
\tag{4-126}
$$

由上式可见,端部应力不仅具有 $1/\sqrt{r}$ 的奇异性,还与 r_0/r 相关,同时无穷远处的电载荷因 l_3 而影响到端部应力场。只有当 $b/a\to 0$,且孔中$\epsilon^c=0$ 时,不计常数项后,无穷远处的电载荷才

不影响到端部应力场。

4.5 横观各向同性压电体中有一裂纹的解

4.5.1 介电裂纹

对介电裂纹，$\epsilon^c \to 0$，但不为零；令椭圆孔的短半轴长度 $b \to 0$ 便得裂纹，略去含 b 的项。此时有

$$l_1 = -\frac{1}{2}a\sigma_2^\infty,\quad l_2 = \frac{1}{2}a\sigma_3^\infty,\quad l_3' = \frac{1}{2}aD_2^\infty,\quad l_3 = \frac{1}{2}a(D_2^\infty - D_2^c),\quad l_4 = -\frac{1}{2}aE_1^\infty \tag{4-127}$$

1) 空气中的电场

式(4-116)化为

$$D_1^c + \epsilon^c \sum_{j=1}^{3}\lambda_j\alpha_{j3}D_2^c = \epsilon^c\left\{\sum_{j=1}^{3}[-\lambda_j(a_{j1}\sigma_2^\infty + a_{j2}\sigma_3^\infty + a_{j3}D_2^\infty)] + E_1^\infty\right\} \tag{4-128a}$$

分开实部与虚部，便得

$$\begin{aligned} D_2^\infty - D_2^c &= \mathrm{Im}\Big(\sum_{j=1}^{3}\lambda_j\alpha_{j1}\Big)\sigma_2^\infty \Big/ \mathrm{Im}\Big(\sum_{j=1}^{3}\lambda_j\alpha_{j3}\Big) \\ E_1^c &= E_1^\infty + \mathrm{Re}\left\{\sum_{j=1}^{3}\lambda_j[-a_{j1}\sigma_2^\infty + a_{j2}\sigma_3^\infty + a_{j3}(D_2^\infty - D_2^\infty)]\right\} \end{aligned} \tag{4-128b}$$

推导上式时已应用了 $\sum_{j=1}^{3}\lambda_j\alpha_{j2}$ 是实数的事实，这可由式(4-115)、(4-87)的最后两式和(4-84)得出。由式(4-128)知，$D_2^c \neq 0$，且和ϵ^c 无关；当然，$\boldsymbol{E}^c$ 和ϵ^c 有关。

2) 压电体中的解

式(4-118)化为

$$F_j(z_j) = C_j - \frac{1}{2}[\alpha_{j1}\sigma_2^\infty - \alpha_{j2}\sigma_3^\infty - \alpha_{j3}(D_2^\infty - D_2^c)]\left(1 - \frac{z_j}{\sqrt{z_j^2 - a^2}}\right) \tag{4-129}$$

由于式(4-122)和(4-123)中不含ϵ^c，所以压电体中的解和ϵ^c 无关。

按通常的习惯，定义裂尖 $x = a$ 的应力强度因子为

$$(K_{\mathrm{I}},\ K_{\mathrm{II}},\ K_{\mathrm{D}}) = \sqrt{2\pi}\lim_{x_1\to a}\sqrt{x_1 - a}\,(\sigma_2,\ \sigma_3,\ D_2)_{x_2=0} \tag{4-130a}$$

把式(4-86)代入上式，可得

$$(K_{\mathrm{I}},\ K_{\mathrm{II}},\ K_{\mathrm{D}}) = \sqrt{2\pi}\mathrm{Re}\lim_{x_1\to a}\sqrt{x_1 - a}\sum_{j=1}^{3}F_j(x_1)(1,\ -\mu_j,\ -\eta_j)_{x_2=0} \tag{4-130b}$$

把式(4-129)代入上式，得

$$K_{\mathrm{I}} = \sqrt{\pi a}\sigma_2^\infty,\quad K_{\mathrm{II}} = \sqrt{\pi a}\sigma_3^\infty,\quad K_{\mathrm{D}} = \sqrt{\pi a}(D_2^\infty - D_2^c) \tag{4-130c}$$

由上式可见，机械应力强度因子只和外加机械应力有关，电位移强度因子只和外加电位移有

关，这是线性压电体的计算结果，和实验事实并不符合，这就需要研究非线性问题。

4.5.2 绝缘裂纹的裂尖渐近场

为了得到绝缘裂纹的正确解，须由绝缘椭圆孔的解退化得到，因为这样才符合正确的边界条件，即在一般解中，首先令$\epsilon^c=0$，从而$D_2=0$，再令椭圆孔的$b/a\to 0$。为研究裂尖渐近场，取用局部极坐标系(r,θ)，其原点取在右裂尖[9,51]，即令

$$x_1=a+r\cos\theta,\quad x_2=a+r\sin\theta \tag{4-131}$$

当$r\ll 1$时，有

$$z_j\approx a,\quad \sqrt{z_j^2-a^2}\approx\sqrt{2ar}\sqrt{\cos\theta+\mu_j\sin\theta} \tag{4-132}$$

利用式(4-132)，式(4-129)化为

$$F_j(z_j)\approx[\alpha_{j1}\sigma_2^\infty-\alpha_{j2}\sigma_3^\infty-\alpha_{j3}D_2^\infty)]\frac{\sqrt{a}}{2\sqrt{2r}\sqrt{\cos\theta+\mu_j\sin\theta}} \tag{4-133}$$

令

$$C_j=\alpha_{j1}K_{\text{I}}-\alpha_{j2}K_{\text{II}}-\alpha_{j3}K_{\text{D}} \tag{4-134}$$

式中K_{I}，K_{II}，K_{D}由式(4-130)表示。把上式代入式(4-86)，便得

$$\begin{aligned}
&\sigma_1=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\text{Re}\sum_{j=1}^{3}\frac{C_j\mu_j^2}{\sqrt{\cos\theta+\mu_j\sin\theta}},\quad \sigma_2=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\text{Re}\sum_{j=1}^{3}\frac{C_j}{\sqrt{\cos\theta+\mu_j\sin\theta}}\\
&\sigma_3=-\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\text{Re}\sum_{j=1}^{3}\frac{C_j\mu_j}{\sqrt{\cos\theta+\mu_j\sin\theta}}\\
&D_1=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\text{Re}\sum_{j=1}^{3}\frac{C_j\mu_j\eta_j}{\sqrt{\cos\theta+\mu_j\sin\theta}},\quad D_2=-\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\text{Re}\sum_{j=1}^{3}\frac{C_j\eta_j}{\sqrt{\cos\theta+\mu_j\sin\theta}}
\end{aligned} \tag{4-135}$$

或在极坐标中有

$$\begin{aligned}
&\sigma_\theta=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\text{Re}\sum_{j=1}^{3}C_j(\cos\theta+\mu_j\sin\theta)^{3/2},\quad \sigma_r=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\text{Re}\sum_{j=1}^{3}C_j\frac{(\sin\theta-\mu_j\cos\theta)^2}{\sqrt{\cos\theta+\mu_j\sin\theta}}\\
&\sigma_{\theta r}=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\text{Re}\sum_{j=1}^{3}C_j\sqrt{\cos\theta+\mu_j\sin\theta}(\sin\theta-\mu_j\cos\theta)\\
&D_r=-\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\text{Re}\sum_{j=1}^{3}C_j\eta_j\frac{\sin\theta-\mu_j\cos\theta}{\sqrt{\cos\theta+\mu_j\sin\theta}},\quad D_\theta=\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\text{Re}\sum_{j=1}^{3}C_j\eta_j\sqrt{\cos\theta+\mu_j\sin\theta}
\end{aligned} \tag{4-136}$$

由上式可见，电位移在裂尖处具有$1/\sqrt{r}$的奇异性。σ_1^∞和D_1^∞对裂尖渐近应力场没有影响。

Xu和Rajapakse[52]讨论了压电体中存在任意指向的椭圆孔和裂纹问题的解。

4.5.3 绝缘裂纹的例题[9,44,45]

作为例题，讨论PZT-4陶瓷的两种简单情况。PZT-4陶瓷的材料系数为

$$\begin{aligned}
&a_{11}=8.205\times10^{-12},\quad a_{12}=-3.144\times10^{-12},\\
&a_{13}=7.495\times10^{-12},\quad a_{33}=19.3\times10^{-12}(\text{m}^2/\text{N})
\end{aligned}$$

$$b_{21} = -16.62 \times 10^{-3},\ b_{22} = 23.96 \times 10^{-3},\ b_{22} = 39.4 \times 10^{-3}(\mathrm{m^2/C})$$
$$k_{11} = 7.66 \times 10^{7},\ k_{22} = 9.82 \times 10^{7}(\mathrm{V^2/N})$$

把上述数据代入本征方程式(4-83),得

$$(6.285\mu^6 + 23.214\mu^4 + 29.435\mu^2 + 13.1) \times 10^{-4} = 0$$

由上式解得

$$\mu_1 = \bar{\mu}_4 = 1.218\,5\mathrm{i},\quad \mu_2 = \bar{\mu}_5 = 0.2 + 1.07\mathrm{i},\quad \mu_3 = \bar{\mu}_6 = -0.2 + 1.07\mathrm{i}$$

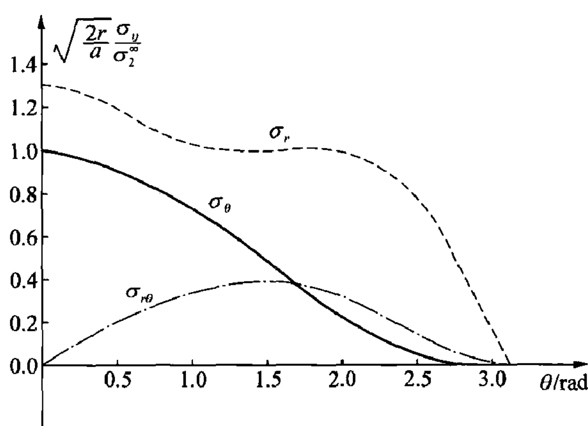
由式(4-85)和(4-115)求出

$$\eta_1 = -6.351\,1 \times 10^{\ 10},\quad \eta_2 = (-2.408\,8 - 1.365\,5\mathrm{i}) \times 10^{-10}$$
$$\eta_3 = (-2.408\,8 + 1.365\,5\mathrm{i}) \times 10^{-10}$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} -1.96 & -1.377\,6\mathrm{i} & -2.017\,8 \times 10^9 \\ 1.48 - 1.947\,4\mathrm{i} & 1.988\,6 + 0.688\,8\mathrm{i} & (1.008\,9 + 0.749\,1\mathrm{i}) \times 10^9 \\ 1.48 + 1.947\,4\mathrm{i} & -1.988\,6 + 0.688\,8\mathrm{i} & (1.008\,9 - 0.749\,1\mathrm{i}) \times 10^9 \end{bmatrix}$$

图 4-3 表示无穷远处只作用 σ_2^∞ 的情形,此时 $C_j = \alpha_{j1}\sigma_2^\infty\sqrt{\pi a}$。

图 4-4 表示无穷远处只作用 D_2^∞ 的情形,此时 $C_j = -\alpha_{j3}D_2^\infty\sqrt{\pi a}$。



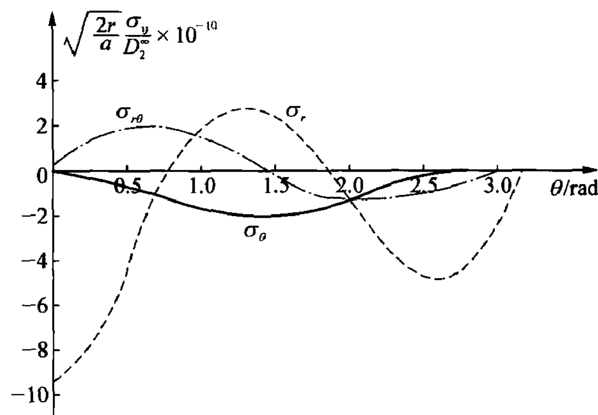


图 4-3 无穷远处只作用 σ_2^∞ 时的量纲一应力和电位移随 θ 的分布

图 4-4 无穷远处只作用 D_2^∞ 时的量纲一应力和电位移随 θ 的分布

4.5.4 传导裂纹

传导裂纹的解可由传导椭圆孔的解退化得到，即在传导椭圆孔的解中令 $b/a \to 0$；或在一般解中，先令$\epsilon^c \to \infty$，再令 $b/a \to 0$。从解题过程可知，绝缘裂纹的解可在介电裂纹的解中令 $\epsilon^c = 0$ 得到，但传导裂纹则不能。

4.6 横观各向同性压电体中有一刚性椭圆夹杂的解

4.6.1 横观各向同性压电体问题取用另一种本构方程时的解法

和式(4-75)不同，本处采用电场强度 $\boldsymbol{E}$ 代替电位移 $\boldsymbol{D}$ 作为基本自变量，从而压电体的本构方程取下列形式

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ D_1 \\ D_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & d_{21} \\ a_{12} & a_{22} & 0 & 0 & d_{22} \\ 0 & 0 & a_{33} & d_{13} & 0 \\ 0 & 0 & d_{13} & \epsilon_{11} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 & 0 & \epsilon_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ E_1 \\ E_2 \end{Bmatrix} \tag{4-137}$$

对于平面应变问题，式中的系数是折算材料系数，表达式此处略去。由于采用式(4-137)的本构关系，相应地式(4-77)和(4-78)有所变化。平衡方程和电场有势方程为

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_3}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_3}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial E_1}{\partial x_2} - \frac{\partial E_2}{\partial x_1} = 0 \tag{4-138}$$

位移协调方程和电位移的 Gauss 方程分别为

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x_1 \partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial D_1}{\partial x_1} + \frac{\partial D_2}{\partial x_2} = 0 \tag{4-139}$$

类似于式(4-79)，引入应力函数 Λ 和电势 φ，使

$$\sigma_1 = \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_2^2}, \quad \sigma_2 = \frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_1^2}, \quad \sigma_3 = -\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_1 \partial x_2}, \quad E_1 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \quad E_2 = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \tag{4-140}$$

则式(4-138)自动满足。把上式代入式(4-139)，便得

$$\begin{aligned} & L_4 \Lambda - L_3 \varphi = 0, \quad L_3 \Lambda - L_2 \varphi = 0 \\ & L_4 = a_{22} \frac{\partial^4}{\partial x_1^4} + a_{11} \frac{\partial^4}{\partial x_2^4} + (2a_{12} + a_{33}) \frac{\partial^4}{\partial x_1^2 \partial x_2^2} \\ & L_3 = d_{21} \frac{\partial^3}{\partial x_2^3} + (d_{22} - d_{13}) \frac{\partial^3}{\partial x_2 \partial x_1^2}, \quad L_2 = \epsilon_{11} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \epsilon_{22} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \end{aligned} \tag{4-141}$$

从式(4-141)中消去 Λ 或 φ 后，分别得

$$(L_4 L_2 - L_3^2)\Lambda = 0, \quad (L_4 L_2 - L_3^2)\varphi = 0 \tag{4-142}$$

由上式可见，本征方程是 6 阶的，只有 6 个本征值。和一般情况类似，设其解为

$$\Lambda = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\tilde{f}_j(z),\ z = x_1 + \mu x_2 \tag{4-143}$$

式中 $\tilde{f}_j(z_j)$是 z_j 的解析函数。把式(4-143)代入(4-142),得到$\partial^6\Lambda/\partial z^6$ 的齐次方程,所以要Λ 有解,必须其前的系数为零,这便得到 μ 的 6 阶代数方程,或 μ 是下列特征方程的根

$$\begin{aligned} &l_4(\mu)l_2(\mu) - l_3^2(\mu) = 0 \\ &l_4 = a_{22} + a_{11}\mu^4 + (2a_{12} + a_{33})\mu^2 \\ &l_3 = \mu[d_{21}\mu^2 + (d_{22} - d_{13})],\quad l_2 = \epsilon_{11} + \epsilon_{22}\mu^2 \end{aligned} \tag{4-144}$$

式(4-144)是 μ 的 6 阶方程,所以有 6 个根,μ 是复数,且

$$\mu_k = \alpha_k + \mathrm{i}\beta_k,\quad \alpha_1 = 0,\quad \mu_3 = -\bar{\mu}_2,\quad \mu_{k+3} = \bar{\mu}_k \tag{4-145}$$

由式(4-141)和(4-144)可推出(注意同一符号在本节和上一节中表示不同的物理量)

$$\varphi = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\eta_j f_j(z_j),\ \eta_j = \frac{l_3}{l_2} = \frac{\mu_j[d_{21}\mu^2 + (d_{22} - d_{13})]}{\epsilon_{11} + \epsilon_{22}\mu^2} \tag{4-146}$$

式中 $f_j(z_j) = \tilde{f}'_j(z_j)$。把 Λ,φ 代入式(4-140),便可求出广义应力

$$\begin{aligned} &\sigma_1 = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\mu_j^2 F_j(z_j),\quad \sigma_2 = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}F_j(z_j),\quad \sigma_3 = -2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\mu_j F_j(z_j) \\ &E_1 = -2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\eta_j F_j(z_j),\quad E_2 = -2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\mu_j\eta_j F_j(z_j),\quad F_j(z_j) = f'_j(z_j) \end{aligned} \tag{4-147}$$

把上式代入式(4-137),得

$$\begin{aligned} &u_1 = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}p_j f_j(z_j) - \omega x_2,\ p_j = a_{11}\mu_j^2 + a_{12} - d_{21}\mu_j\eta_j \\ &u_2 = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}q_j f_j(z_j) + \omega x_1,\ q_j = (a_{12}\mu_j^2 + a_{22} - d_{22}\mu_j\eta_j)/\mu_j \\ &D_1 = -2\mathrm{Re}\sum_{j-1}^{3}\lambda_j\mu_j F_j(z_j),\quad D_2 = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\lambda_j F_j(z_j) \\ &\lambda_j\mu_j = d_{13}\mu_j + \epsilon_{11}\eta_j,\ \lambda_j = d_{21}\mu_j^2 + d_{22} - \epsilon_{22}\mu_j\eta_j \end{aligned} \tag{4-148}$$

式中 ω 是介质的刚体转动。易于证明上式中的最后两式,例如其中的第一式证明如下

$$\begin{aligned} \lambda_j\mu_j = d_{21}\mu_j^3 + d_{22}\mu_j - \epsilon_{22}\mu_j^2\eta_j = l_3 + d_{13}\mu_j - \epsilon_{22}\mu_j^2\eta_j = \\ d_{13}\mu_j + \epsilon_{11}\eta_j + l_3 - (\epsilon_{11} + \epsilon_{22}\mu_j^2)\eta_j = d_{13}\mu_j + \epsilon_{11}\eta_j \end{aligned}$$

4.5.2 刚性椭圆夹杂问题的提法与求解

设无限体内有一长、短半轴分别为 a, b 的刚性椭圆夹杂,在无穷远处作用有 $\boldsymbol{\sigma}^{\infty}$, $\boldsymbol{D}^{\infty}$(图 4-1)。记椭圆夹杂的内部区域为 $\Omega^{(i)}$,其中夹杂的物理量在其上方标以上标 i,在 $\Omega^{(i)}$ 内,夹杂的介电系数记为$\epsilon^{(i)}$,因为刚性夹杂不变形,故有 $\varepsilon_1^{(i)} = \varepsilon_2^{(i)} = \varepsilon_3^{(i)} = 0$;但允许刚性夹杂存在刚体转动,转动角为 $\omega^{(i)}$。夹杂外的电介质基体区域记为 Ω,基体为横观各向同性压电体,为简单计,设它和夹杂的主轴方向相同,它们的边界记为 Γ,Γ 的外法线记为 $\boldsymbol{n}$,指向夹杂内。在无穷

远处的边界条件为

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{\sigma}^{\infty},\quad \boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}^{\infty} \tag{4-149}$$

椭圆夹杂的边界 Γ 的方程为

$$x_1=a\cos\psi,\quad x_2=b\sin\psi \tag{4-150}$$

式中 ψ 是参数。在界面 Γ 上,电场、电位移和位移的连接条件为

$$u_1=u_1^{(\mathrm{i})},\quad u_2=u_2^{(\mathrm{i})},\quad \varphi=\varphi^{(\mathrm{i})},\quad \int_0^s D_n\mathrm{d}s=\int_0^s D_n^{(\mathrm{i})}\mathrm{d}s\ (\text{在}\ \Gamma\ \text{上}) \tag{4-151}$$

式中 $D_n=D_1n_1+D_2n_2$。上式中的最后一式还可变换成

$$\begin{aligned}\int_0^s D_n\mathrm{d}s&=\int_0^s(D_1n_1+D_2n_2)\mathrm{d}s=\int_0^s(D_1\mathrm{d}x_3-D_2\mathrm{d}x_1)\\&=2\mathrm{Re}\int_0^s(\lambda_j\mu_j\mathrm{d}x_3+\lambda_j\mathrm{d}x_1)f_j'=2\mathrm{Re}\int_0^s\lambda_jf_j'\mathrm{d}z_j=2\mathrm{Re}(\lambda_jf_j)\Big|_0^s\end{aligned} \tag{4-152}$$

类似于式(4-99),预设压电介质中的解 $f_j(z_j)$ 为

$$f_j(z_j)=C_jz_j+f_j^0(\varsigma_j),\quad f_j^0(\varsigma_j)=f_j^0[\omega(\varsigma_j)]=a_{j0}+\sum_{k=1}^{\infty}a_{jk}\varsigma_j^{-k} \tag{4-153a}$$

式中

$$\varsigma_j=\frac{z_j+\sqrt{z_j^2-[a^2+\mu_j^2b^2]}}{a-\mathrm{i}\mu_jb},\quad \frac{1}{\varsigma_j}=\frac{z_j-\sqrt{z_j^2-(a^2+\mu_j^2b^2)}}{a+\mathrm{i}\mu_jb}$$

$$z_j=\omega_j(\varsigma_j)=\frac{1}{2}[(a-\mathrm{i}\mu_jb)\varsigma_j+(a+\mathrm{i}\mu_jb)\varsigma_j^{-1}]\ (\text{对}\ j\ \text{不求和})$$

式中 $f_j^0(\varsigma_j)$是ς平面上无限域上的解析函数,复常数 C_j 由无穷远处的边界条件确定。式(4-153a)中的函数 $\omega_j(\varsigma_j)$ 是 把 z 平面上椭圆孔的外部和所有 z_j 平面上对应的边界外部变换到ς平面上的单位圆周 γ 的外部的变换函数。

夹杂 $\Omega^{(\mathrm{i})}$ 内的解可如下推求。按式(4-137),夹杂内有 $D_1^{(\mathrm{i})}=\epsilon_{11}^{(\mathrm{i})}E_1^{(\mathrm{i})}$, $D_2^{(\mathrm{i})}=\epsilon_{22}^{(\mathrm{i})}E_2^{(\mathrm{i})}$,以此代入式(4-139)中的第二式并利用式(4-140),便得

$$D_{1,1}^{(\mathrm{i})}+D_{2,2}^{(\mathrm{i})}=0\Rightarrow\epsilon_{11}^{(\mathrm{i})}\varphi_{,11}^{(\mathrm{i})}+\epsilon_{22}^{(\mathrm{i})}\varphi_{,22}^{(\mathrm{i})}=0 \tag{4-154}$$

由于 $\varphi^{(\mathrm{i})}$是实数,现在寻求式(4-154)如下形式的解

$$\varphi^{(\mathrm{i})}=2\mathrm{Re}\phi^{(\mathrm{i})}(z_0),\ z_0=x_1+\mu_0x_2=\frac{1}{2}[(a-\mathrm{i}\mu_0b)\varsigma_0+(a+\mathrm{i}\mu_0b)\varsigma_0^{-1}] \tag{4-155a}$$

把上式代入(4-154),便得$\epsilon_{11}^{(\mathrm{i})}\phi^{(\mathrm{i})''}+\epsilon_{22}^{(\mathrm{i})}\mu_0^2\phi^{(\mathrm{i})''}=0$,其中 $\phi^{(\mathrm{i})''}$表示 $\phi^{(\mathrm{i})}$ 对 z_0 的二阶导数。由此推出

$$\epsilon_{11}^{(\mathrm{i})}+\epsilon_{22}^{(\mathrm{i})}\mu_0^2=0,\ \mu_0=\mathrm{i}\sqrt{\epsilon_{11}^{(\mathrm{i})}/\epsilon_{22}^{(\mathrm{i})}},\ \epsilon_{11}^{(\mathrm{i})}=-\mu_0^2\epsilon_{22}^{(\mathrm{i})} \tag{4-155b}$$

利用 $\phi^{(\mathrm{i})}(z_0)$,电位移在椭圆边界上连接条件式(4-151)中的第四式还可写成

$$\int_0^s D_n^{(i)}\,\mathrm{d}s = \int_0^s (D_1^{(i)} n_1^{(i)} + D_2^{(i)} n_2^{(i)})\,\mathrm{d}s = \int_0^s (\epsilon_{11}^{(i)} E_1^{i}\,\mathrm{d}x_3 - \epsilon_{22}^{(i)} E_2^{(i)}\,\mathrm{d}x_1) =$$

$$2\mathrm{Re}\int_0^s (-\epsilon_{11}^{(i)} \phi_{,1}^{(i)}\,\mathrm{d}x_3 + \epsilon_{22}^{(i)} \phi_{,3}^{(i)}\,\mathrm{d}x_1) = 2\mathrm{Re}\int_0^s (\mu_0^2 \epsilon_{22}^{(i)} \phi^{(i)\prime}\mathrm{d}x_3 + \epsilon_{22}^{(i)} \mu_0 \phi^{(i)\prime}\mathrm{d}x_1) =$$

$$2\mathrm{Re}\int_0^s \epsilon_{22}^{(i)} \mu_0 \phi^{(i)\prime}(\mu_0\,\mathrm{d}x_3 + \mathrm{d}x_1) = 2\mathrm{Re}\int_0^s \epsilon_{22}^{(i)} \mu_0\,\mathrm{d}\phi^{(i)} = 2\mathrm{Re}[\epsilon_{22}^{(i)} \mu_0 \phi^{(i)}]_0^s \tag{4-156}$$

刚性夹杂因转动在 Ω^i 内任一点产生的位移是

$$u_1^{(i)} = -\omega^{(i)} x_2, \quad u_2^{(i)} = \omega^{(i)} x_1 \tag{4-157}$$

4.5.3 解中的待定系数和待定函数的确定

1) *无穷远处的边界条件*

利用式(4-147)，C_j 可以确定如下

$$\sigma_1^\infty = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^3 \mu_j^2 C_j, \quad \sigma_2^\infty = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^3 C_j, \quad \sigma_3^\infty = -2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^3 \mu_j C_j$$
$$E_1^\infty = -2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^3 \eta_j C_j, \quad E_2^\infty = -2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^3 \mu_j \eta_j C_j \tag{4-158}$$

上式共有 5 个方程，但需要确定的 C_j 却有 6 个实常数，但可任取 $\mathrm{Im}C_1 = 0$ 而不影响应力和电位移。

2) *界面上的位移连接条件*

把式(4-148)、(4-153a)和(4-157)代入边界条件式(4-151)的前两式，在 Γ 上便有

$$2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^3 p_j\Big[C_j(x_1+\mu_j x_2) + a_{j0} + \sum_{k=1}^\infty a_{jk}\,\bar{\sigma}^k\Big] = -\omega^* x_2$$
$$2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^3 q_j\Big[C_j(x_1+\mu_j x_2) + a_{j0} + \sum_{k=1}^\infty a_{jk}\,\bar{\sigma}^k\Big] = \omega^* x_1 \tag{4-159}$$

式中 $\omega^* = \omega^{(i)} - \omega$。注意到在 Γ 上，所有的 $\varsigma_j = \varsigma_0 = \sigma = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}(j=1,2,3)$，$x_1 = a(\sigma+\bar{\sigma})/2$，$x_2 = -\mathrm{i}b(\sigma-\bar{\sigma})/2$，由上式便可推出

$$a_{j0} = 0, \quad a_{jk} = 0,\ k \geqslant 2$$
$$\sum_{j=1}^3 2p_j a_{j1} + p_j C_j(a+\mathrm{i}\mu_j b) + \bar{p}_j \bar{C}_j\,\overline{(a-\mathrm{i}\mu_j b)} = -\mathrm{i}b\omega^*$$
$$\sum_{j=1}^3 2q_j a_{j1} + q_j C_j(a+\mathrm{i}\mu_j b) + \bar{q}_j \bar{C}_j\,\overline{(a-\mathrm{i}\mu_j b)} = a\omega^* \tag{4-160}$$

从而式(4-153a)简化为

$$f_j(z_j) = C_j z_j + a_{j1}\varsigma_j^{-1} \tag{4-153b}$$

3) *界面上的电势和电位移连接条件*

根据上面有关基体中解的特性，同时根据弹性体中的 Eshelby 夹杂理论，当外加应力和电场是常数时，可设椭圆夹杂内部的应力场和电场是均匀的。设

$$\phi^{(i)}(z_0) = C_0' z_0, \quad \varphi^{(i)}(z_0) = 2\mathrm{Re}(C_0' z_0) \tag{4-161}$$

把式(4-146)、(4-148)、(4-152)、(4-153b)、(4-155)、(4-156)、(4-160)和(4-161)代入边界条件式(4-151)的第三式和第四式，推出在 Γ 上有

$$\begin{aligned}2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\eta_j f_j(z_j) &= 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\eta_j(C_j z_j + a_{j1}\varsigma_j^{-1}) = 2\mathrm{Re}(C_0' z_0)\\ 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\lambda_j f_j(z_j) &= 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{3}\lambda_j(C_j z_j + a_{j1}\varsigma_j^{-1}) = 2\mathrm{Re}(\epsilon_{33}^{(i)}\mu_0\phi^{(i)})\end{aligned} \tag{4-162}$$

由上式推出

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{3}[2\eta_j a_{j1} + \eta_j C_j(a+\mathrm{i}b\mu_j) + \bar{\eta}_j\bar{C}_j\overline{(a-\mathrm{i}b\mu_j)}] = C_0'(a+\mathrm{i}b\mu_0) + \overline{C_0'}\,\overline{(a-\mathrm{i}b\mu_0)}\\ &\sum_{j=1}^{3}[2\lambda_j a_{j1} + \lambda_j C_j(a+\mathrm{i}b\mu_j) + \bar{\lambda}_j\bar{C}_j\overline{(a-\mathrm{i}b\mu_j)}] = \epsilon_{22}^{(i)}\mu_0(a+\mathrm{i}b\mu_0) + \epsilon_{22}^{(i)}\overline{\mu_0}\,\overline{(a-\mathrm{i}b\mu_0)}\end{aligned} \tag{4-163}$$

由基体对夹杂无力矩作用这一条件来确定相对转动 ω^*。利用关系式

$$\begin{aligned}t_1 &= \sigma_{1j}n_j = \sigma_1\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s} - \sigma_3\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial^2\Lambda}{\partial x_2^2}\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial^2\Lambda}{\partial x_1\partial x_2}\mathrm{d}x_1\right) = \frac{1}{\mathrm{d}s}\frac{\partial}{\partial x_2}(\mathrm{d}\Lambda)\\ t_2 &= \sigma_{3j}n_j = \sigma_3\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}s} - \sigma_2\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}s} = -\frac{1}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial^2\Lambda}{\partial x_1\partial x_2}\mathrm{d}x_2 + \frac{\partial^2\Lambda}{\partial x_1^2}\mathrm{d}x_1\right) = -\frac{1}{\mathrm{d}s}\frac{\partial}{\partial x_1}(\mathrm{d}\Lambda)\end{aligned}$$

则确定 ω^* 的方程为

$$M_n = \oint(t_1 x_2 - t_2 x_1)\mathrm{d}s = \oint\left[\mathrm{d}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x_2}\right)x_2 + \mathrm{d}\left(\frac{\partial\Lambda}{\partial x_1}\right)x_1\right] = 0 \tag{4-164}$$

应用式(4-153b)和留数定理，便得

$$\sum_{j=1}^{3}[(a-\mathrm{i}b\mu_j)a_{j1} - \overline{(a-\mathrm{i}b\mu_j)}\bar{a}_{j1}] = 0 \tag{4-165}$$

C_j 由式(4-158)确定，其余的 9 个待定实系数 a_{j1}，C_0'，ω^* 由式(4-160)、(4-163)、(4-165)等 9 个方程确定，从而问题全部解决。文献[53]作了类似的讨论。

4.7 压电体中存在一般椭圆夹杂的解法[54]

4.7.1 问题的提法

设无限体内有一长、短半轴分别为 a，b 的椭圆夹杂，夹杂和基体间理想连接，在无穷远处作用有 $\boldsymbol{\sigma}^\infty$，$\boldsymbol{D}^\infty$。所用符号和上节相同。椭圆夹杂的边界方程由式(4-150)表示。在无穷远处电介质需服从的边界条件为

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^\infty,\quad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}^\infty \tag{4-166}$$

上式还可用广义位移和广义应力函数表示为

$$U^{\infty} = [x_1 U_{,1}^{\infty} + x_2 U_{,2}^{\infty}], \quad \Phi^{\infty} = [x_1 \Sigma_2^{\infty} - x_2 \Sigma_1^{\infty}]$$
$$U_{,1}^{\infty} = [u_{1,1}^{\infty}, u_{2,1}^{\infty}, u_{3,1}^{\infty}, -E_1^{\infty}]^{\mathrm{T}}, \quad U_{,2}^{\infty} = [u_{1,2}^{\infty}, u_{2,2}^{\infty}, u_{3,2}^{\infty}, -E_2^{\infty}]^{\mathrm{T}} \tag{4-167}$$
$$\Sigma_1^{\infty} = [\sigma_{11}^{\infty}, \sigma_{12}^{\infty}, \sigma_{13}^{\infty}, D_1^{\infty}]^{\mathrm{T}}, \quad \Sigma_2^{\infty} = [\sigma_{21}^{\infty}, \sigma_{22}^{\infty}, \sigma_{23}^{\infty}, D_2^{\infty}]$$

在界面 Γ 上的连接条件为

$$U = U^{(i)}, \quad \Phi = \Phi^{(i)} (\text{在 } \Gamma \text{ 上}) \tag{4-168}$$

4.7.2 解法

按照式(4-19)和(4-25),有

$$U = 2\mathrm{Re}[A\langle f(z_*)\rangle q], \quad \langle f(z_*)\rangle = \mathrm{diag}[f(z_j)], \ q = [q_j, q_4]^{\mathrm{T}}$$
$$\Phi = 2\mathrm{Re}[B\langle f(z_*)\rangle q], \quad \Phi_i = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4} B_{ij} f(z_j) q_j \tag{4-169}$$

进一步更设

$$U = U^{\infty} + 2\mathrm{Re}[A\langle f_0(z_*)\rangle q'], \quad \Phi = \Phi^{\infty} + 2\mathrm{Re}[B\langle f_0(z_*)\rangle q'], \ q' = A^{\mathrm{T}}\xi + B^{\mathrm{T}}\eta \tag{4-170}$$

式中 ξ, η 是实数矢量。计及无穷远处的边界条件后,式(4-169)又可写成

$$U = [x_1 U_{,1}^{\infty} + x_2 U_{m2}^{\infty}] + 2\mathrm{Re}[A\langle f_0(z_*)\rangle A^{\mathrm{T}}]\xi + 2\mathrm{Re}[A\langle f_0(z_*)\rangle B^{\mathrm{T}}]\eta$$
$$\Phi = [x_1 \Sigma_2^{\infty} - x_2 \Sigma_1^{\infty}] + 2\mathrm{Re}[B\langle f_0(z_*)\rangle A^{\mathrm{T}}] + 2\mathrm{Re}[B\langle f_0(z_*) B^{\mathrm{T}}\rangle \eta \tag{4-171}$$

按式(4-99),解可设为

$$\langle f_0(z_*)\rangle = \langle f_0(z_j)\rangle, \ f_0(z_j) = C_j / \varsigma_j \tag{4-172}$$

式中ς_j 由式(4-98)表示。记ς平面上的单位圆周上的点为 σ,对所有的 $\varsigma_j = \sigma$ 时,按式(4-98),它把ς平面上的单位圆周变换到 z 平面上的椭圆边界和相应的 z_j 平面上的对应边界。在椭圆的边界上有

$$\varsigma_j^{-1} = \bar{\sigma}_j = \cos\psi - \mathrm{i}\sin\psi$$

根据弹性体中的 Eshelby 夹杂理论,当外加应力和电场是常数时,可设椭圆夹杂内部的应力场和电场是均匀的,即设

$$U^{(i)} = [x_1 U_{,1}^{(i)} + x_2 U_{,2}^{(i)}], \quad \Phi^{\infty} = [x_1 \Sigma_2^{(i)} - x_2 \Sigma_1^{(i)}]$$
$$U_{,1}^{(i)} = [u_{1,1}^{(i)}, u_{2,1}^{(i)}, u_{3,1}^{(i)}, -E_1^{(i)}]^{\mathrm{T}}, \quad U_{,2}^{(i)} = [u_{1,2}^{(i)}, u_{2,2}^{(i)}, u_{3,2}^{(i)} - E_2^{(i)}]^{\mathrm{T}} \tag{4-173}$$
$$\Sigma_1^{(i)} = [\sigma_{11}^{(i)}, \sigma_{12}^{(i)}, \sigma_{13}^{(i)}, D_1^{(i)}]^{\mathrm{T}}, \quad \Sigma_2^{(i)} = [\sigma_{21}^{(i)}, \sigma_{22}^{(i)}, \sigma_{23}^{(i)} D_2^{(i)}]^{\mathrm{T}}$$

式中 $u_{1,2}^{(i)}$ 和 $u_{2,1}^{(i)}$ 的差值代表椭圆夹杂的刚性转动转角。现在的问题是如何确定上述诸函数中的常数。

4.7.3 常数的确定

利用椭圆边界上的边界条件来确定诸函数中所包含的常数。利用式(4-166),在椭圆边界上,式(4-171)化为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U} &= \cos\psi(a\boldsymbol{U}_{,1}^{\infty}+\boldsymbol{\eta})+\sin\psi(b\boldsymbol{U}_{,2}^{\infty}-\boldsymbol{S}\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{M}\boldsymbol{\xi})\\ \boldsymbol{\Phi} &= \cos\psi(a\boldsymbol{\Sigma}_{2}^{\infty}+\boldsymbol{\xi})-\sin\psi(b\boldsymbol{\Sigma}_{1}^{\infty}-\boldsymbol{L}\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi})\end{aligned} \tag{4-174}$$

式中 $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{M}, \boldsymbol{L}$ 由式(4-35)表示。把式(4-173)和(4-174)代入(4-168),得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{U}_{,1}^{(i)}=\boldsymbol{U}_{,1}^{\infty}+\frac{1}{a}\boldsymbol{\eta},\quad \boldsymbol{U}_{,2}^{(i)}=\boldsymbol{U}_{,2}^{\infty}-\frac{1}{b}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{\xi})\\ &\boldsymbol{\Sigma}_{2}^{(i)}=\boldsymbol{\Sigma}_{2}^{\infty}+\frac{1}{a}\boldsymbol{\xi},\quad \boldsymbol{\Sigma}_{1}^{(i)}=\boldsymbol{\Sigma}_{1}^{\infty}+\frac{1}{b}(\boldsymbol{L}\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi})\end{aligned} \tag{4-175}$$

利用关系式(4-30),又可得

$$\begin{Bmatrix}\boldsymbol{U}_{,2}^{\infty}\\ -\boldsymbol{\Sigma}_{1}^{\infty}\end{Bmatrix}=\boldsymbol{N}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{U}_{,1}^{\infty}\\ \boldsymbol{\Sigma}_{2}^{\infty}\end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix}\boldsymbol{U}_{,2}^{(i)}\\ -\boldsymbol{\Sigma}_{1}^{(i)}\end{Bmatrix}=\boldsymbol{N}^{i}\begin{Bmatrix}\boldsymbol{U}_{,1}^{(i)}\\ \boldsymbol{\Sigma}_{2}^{(i)}\end{Bmatrix} \tag{4-176}$$

$\boldsymbol{N}^{(i)}$ 和 $\boldsymbol{N}$ 的表达式(4-29)相同,但取夹杂中的材料常数值。式(4-175)和(4-176)共 24 个方程,正好解 24 个未知量 $\boldsymbol{U}_{,1}^{(i)}$, $\boldsymbol{U}_{,2}^{(i)}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{2}^{(i)}$, $\boldsymbol{\Sigma}_{1}^{(i)}$, $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$。

4.8 含有裂纹的泛函梯度压电材料

4.8.1 泛函梯度压电材料反平面剪切问题的基本方程

对于沿 x_3 轴极化的横观各向同性材料,(x_1, x_2)平面是各向同性的。设施加面外机械载荷和面内电载荷,那么便构成压电体的面外剪切问题。此时 u_3, φ 虽是(x_1, x_2)的函数,或在极坐标中是(r, θ)的函数,但和面内的平面问题(u_1, u_2)是解耦的。由式(4-3)得静态平衡方程为

$$\sigma_{31,1}+\sigma_{32,2}=0,\quad D_{1,1}+D_{2,2}=0 \tag{4-177}$$

本构方程(4-10)化为

$$\begin{aligned}&\sigma_{31}=C_{44}u_{3,1}-e_{15}E_1,\quad \sigma_{32}=C_{44}u_{3,2}-e_{15}E_2\\ &D_1=e_{15}u_{3,1}+\epsilon_{11}E_1,\quad D_2=e_{15}u_{3,2}+\epsilon_{11}E_2\end{aligned} \tag{4-178}$$

对于静电问题有 $E_1=-\varphi_{,1}$, $E_2=-\varphi_{,2}$。对于泛函梯度材料,材料系数不再是常数,而是坐标的函数。Li 和 Weng[55]讨论对 x_2 轴对称的问题,并设材料系数按下述规律变化

$$\begin{aligned}&C_{44}(x_2)=C_{44}^{0}(1+\alpha\mid x_2\mid)^{k},\quad e_{15}=e_{15}^{0}(1+\alpha\mid x_2\mid)^{k},\quad \epsilon_{11}=\epsilon_{11}^{0}(1+\alpha\mid x_2\mid)^{k}\\ &\alpha=(\sqrt[k]{C_{44}^{\mathrm{h}}/C_{44}^{0}}-1)/h=(\sqrt[k]{e_{15}^{\mathrm{h}}/e_{15}^{0}}-1)/h=(\sqrt[k]{\epsilon_{11}^{\mathrm{h}}/\epsilon_{11}^{0}}-1)/h\end{aligned} \tag{4-179}$$

式中系数 C_{44}^{0}, e_{15}^{0}, ϵ_{11}^{0} 是材料在中面上的值,C_{44}^{h}, e_{15}^{h}, $\epsilon_{11}^{\mathrm{h}}$ 是材料在 $x_2=\pm h$ 面上的值,k 和 α 为材料常数。考虑到载荷和几何形状的对称性,只需研究 $x_1\geqslant 0$, $x_2\geqslant 0$ 的部分,从而 $|x_2|=x_2$。把式(4-178)和(4-179)代入(4-177),可得

$$\begin{aligned}&C_{44}^{0}[\nabla^2 u_3+(k\alpha/\xi)u_{3,2}]+e_{15}^{0}[\nabla^2\varphi+(k\alpha/\xi)\varphi_{,2}]=0\\ &e_{15}^{0}[\nabla^2 u_3+(k\alpha/\xi)u_{3,2}]-\epsilon_{11}^{0}[\nabla^2\varphi+(k\alpha/\xi)\varphi_{,2}]=0,\ \xi=1+\alpha x_2\end{aligned} \tag{4-180}$$

式中∇^2是二维拉普拉斯算子。一般情况下，$(e_{15}^0)^2 + C_{44}^0\epsilon_{11}^0 \neq 0$，所以由上式可得

$$\nabla^2 u_3 + (k\alpha/\xi)u_{3,2} = 0,\quad \nabla^2\varphi + (k\alpha/\xi)\varphi_{,2} = 0 \tag{4-181}$$

裂纹面上的边界条件和结合面上的连接条件可以写成

$$\begin{aligned}&\sigma_{32}(x_1, 0) = 0,\quad E_1(x_1, 0^+) = E_1^c(x_1, 0^-),\quad D_2(x_1, 0^+) = D_2^c(x_1, 0^-),\ 0 \leqslant x_1 < a\\ &u_3(x_1, 0) = 0,\quad \varphi(x_1, 0) = 0,\quad \sigma_{32}(x_1, 0^+) = \sigma_{32}(x_1, 0^-),\ a \leqslant x_1 < \infty\end{aligned} \tag{4-182a}$$

式中字母右上方的上标 c 表示裂纹空气中的量。根据在无穷远处是规定情形(1)电位移或情形(2)电场的两种情形，无穷远处的边界条件可分别写成

$$\begin{aligned}&\text{情形(1)}: \sigma_{32}(x_1, h) = \tau^\infty = (C_{44}^{h*}/C_{44}^h)\tau_0 - (e_{15}^h/\epsilon_{11}^h)D^\infty,\quad D_2(x_1, h) = D^\infty\\ &\text{情形(2)}: \sigma_{32}(x_1, h) = \tau^\infty = \tau_0 - e_{15}^h E^\infty,\quad E_2(x_1, h) = E^\infty,\ 0 \leqslant x_1 < \infty\end{aligned} \tag{4-182b}$$

式中 D^∞，E^∞是外加电位移和电场，τ_0 是无电场时的外加应力，$C_{44}^{h*} = C_{44}^h + (e_{15}^h)^2/\epsilon_{11}^h$。

4.8.2 反平面剪切问题的解[55]

考虑到问题的对称性，Li 和 Weng[55]用 Fourier 余弦变换来解反平面前切问题。由式(4-181)可设

$$\begin{aligned}u_3(x_1, x_2) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \xi^{-\beta}[A_1(s)\mathrm{I}_\beta(\xi s/\alpha) + A_2(s)\mathrm{K}_\beta(\xi s/\alpha)]\cos(sx_1)\mathrm{d}s + a_1x_2\\ \varphi(x_1, x_2) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \xi^{-\beta}[B_1(s)\mathrm{I}_\beta(\xi s/\alpha) + B_2(s)\mathrm{K}_\beta(\xi s/\alpha)]\cos(sx_1)\mathrm{d}s - b_1x_2\end{aligned} \tag{4-183}$$

式中 $\xi = 1 + \alpha x_2$，$\beta = (k-1)/2$，I_β，K_β 分别是第一和第二类修正的 Bessel(贝塞尔)函数，$A_i(s)$，$B_i(s)$是待定函数，a_1，b_1 是实常数，它们均由边界条件确定。由上式可导出

$$\begin{aligned}\sigma_{31}(x_1, x_2) = &-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty s\xi^{-\beta}[(C_{44}A_1 + e_{15}B_1)\mathrm{I}_\beta(\xi s/\alpha) +\\ &(C_{44}A_2 + e_{15}B_2)\mathrm{K}_\beta(\xi s/\alpha)]\sin(sx_1)\mathrm{d}s\\ \sigma_{32}(x_1, x_2) = &-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \{(C_{44}A_1 + e_{15}B_1)[\beta\alpha\xi^{-\beta-1}\mathrm{I}_\beta(\xi s/\alpha) - s\xi^{-\beta}\mathrm{I}'_\beta(\xi s/\alpha)] +\\ &(C_{44}A_2 + e_{15}B_2)[\beta\alpha\xi^{-\beta-1}\mathrm{K}_\beta(\xi s/\alpha) - s\xi^{-\beta}\mathrm{K}'_\beta(\xi s/\alpha)]\}\cos(sx_1)\mathrm{d}s +\\ &C_{44}a_1 - e_{15}b_1\end{aligned} \tag{4-184}$$

$$\begin{aligned}D_1(x_1, x_2) = &-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty s\xi^{-\beta}[(e_{15}A_1 - \epsilon_{11}B_1)\mathrm{I}_\beta(\xi s/\alpha) +\\ &(e_{15}A_2 - \epsilon_{11}B_2)\mathrm{K}_\beta(\xi s/\alpha)]\sin(sx_1)\mathrm{d}s\\ D_2(x_1, x_2) = &-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \{[\beta\alpha\xi^{-\beta-1}\mathrm{I}_\beta(\xi s/\alpha) - s\xi^{-\beta}\mathrm{I}'_\beta(\xi s/\alpha)]\cdot\\ &(e_{15}A_1 - \epsilon_{11}B_1) + [\beta\alpha\xi^{-\beta-1}\mathrm{K}_\beta(\xi s/\alpha) - s\xi^{-\beta}\mathrm{K}'_\beta(\xi s/\alpha)]\cdot\\ &(e_{15}A_2 - \epsilon_{11}B_2)\}\cos(sx_1)\mathrm{d}s + e_{15}a_1 + \epsilon_{11}b_1\end{aligned} \tag{4-185}$$

$$
\begin{aligned}
E_1(x_1,\ x_2) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty s\xi^{-\beta}[B_1 \mathrm{I}_\beta(\xi s/\alpha) + B_2 \mathrm{K}_\beta(\xi s/\alpha)]\sin(sx_1)\mathrm{d}s \\
E_2(x_1,\ x_2) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \{[\beta\alpha\xi^{-\beta-1}\mathrm{I}_\beta(\xi s/\alpha) - s\xi^{-\beta}\mathrm{I}'_\beta(\xi s/\alpha)]B_1 + \\
&\quad B_2[\beta\alpha\xi^{-\beta-1}\mathrm{K}_\beta(\xi s/\alpha) - s\xi^{-\beta}\mathrm{K}'_\beta(\xi s/\alpha)]\}\cos(sx_1)\mathrm{d}s + b_1
\end{aligned}
\tag{4-186}
$$

式中 I'_β，K'_β是 I_β，K_β 的导数。

在裂纹的空气中有

$$
D_1^c = \epsilon^c E_1^c,\quad D_2^c = \epsilon^c E_2^c,\quad \nabla^2 \phi^c = 0 \tag{4-187}
$$

其解可设为

$$
\begin{aligned}
&\varphi^c(x_1,\ x_2) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty C(s)\sin\mathrm{h}(sx_2)\cos(sx_1)\mathrm{d}s,\ 0 \leqslant x_1 < a \\
&D_1^c(x_1,\ 0) = 0,\quad D_2^c(x_1,\ 0) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \epsilon^c sC(s)\cos(sx_1)\mathrm{d}s \\
&E_1^c(x_1,\ 0) = 0,\quad E_2^c(x_1,\ 0) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty sC(s)\cos(sx_1)\mathrm{d}s
\end{aligned}
\tag{4-188}
$$

式中 $C(s)$是待定函数。利用无穷远处的边界条件，可得

$$
\begin{aligned}
&A_2(s) = RA_1(s),\quad B_2(s) = RB_1(s) \\
&R = -\frac{\beta\alpha(1+\alpha h)\ {}^{1}\mathrm{I}_\beta[(1+\alpha h)s/\alpha] - s\mathrm{I}'_\beta(1+\alpha h)s/\alpha}{\beta\alpha(1+\alpha h)^{-1}\mathrm{K}_\beta[(1+\alpha h)s/\alpha] - s\mathrm{K}'_\beta(1+\alpha h)s/\alpha} \\
&a_1 = \frac{e_{15}^{\mathrm{h}} D^\infty + \epsilon_{11}^{\mathrm{h}}\tau^\infty}{C_{44}^{\mathrm{h}*}\ \epsilon_{11}^{\mathrm{h}}},\quad b_1 = \frac{C_{44}^{\mathrm{h}} D^\infty - e_{15}^{\mathrm{h}}\tau^\infty}{C_{44}^{\mathrm{h}*}\ \epsilon_{11}^{\mathrm{h}}}\ (\text{情形 } 1) \\
&a_1 = \frac{e_{15}^{\mathrm{h}} E^\infty + \tau^\infty}{C_{44}^{\mathrm{h}}},\quad b_1 = E^\infty\ (\text{情形 } 2)
\end{aligned}
\tag{4-189}
$$

把介质和空气中的 $E_1(x_1,\ 0)$，$\varphi(x_1,\ 0)$，$E_1^c(x_1,\ 0)$代入边界条件(4-182)，可得下述对偶积分方程组

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty sB_1(s)[\mathrm{I}_\beta(s/\alpha) + R\mathrm{K}_\beta(s/\alpha)]\sin(sx_1)\mathrm{d}s = 0,\ 0 \leqslant x_1 < a \\
&\int_0^\infty B_1(s)[\mathrm{I}_\beta(s/\alpha) + R\mathrm{K}_\beta(s/\alpha)]\cos(sx_1)\mathrm{d}s = 0,\ a \leqslant x_1 < \infty
\end{aligned}
\tag{4-190}
$$

如定义

$$
B_1(s)[\mathrm{I}_\beta(s/\alpha) + R\mathrm{K}_\beta(s/\alpha)] = (\pi a^2/2)\int_0^1 \sqrt{\eta}\,\Phi(\eta)\mathrm{J}_0(sa\eta)\mathrm{d}\eta \tag{4-191}
$$

式中 J_0 是第一类零阶 Bessel 函数，则式(4-190)中的第二式自动满足，第一式要求 $\Phi(\eta) = 0$，由此推出 $B_1(s) = 0$，进而立即得出 $B_2(s) = 0$。

把 $\sigma_{32}(x_1,\ 0)$，$u_3(x_1,\ 0)$代入边界条件，计及 $B_1(s) = B_2(s) = 0$，便得下述对偶积分方程

$$
\begin{aligned}
&\int_0^\infty sF(s)A(s)\cos(sx_1)\mathrm{d}s = (\pi/2)(C_{44}^0\, a_1 - e_{15}^0\, b_1)/C_{44}^0,\ 0 \leqslant x_1 < a \\
&\int_0^\infty A(s)\cos(sx_1)\mathrm{d}s = 0,\ a \leqslant x_1 < \infty
\end{aligned}
\tag{4-192}
$$

式中

$$A(s)=A_1(s)[\mathrm{I}_\beta(s/\alpha)+R\mathrm{K}_\beta(s/\alpha)] \tag{4-193}$$

$$F(s)=\frac{[\beta\alpha\mathrm{I}_\beta(s/\alpha)-s\mathrm{I}'_\beta(s/\alpha)]+R[\beta\alpha\mathrm{K}_\beta(s/\alpha)-s\mathrm{K}'_\beta(s/\alpha)]}{s[\mathrm{I}_\beta(s/\alpha)+R\mathrm{K}_\beta(s/\alpha)]}$$

对偶积分方程式(4-192)的解可以写成

$$A(s)=\frac{\pi a^2}{2}\frac{\hat{C}_{44}^0}{C_{44}^0}\int_0^1\sqrt{\eta}\Psi(\eta)\mathrm{J}_0(sa\eta)\mathrm{d}\eta,\ \hat{C}_{44}^0=C_{44}^0a_1-e_{15}^0b_1 \tag{4-194}$$

式(4-194)自动满足(4-192)中的第二式，为满足第一式，$\Psi(\eta)$，需满足下列第二类 Fredholm 积分方程

$$\Psi(\eta)+\int_0^1\psi(\eta)G(\eta,\ \eta')\mathrm{d}\eta'=\sqrt{\eta} \tag{4-195}$$

$$G(\eta,\ \eta')=\sqrt{\eta\eta'}\int_0^\infty s[F(s/a)-1]\mathrm{J}_0(s\eta)\mathrm{J}_0(s\eta')\mathrm{d}s$$

4.8.3 反平面剪切问题的裂尖渐近解

裂尖渐近解决定于 $s\to\infty$ 时的解。把式(4-194)分解成奇异和非奇异部分，得

$$A(s)=\frac{\pi a}{2}\frac{\hat{C}_{44}^0}{C_{44}^0}\frac{1}{s}\left\{\Psi(1)\mathrm{J}_1(sa)-\int_0^1\eta\mathrm{J}_1(sa\eta)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\eta}\left[\frac{\Psi(\eta)}{\sqrt{\eta}}\right]\mathrm{d}\eta\right\} \tag{4-196}$$

式中 J_1 是第一类一阶 Bessel 函数。上式中的积分项在裂尖 $x_1=\pm a$ 处是有界的，奇异性质只决定于含 $\Psi(1)$ 的项。利用修正 Bessel 函数的下列性质：

$$\lim_{s\to\infty}\mathrm{I}_\beta(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\mathrm{e}^s,\quad \lim_{s\to\infty}\mathrm{I}'_\beta(s)=\frac{1}{\sqrt{2\pi s}}\mathrm{e}^s \tag{4-197}$$

$$\lim_{s\to\infty}\mathrm{K}_\beta(s)=\sqrt{\frac{\pi}{2s}}\mathrm{e}^{-s},\quad \lim_{s\to\infty}\mathrm{K}'_\beta(s)=-\sqrt{\frac{\pi}{2s}}\mathrm{e}^{-s}$$

经过复杂的计算后得到

$$\sigma_{31}=-\hat{C}_{44}^0a\Psi(1)\xi^{k/2}f_1(s),\quad \sigma_{32}=-\hat{C}_{44}^0a\Psi(1)\xi^{k/2}f_2(s)$$

$$D_1=-\frac{e_{15}^0\hat{C}_{44}^0}{C_{44}^0}a\Psi(1)\xi^{k/2}f_1(s),\quad D_2=-\frac{e_{15}^0\hat{C}_{44}^0}{C_{44}^0}a\Psi(1)\xi^{k/2}f_2(s) \tag{4-198}$$

$$E_1=0,\quad E_2=E^\infty$$

式中

$$f_1(s)=\int_0^\infty\mathrm{J}_1(sa)\mathrm{e}^{-sx_2}\sin(sx_1)\mathrm{d}s=-\frac{r}{a\sqrt{r_1r_2}}\sin\left(\theta-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right) \tag{4-199}$$

$$f_2(s)=\int_0^\infty\mathrm{J}_1(sa)\mathrm{e}^{-sx_2}\cos(sx_1)\mathrm{d}s=\frac{1}{a}-\frac{r}{a\sqrt{r_1r_2}}\cos\left(\theta-\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\right)$$

式中极坐标 $r,\ r_1,\ r_2,\ \theta,\ \theta_1,\ \theta_2$ 的意义见图 4-3。令 $\theta\to0,\ \theta_2\to0,\ r_2\to2a,\ r\to a$，由式(4-198)可得裂尖渐近场为

$$\sigma_{31} = -\frac{K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{2\pi r_1}}\sin\frac{\theta_1}{2},\quad \sigma_{32} = \frac{K_{\mathrm{III}}}{\sqrt{2\pi r_1}}\cos\frac{\theta_1}{2},\ E_1 = E_2 = 0$$

$$D_1 = -\frac{K_{\mathrm{D}}}{\sqrt{2\pi r_1}}\sin\frac{\theta_1}{2},\quad D_2 = \frac{K_{\mathrm{D}}}{\sqrt{2\pi r_1}}\cos\frac{\theta_1}{2} \tag{4-200}$$

$$K_{\mathrm{III}} = \hat{C}_{44}^0\sqrt{\pi a}\Psi(1),\quad K_{\mathrm{D}} = \frac{e_{15}^0}{C_{44}^0}K_{\mathrm{III}} = \frac{\hat{C}_{44}^0 e_{15}^0}{C_{44}^0}\sqrt{\pi a}\Psi(1)$$

上式表明，对于泛函梯度材料，裂尖渐近场仍具有 $1/\sqrt{r}$ 的奇异性。由于 $\hat{C}_{44}^0$ 包含 a_1，b_1 见式(4-189)，所以对于无穷远处的两种电学边界条件，应力强度因子和电位移强度因子是不同的，但在两种情形下，电场强度因子都是零，即电场在裂尖没有奇异性。

4.8.4 面内问题[56]

面内问题可类似于反平面剪切问题处理，但更为复杂。本处讨论 x_1x_3 平面，本构方程为

$$\begin{aligned}
&\sigma_{11} = C_{11}u_{1,1} + C_{13}u_{3,3} - e_{31}E_3,\quad \sigma_{33} = C_{13}u_{1,1} + C_{33}u_{3,3} - e_{33}E_3\\
&\sigma_{13} = C_{44}(u_{1,3} + u_{3,1}) - e_{15}E_1,\quad D_1 = e_{15}(u_{1,3} + u_{3,1}) + \epsilon_{11}E_1\\
&D_3 = e_{31}u_{1,1} + e_{33}u_{3,3} + \epsilon_{33}E_3
\end{aligned} \tag{4-201}$$

式中材料常数随坐标的变化设为指数函数，在(x_1，x_3)坐标系中设

$$(C_{11},C_{13},C_{33},C_{44},e_{31},e_{33},e_{15},\epsilon_{11},\epsilon_{33}) = (C_{11}^0,C_{13}^0,C_{33}^0,C_{44}^0,e_{31}^0,e_{33}^0,e_{15}^0,\epsilon_{11}^0,\epsilon_{33}^0)e^{\beta|x_3} \tag{4-202}$$

式中 β 是材料常数。用广义位移表示的平衡方程为

$$\begin{aligned}
&C_{11}^0u_{1,11} + C_{44}^0u_{1,33} + (C_{13}^0 + C_{44}^0)u_{3,13} + (e_{31}^0 + e_{15}^0)\varphi_{,13} + \beta[C_{44}^0(u_{1,3} + u_{3,1}) + e_{15}^0\varphi_{,1}] = 0\\
&C_{44}^0u_{3,11} + C_{33}^0u_{3,33} + (C_{13}^0 + C_{44}^0)u_{1,13} + e_{15}^0\varphi_{,11} + e_{33}^0\varphi_{,33} + \beta(C_{13}^0u_{1,1} + C_{33}^0u_{3,3} + e_{33}^0\varphi_{,3}) = 0\\
&e_{15}^0u_{3,11} + e_{33}^0u_{3,33} + (e_{33}^0 + e_{15}^0)u_{1,13} - \epsilon_{11}^0\varphi_{,11} - \epsilon_{33}^0\varphi_{,33} + \beta(e_{31}^0u_{1,1} + e_{33}^0u_{3,3} - \epsilon_{33}^0\varphi_{,3}) = 0
\end{aligned} \tag{4-203}$$

在裂纹空气中的方程仍为式(4-187)，即

$$D_1^c = \epsilon^c E_1^c,\quad D_3^c = \epsilon^c E_3^c,\quad \nabla^2\varphi^c = 0 \tag{4-204}$$

和上一节一样，考虑到载荷和几何形状的对称性，只需研究 $x_1 \geqslant 0$，$x_2 \geqslant 0$ 的部分。裂纹面上和结合面上的连接条件，以及对称性条件可以写成

$$\begin{aligned}
&\sigma_{33}(x_1,0) = 0,\quad E_1(x_1,0^+) = E_1^c(x_1,0^-),\quad D_3(x_1,0^+) = D_3^c(x_1,0^-),\ 0 \leqslant |x_1| < a\\
&u_3(x_1,0) = 0,\quad \varphi(x_1,0) = 0,\quad \sigma_{31}(x_1,0^+) = 0,\ a \leqslant |x_1| < \infty
\end{aligned} \tag{4-205a}$$

根据在无穷远处是规定电位移或电场的两种情形，无穷远处的边界条件可以分别写成

情形 1：$\sigma_{33}(x_1,h) = \sigma^\infty = \dfrac{C_{33}^{0*}}{C_{33}^0}\sigma_0 - \dfrac{e_{33}^0}{\epsilon_{33}^0}D^\infty$，$\sigma_{13}(x_1,h) = 0$，$D_3(x_1,h) = D^\infty$

情形 2：$\sigma_{33}(x_1,h) = \sigma^\infty = \sigma_0 - e_{33}^0E^\infty e^{\beta h}$，$\sigma_{13}(x_1,h) = 0$，$E_3(x_1,h) = E^\infty$

$$\tag{4-205b}$$

式中 σ_0 是无电场时的外加应力，$C_{33}^{0*}=C_{33}^0+(e_{33}^0)^2/\epsilon_{33}^0$。围绕裂纹的广义位移单值性条件为

$$\int_{-a}^{a}\psi(x_1)\mathrm{d}x_1=0,\ \psi(x_1)=\mathrm{d}[u_3(x_1,0^+)-u_3(x_1,0^-)]/\mathrm{d}x_1,\ 0\leqslant|x_1|<a \tag{4-206}$$

称式中 $\psi(x_1)$ 为位错密度。显然在结合面上，$u_3(x_1,0^+)-u_3(x_1,0^-)=0$。

仍然采用 Fourier 积分变换的方法求解。设

$$\begin{aligned}
u_1(x_1,x_3)&=\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{6}\int_0^\infty a_jA_j(s)\mathrm{e}^{s\gamma_jx_3}\sin(sx_1)\mathrm{d}s\\
u_3(x_1,x_3)&=\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{6}\int_0^\infty A_j(s)\mathrm{e}^{s\gamma_jx_3}\cos(sx_1)\mathrm{d}s+a_0(1-\mathrm{e}^{-\beta x_3})\\
\varphi(x_1,x_3)&=-\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{6}\int_0^\infty b_jA_j(s)\mathrm{e}^{s\gamma_jx_3}\cos(sx_1)\mathrm{d}s-b_0(1-\mathrm{e}^{-\beta x_3})
\end{aligned} \tag{4-207}$$

式中 $A_j(s)$，a_0，b_0 是待定函数和常数，$a_j(s)$，$b_j(s)$ 为已知函数，$\gamma_j(s)$ 为下列特征方程的根

$$\begin{aligned}
&(f_3q_3+g_2p_4)\gamma^6+(f_3q_2+g_2p_3+f_2q_3+g_1p_4)\gamma^5+(f_3q_1+g_2p_2+f_2q_2+g_1p_3+\\
&\quad f_1q_3+g_0p_4)\gamma^4+(f_3q_0+g_2p_1+f_2q_1+g_1p_2+f_1q_2+g_0p_3+f_0q_3)\gamma^3+\\
&\quad (f_2q_0+g_2p_0+f_1q_1+g_1p_1+f_0q_2+g_0p_2)\gamma^2+(f_1q_0+g_1p_0+f_0q_1+g_0p_1)\gamma+\\
&\quad (f_0q_0+g_0p_0)=0
\end{aligned} \tag{4-208}$$

由上式可知，γ 有 6 个根：$\gamma_j(j=1-6)$。不失一般性，取 $\mathrm{Re}\gamma_j(s)<\mathrm{Re}\gamma_{j+1}(s)$，$j=1\sim5$。同时 $a_j(s)$，$b_j(s)$ 由下列方程确定

$$\begin{aligned}
a_j(s)&=\frac{q_3\gamma_j^3+q_2\gamma_j^2+q_1\gamma_j+q_0}{g_2\gamma_j^2+g_1\gamma_j+g_0}\\
b_j(s)&=\frac{[(C_{13}^0+C_{44}^0)s\gamma_j+C_{13}^0\beta]a_j+C_{33}^0s\gamma_j^2+C_{33}^0\beta\gamma_j-C_{44}^0s}{e_{33}^0s\gamma_j^2+e_{33}^0\beta\gamma_j-e_{15}^0s}
\end{aligned} \tag{4-209}$$

式中

$$\begin{aligned}
f_0&=-(e_{31}^0e_{15}^0+C_{13}^0\epsilon_{11}^0)\beta s\\
f_1&=(e_{31}^0e_{33}^0+C_{13}^0\epsilon_{33}^0)\beta^2-[e_{15}^0(e_{15}^0+e_{31}^0)+\epsilon_{11}^0(C_{13}^0+C_{44}^0)]s^2\\
f_2&=[\epsilon_{33}^0(2C_{13}^0+C_{44}^0)+e_{33}^0(2e_{31}^0+e_{15}^0)]\beta s,\quad f_3=[\epsilon_{33}^0(C_{13}^0+C_{44}^0)+e_{33}^0(e_{31}^0+e_{15}^0)]s^2\\
p_0&=(C_{44}^0\epsilon_{11}^0+e_{15}^{02})s^2,\quad p_1=-(\epsilon_{33}^0C_{44}^0+2e_{33}^0e_{15}^0+\epsilon_{11}^0C_{33}^0)\beta s\\
p_2&=(e_{33}^{02}+C_{33}^0\epsilon_{33}^0)\beta^2-(\epsilon_{33}^0C_{44}^0+2e_{33}^0e_{15}^0+\epsilon_{11}^0C_{33}^0)s^2\\
p_3&=2(e_{33}^{02}+C_{33}^0\epsilon_{33}^0)\beta s,\quad p_4=(e_{33}^{02}+C_{33}^0\epsilon_{33}^0)s^2\\
g_0&=e_{15}^0(e_{31}^0e_{33}^0+C_{13}^0\epsilon_{33}^0)\beta^2+C_{11}^0(e_{15}^0\epsilon_{33}^0-e_{33}^0\epsilon_{11}^0)s^2\\
g_1&=\{e_{15}^0[\epsilon_{33}^0(C_{13}^0+C_{44}^0)+e_{33}^0(e_{31}^0+e_{15}^0)]+(e_{31}^0+e_{15}^0)(e_{31}^0e_{33}^0+C_{13}^0\epsilon_{33}^0)-\\
&\quad C_{44}^0(e_{15}^0\epsilon_{33}^0-e_{33}^0\epsilon_{11}^0)\}\beta s\\
g_2&=\{(e_{15}^0+e_{31}^0)[\epsilon_{33}^0(C_{13}^0+C_{44}^0)+e_{33}^0(e_{31}^0+e_{15}^0)]-C_{44}^0(e_{15}^0\epsilon_{33}^0-e_{33}^0\epsilon_{11}^0)\}s^2\\
q_0&=e_{33}^0(C_{44}^0\epsilon_{11}^0+e_{15}^{02})\beta s\\
q_1&=-e_{15}^0(e_{33}^{02}+C_{33}^0\epsilon_{33}^0)\beta^2+[(\epsilon_{33}^0C_{44}^0+e_{33}^0e_{15}^0)-(e_{15}^0\epsilon_{33}^0-e_{31}^0\epsilon_{11}^0)(C_{13}^0+C_{44}^0)]s^2\\
q_2&=-(e_{31}^0+2e_{15}^0)(e_{33}^{02}+C_{33}^0\epsilon_{33}^0)\beta s,\quad q_3=-(e_{31}^0+e_{15}^0)(e_{33}^{02}+C_{33}^0\epsilon_{33}^0)s^2
\end{aligned}$$

对式(4－204)作 Fourier 变换，并取

$$\varphi^c(x_1, x_3) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty B(s)\sinh(sx_3)\cos(sx_1)\mathrm{d}s, \ -a < x_1 < a \tag{4-210}$$

式中 $B(s)$是待定函数。

利用式(4－206)中的位错密度 $\psi(x_1)$，边界条件 $\sigma_{33}(x_1, 0) = 0 \ (0 \leqslant x_1 < a)$ 和其他边界条件，以及式(4－210)，最终可导出下述奇异积分方程

$$\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\psi(t)\left[\frac{1}{t-x_1} + M_1(t, x_1) + M_2(t, x_1)\right]\mathrm{d}t = \frac{\sigma^\infty}{Z_0^\infty} \tag{4-211}$$

式中

$$\begin{aligned}
&M_1(t, x_1) = \int_0^\infty [Z_0(s)/Z_0^\infty - 1]\sin(st)\cos(sx_1)\mathrm{d}s \\
&M_2(t, x_1) = \frac{1}{Z_0^\infty}\sum_{j=4}^{6}\sum_{i=1}^{3}\int_0^\infty \frac{k_i(s)\delta_{ji}(s)}{k_0(s)\delta_{j0}(s)}d_{0j}\mathrm{e}^{s(\gamma_i-\gamma_j)h}\sin(st)\cos(sx_1)\mathrm{d}s \\
&Z_i(s) = \sum_{j=1}^{3}\frac{k_j(s)}{k_0(s)}d_{ij}(s), \quad Z_i^\infty = \lim_{s\to\infty}Z_i(s), \ i = 0, 1, 2, 3, \ j = 1 \sim 6
\end{aligned} \tag{4-212}$$

式中

$$\begin{aligned}
&k_0(s) = \sum_{j=1}^{3} r_{0j}(s)k_j(s) \\
&k_1(s) = r_{13}r_{22} - r_{12}r_{23}, \quad k_2(s) = r_{11}r_{23} - r_{13}r_{21}, \quad k_3(s) = r_{12}r_{21} - r_{11}r_{22} \\
&\delta_{40}(s) = \rho_{15}\rho_{24} - \rho_{14}\rho_{25}, \quad \delta_{50}(s) = -\delta_{40}, \quad \delta_{60}(s) = -d_{06} \\
&\left.\begin{aligned}
&\delta_{4j}(s) = \rho_{25}\rho_{1j} - \rho_{15}\rho_{2j}, \quad \delta_{5j}(s) = \rho_{24}\rho_{1j} - \rho_{14}\rho_{2j} \\
&\delta_{6j}(s) = d_{0j} + \delta_{4j}d_{04}/\delta_{40} + \delta_{5j}d_{05}/\delta_{50}
\end{aligned}\right\} j = 1, 2, 3 \\
&\rho_{1j}(s) = d_{16}d_{0j} - d_{06}d_{1j}, \quad \rho_{2j}(s) = d_{26}d_{1j} - d_{16}d_{2j} \\
&\left.\begin{aligned}
&r_{0j}(s) = 1 - \sum_{i=4}^{6}\frac{1}{\delta_{i0}}\delta_{ij}\mathrm{e}^{s(\gamma_j-\gamma_i)h}, \quad r_{1j}(s) = b_j(s) - \sum_{i=4}^{6}\frac{b_i}{\delta_{i0}}\delta_{ij}\mathrm{e}^{s(\gamma_j-\gamma_i)h} \\
&r_{2j}(s) = d_{1j} - \sum_{i=4}^{6}\frac{d_{1i}}{\delta_{i0}}\delta_{ij}\mathrm{e}^{s(\gamma_j-\gamma_i)h}
\end{aligned}\right\} j = 1, 2, 3 \\
&\left.\begin{aligned}
&d_{0j}(s) = C_{13}^0 a_j(s) + \gamma_j(C_{33}^0 - e_{33}^0 b_j), \quad d_{1j}(s) = C_{44}^0(\gamma_j a_j - 1) + e_{15}^0 b_j \\
&d_{2j}(s) = e_{31}^0 a_j + \gamma_j(e_{33}^0 - \epsilon_{33}^0 b_j)(\text{情形 1}), \quad d_{2j}(s) = \gamma_j b_j(\text{情形 2}) \\
&d_{3j}(s) = e_{31}^0 a_j + \gamma_j(e_{33}^0 - \epsilon_{33}^0 b_j)
\end{aligned}\right\} j = 1 \sim 6
\end{aligned}$$

式(4－202)和(4－206)组成了可解奇异积分方程组。令

$$\psi(t) = \frac{\sigma^\infty}{Z_0^\infty}\frac{\Phi(u)}{\sqrt{1-u^2}}, \quad u = \frac{t}{a} \tag{4-213}$$

把上式代入(4－211)，然后采用 Gauss-Jacobi 数值积分方法求解积分方程。广义应力强度因子为

$$K_{\mathrm{I}} = \lim_{x\to a^+}\sqrt{2\pi(x_1-a)}\sigma_{33}(x_1, 0) = \sigma_0\sqrt{\pi a}\Phi(1), \quad K_{\mathrm{D}} = (Z_3^\infty/Z_0^\infty)K_{\mathrm{I}} \tag{4-214}$$

文献[57]和其他一些文献讨论了更一般的问题。

第5章

均匀压电介质中的线性夹杂

5.1 均匀压电介质中夹杂尖端的渐近场

5.1.1 线性夹杂尖端渐近场的一般形式[8,9]

讨论压电体体中含一线性夹杂的裂尖区渐近场时，由于讨论的裂尖区远小于夹杂的长度，更小于物体的尺寸，因此等价于讨论半无限线性夹杂的问题。现在讨论线性夹杂尖端渐近场的一般形式。设半无限线性夹杂沿 x_1 轴伸向 $-\infty$，顶点取为坐标原点，因而在极标系中，物体占据区域 $0 \leqslant r \leqslant \infty$，$-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$（图 5－1）。本小节采用半逆解法。设线性夹杂尖端区的渐近解的形式为

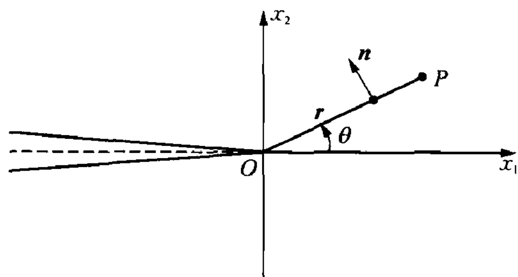


图 5－1　线性夹杂尖端的局部坐标

$$
\begin{aligned}
& f_j(z_j) = q_j z_j^{\lambda+1}/(\lambda+1),\ z_j = x_1 + \mu_j x_2 = r(\cos\theta + \mu_j \sin\theta) \\
& F_j(z_j) = f_j'(z_j) = q_j z_j^{\lambda},\ \mu_j = \alpha_j + \mathrm{i}\beta_j
\end{aligned} \tag{5-1}
$$

式中 $\boldsymbol{q}$ 为待定复常数，z_j 为广义复变数。为使在夹杂尖端区无限小的区域内的应变能有界，需使 $\lambda > -1/2$。由式(4－19)、(4－20)和(4－25)知

$$
\begin{aligned}
& \boldsymbol{U} = \frac{1}{\lambda+1}\sum_{j=1}^{4}(\boldsymbol{a}_j z_j^{\lambda+1} q_j + \overline{\boldsymbol{a}}_j \overline{z}_j^{\lambda+1}\overline{q}_j) = \frac{1}{\lambda+1}[\boldsymbol{A}\langle z_*^{\lambda+1}\rangle \boldsymbol{q} + \overline{\boldsymbol{A}}\langle \overline{z}_*^{\lambda+1}\rangle \overline{\boldsymbol{q}}] \\
& \boldsymbol{\Phi} = \frac{1}{\lambda+1}\sum_{j=1}^{4}(\boldsymbol{b}_j z_j^{\lambda+1} q_j + \overline{\boldsymbol{b}}_j \overline{z}_j^{\lambda+1}\overline{q}_j) = \frac{1}{\lambda+1}[\boldsymbol{B}\langle z_*^{\lambda+1}\rangle \boldsymbol{q} + \overline{\boldsymbol{B}}\langle \overline{z}_*^{\lambda+1}\rangle \overline{\boldsymbol{q}}] \\
& \boldsymbol{\Sigma}_1 = -\boldsymbol{\Phi}_{,2} = -\sum_{j=1}^{4}(\mu_j \boldsymbol{b}_j z_j^{\lambda} q_j + \overline{\mu}_j \overline{\boldsymbol{b}}_j \overline{z}_j^{\lambda}\overline{q}_j) = \boldsymbol{B}\langle \mu_* z_*^{\lambda}\rangle \boldsymbol{q} + \overline{\boldsymbol{B}}\langle \overline{\mu}_* \overline{z}_*^{\lambda}\rangle \overline{\boldsymbol{q}} \\
& \boldsymbol{\Sigma}_2 = \boldsymbol{\Phi}_{,1} = \sum_{j=1}^{4}(\boldsymbol{b}_j z_j^{\lambda} q_j + \overline{\boldsymbol{b}}_j \overline{z}_j^{\lambda}\overline{q}_j) = \boldsymbol{B}\langle z_*^{\lambda}\rangle \boldsymbol{q} + \overline{\boldsymbol{B}}\langle \overline{z}_*^{\lambda}\rangle \overline{\boldsymbol{q}}
\end{aligned} \tag{5-2}
$$

在极坐标系中，径向平面的法线 $\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{r}$ 垂直，即 $\boldsymbol{n}(-\sin\theta,\ \cos\theta)$ 上的面力矢量 $\boldsymbol{T}$ 为

$$
\begin{aligned}
T_i &= \sigma_{i1} n_1 + \sigma_{i2} n_2 = -\sigma_{i1}\sin\theta + \sigma_{i2}\cos\theta = \Phi_{i,2}\sin\theta + \Phi_{i,1}\cos\theta = \\
& \Phi_i'(z_j)\frac{z_j}{r} = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4}\left(\frac{1}{r}B_{ij} z_j^{\lambda+1} q_j\right),\ \Phi_i'(z_j) = \mathrm{d}\Phi_i(z_j)/\mathrm{d}z_j
\end{aligned}
$$

$$T = 2\mathrm{Re}\left[\frac{1}{r}\boldsymbol{B}\langle z_{*}^{\lambda+1}\rangle \boldsymbol{q}\right] \tag{5-3}$$

上式可用来讨论任意顶角的楔形夹杂。

5.1.2 应力奇异性

应力奇异性和线性夹杂尖端附近的边界条件密切相关，需要对不同的情况分别进行研究。

1）**两边自由（裂纹）**

边界条件为

$$\boldsymbol{T}(r, \pm\pi) = \boldsymbol{0}, \quad 或\ \boldsymbol{\Sigma}_2(r, \pm\pi) = \boldsymbol{0} \tag{5-4}$$

对于在 x_1 轴上的点有 $z_j = x_{1j} = x_1$。把式(5-2)代入上式便得

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\pi}\boldsymbol{Bq} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\pi}\overline{\boldsymbol{B}}\overline{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0}, \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\pi}\boldsymbol{Bq} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\pi}\overline{\boldsymbol{B}}\overline{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0} \tag{5-5}$$

或
$$\sum_{j=1}^{4}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\pi}q_j\boldsymbol{b}_j + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\pi}\overline{q}_j\overline{\boldsymbol{b}}_j) = \boldsymbol{0}, \quad \sum_{j=1}^{4}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\pi}q_j\boldsymbol{b}_j + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\pi}\overline{q}_j\overline{\boldsymbol{b}}_j) = \boldsymbol{0}$$

从式(5-5)中的第一行消去$\overline{\boldsymbol{B}}\overline{\boldsymbol{q}}$或从式(5-5)中的第二行消去$\overline{q}_j\overline{\boldsymbol{b}}_j$，便得

$$(1-\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\lambda\pi})^4\boldsymbol{Bq} = \boldsymbol{0}, \quad 或(1-\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\lambda\pi})\boldsymbol{b}_j q_j = \boldsymbol{0},\ j = 1 \sim 4 \tag{5-6}$$

由于 $\boldsymbol{B}$ 是非奇异的，要 $\boldsymbol{q}$ 有解，必须其前面的系数行列式为零，即

$$(1-\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\lambda\pi})^4 = 0, \quad 或(1-\mathrm{e}^{4\mathrm{i}\lambda\pi}) = 0 \tag{5-7}$$

由式(5-2)和(5-7)知，对每一个 μ_j，都有 $\lambda = -1/2,\ 0,\ m/2$，m 为正整数。$\lambda = -1/2$ 时广义应力是奇异的，且奇异性指数为 $-1/2$。

2）**两边固定（广义刚性夹杂，位移和电势均为零）**

边界条件为

$$\boldsymbol{U}(r, \pm\pi) = \boldsymbol{0} \tag{5-8}$$

此时有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\pi}\boldsymbol{Aq} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\pi}\overline{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0}, \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\pi}\boldsymbol{Aq} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\pi}\overline{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{q}} = \boldsymbol{0} \tag{5-9}$$

或
$$\sum_{j=1}^{4}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\pi}q_j\boldsymbol{a}_j + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\pi}\overline{q}_j\overline{\boldsymbol{a}}_j) = \boldsymbol{0}, \quad \sum_{j=1}^{4}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\lambda\pi}q_j\boldsymbol{a}_j + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\lambda\pi}\overline{q}_j\overline{\boldsymbol{a}}_j) = \boldsymbol{0}$$

由上式知，对每一个 μ_j，仍有 $\lambda = -1/2,\ 0,\ m/2$，m 为正整数。

3）**其他边界条件**

其他边界条件，如一边自由、一边固定的边界条件为

$$\boldsymbol{\Sigma}_2(r, -\pi) = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{U}(r, \pi) = \boldsymbol{0} \tag{5-10}$$

均可类似讨论，本书不再详细研究。

5.1.3 裂尖渐近场

由式(5-7)和(5-8)知，$\lambda = -1/2$ 时，广义应力具有奇异性，以之代入式(5-1)，得

$F_j(z_j) = q_j/\sqrt{z_j} = q_j/\sqrt{r}\sqrt{\cos\theta + \mu_j \sin\theta}$。按式(5-2)，便得

$$\Sigma_{1i} = -2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4}\left(\mu_j b_{ji}\frac{1}{\sqrt{z_j}}q_j\right) = -2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4}\frac{B_{ij}\mu_j q_j}{\sqrt{r}\sqrt{\cos\theta+\mu_j\sin\theta}}$$

$$\Sigma_{2i} = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4}\left(b_{ji}\frac{1}{\sqrt{z_j}}q_j\right) = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4}\frac{B_{ij}q_j}{\sqrt{r}\sqrt{\cos\theta+\mu_j\sin\theta}} \tag{5-11}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_1 = -2\mathrm{Re}\boldsymbol{B}\langle\mu_* z_*^{-1/2}\rangle\boldsymbol{q}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_2 = 2\mathrm{Re}\boldsymbol{B}\langle z_*^{-1/2}\rangle\boldsymbol{q}$$

按通常的方式引入应力强度因子，即

$$\boldsymbol{K} = (K_{\mathrm{II}}, K_{\mathrm{I}}, K_{\mathrm{III}}, K_{\mathrm{D}})^{\mathrm{T}} = \lim_{r\to 0}\sqrt{2\pi r}(\sigma_{21}, \sigma_{22}, \sigma_{23}, D_2)^{\mathrm{T}}\Big|_{\theta=0} = \lim_{r\to 0}\sqrt{2\pi r}\boldsymbol{\Sigma}_2\Big|_{\theta=0} \tag{5-12}$$

显然，上式定义的 $\boldsymbol{K}$ 是实数。若令

$$\boldsymbol{q} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{K}, \quad q_i = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}B_{ij}^{-1}K_j, \ B_{ij}^{-1} = [\boldsymbol{B}^{-1}]_{ij} \tag{5-13}$$

则可推出

$$\Sigma_{1i} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4}\frac{B_{ij}\mu_j B_{jl}^{-1}K_l}{\sqrt{\cos\theta+\mu_j\sin\theta}}, \quad \Sigma_{2i} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4}\frac{B_{ij}B_{jl}^{-1}K_l}{\sqrt{\cos\theta+\mu_j\sin\theta}}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_1 = -\frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\mathrm{Re}\boldsymbol{B}\left\langle\frac{\mu_*}{\sqrt{\cos\theta+\mu_*\sin\theta}}\right\rangle\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{K} \tag{5-14}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\mathrm{Re}\boldsymbol{B}\left\langle\frac{1}{\sqrt{\cos\theta+\mu_*\sin\theta}}\right\rangle\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{K}$$

当 $\theta = 0$ 时，由上式立即推出 $\boldsymbol{\Sigma}_2 = \boldsymbol{K}/\sqrt{2\pi r}$，这说明式(5-13)的假设是合理的。

5.2 均匀压电体中的共线界面绝缘裂纹[8, 9, 39, 40, 58]

5.2.1 单个绝缘裂纹

图 5-2 表示一均匀压电体中在 x_1 轴上的 $(-a, a)$ 段有一裂纹，记为 L_c，在裂纹上下两面作用相同的应力 $\boldsymbol{\Sigma}_0(x_1) = [t_1^*, t_2^*, t_3^*, -\sigma^*]$，在无穷远处没有外力和电位移作用；同时在除裂纹外的结合面上，广义位移和广义应力都连续。令 $\boldsymbol{d}(x_1)$ 是 x_1 轴上的上面和下面广义位移的间断值，注意到对任何 j 有 $x_{1j} = x_1$，则按式(4-19)、(4-24)和(4-25)，有

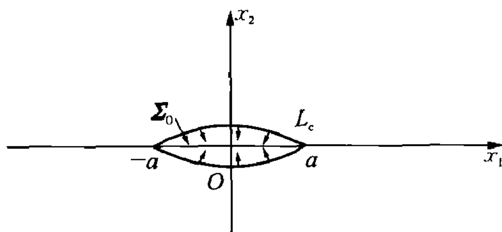


图 5-2 单个绝缘裂纹

$$\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1) = 2\mathrm{Re}[\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}(x_1)] = \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}(x_1) + \overline{\boldsymbol{B}}\,\overline{\boldsymbol{F}(x_1)} = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4}\boldsymbol{b}_j F_j(x_1)$$

$$\boldsymbol{d}(x_1) = \boldsymbol{U}^+(x_1) - \boldsymbol{U}^-(x_1) = 2\mathrm{Re}\boldsymbol{A}[\boldsymbol{f}^+(x_1) - \boldsymbol{f}^-(x_1)] = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4}\boldsymbol{a}_j[f_j^+(x_1) - f_j^-(x_1)]$$

$$\boldsymbol{d}'(x_1) = 2\mathrm{Re}\boldsymbol{A}[\boldsymbol{F}^+(x_1) - \boldsymbol{F}^-(x_1)] \tag{5-15}$$

式中字母右上角的符号“+”表示从 x_2 为正的半平面趋向 x_1 轴，右上角的符号“-”表示从 x_2 为负的半平面趋向 x_1 轴。在结合面上，位移和电势、面力和电位移都连续，因而要求

$$\boldsymbol{d}(x_1) = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{\Sigma}_2^+(x_1) = \boldsymbol{\Sigma}_2^-(x_1), \; x \notin L_c \tag{5-16}$$

在裂纹面上，张开位移是待求的，而广义应力是给定的，即在裂纹面上有

$$\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1) = \boldsymbol{\Sigma}_2^+(x_1) = \boldsymbol{\Sigma}_2^-(x_1) = \boldsymbol{\Sigma}_0(x_1), \; x_1 \in L_c \tag{5-17}$$

由于广义应力在裂纹面和结合面上都连续，所以应力在整个 x_1 轴上都连续，即有

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}^+(x_1) + \overline{\boldsymbol{B}}\,\overline{\boldsymbol{F}^+(x_1)} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}^-(x_1) + \overline{\boldsymbol{B}}\,\overline{\boldsymbol{F}^-(x_1)}, \; -\infty < x_1 < \infty \tag{5-18}$$

由于 $\overline{\boldsymbol{F}^+(x_1)} = \overline{\boldsymbol{F}}^-(x_1)$，$\overline{\boldsymbol{F}^-(x_1)} = \overline{\boldsymbol{F}}^+(x_1)$，故上式又可改写为

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}^+(x_1) - \overline{\boldsymbol{B}}\,\overline{\boldsymbol{F}}^+(x_1) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}^-(x_1) - \overline{\boldsymbol{B}}\,\overline{\boldsymbol{F}}^-(x_1), \; -\infty < x_1 < \infty \tag{5-19}$$

由于上面等式的左边为在 $x_2 > 0$ 解析的函数的边值，右边为在 $x_2 < 0$ 解析的函数的边值，而在 $x_1 = 0$ 上是连续的，因而在全平面解析，它只能是常数；又设在无穷远处没有外力和电位移作用，故该常数为零。从而有

$$\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}^+(x_1) = \overline{\boldsymbol{B}}\,\overline{\boldsymbol{F}}^+(x_1), \; x_2 > 0, \quad \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}^-(x_1) = \overline{\boldsymbol{B}}\,\overline{\boldsymbol{F}}^-(x_1), \; x_2 < 0 \tag{5-20}$$

利用式(5-15)和(5-20)，式(5-17)可以变换为

$$\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}^+(x_1) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}^-(x_1) = \boldsymbol{\Sigma}_0(x_1), \; x_1 \in L_c \tag{5-21}$$

1) 解法 1

式(5-21)可变换为

$$\begin{gathered}\boldsymbol{F}^+(x_1) + \boldsymbol{F}^-(x_1) = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_0(x_1) = \boldsymbol{\Sigma}_0'(x_1), \; x_1 \in L_c \\ F_j^+(x_1) + F_j^-(x_1) = B_{ji}^{-1}\Sigma_{0i}(x_1) = \Sigma_{0j}'(x_1), \; B_{ji}^{-1} = [\boldsymbol{B}^{-1}]_{ji}\end{gathered} \tag{5-22}$$

式(5-22)是 4 个自变量均为广义复变数的矢量型 Riemann-Hilbert 问题，但其分量是相互解耦的，所以其解很容易求得。由于现在讨论单个裂纹，所以对每一个分量可按 1.6.1 节的方法处理。式(5-22)相当于(1-73)中 $\boldsymbol{g} = -\boldsymbol{I}$ 的情形，因而基本解中的幂次 γ_j 均为 $e^{2\pi i\gamma_j} = -1$，$\gamma_j = 1/2$，从而在 z 平面上的基本解为

$$\boldsymbol{Q}(z_*) = \mathrm{diag}[Y_{01}(z), Y_{02}(z), Y_{03}(z), Y_{04}(z)] = \langle Y_0(z_*)\rangle, \; Y_0(z_*) = 1/\sqrt{z_*^2 - a^2} \tag{5-23}$$

类似于式(1-95)和无穷远处应力为零的要求，原问题非齐次方程式(5-22)的解为

$$F_j(z_j)=Y_0(z_j)\left[C_j+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\Sigma'_{0j}(x_1)\mathrm{d}x_1}{Y_0^+(x_1)(x_1-z_j)}\right],\ Y_0(z_j)=\frac{1}{\sqrt{z_j^2-a^2}}$$
$$\boldsymbol{F}(z_*)=\boldsymbol{Q}(z_*)\left[\boldsymbol{C}+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\boldsymbol{\Sigma}'_0(x_1)\mathrm{d}x_1}{\boldsymbol{Q}^+(x_1)(x_1-z_*)}\right],\ \boldsymbol{Q}(z_*)=\langle Y_0(z_*)\rangle \tag{5-24}$$

当 $\boldsymbol{\Sigma}_0(x_1)=-\boldsymbol{\Sigma}_0$ 是常矢量时，按式(1-131)，上式中的积分可以表示为

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\sqrt{(x_1^2-a^2)}\Sigma'_{0j}\mathrm{d}x_1}{(x_1-z)}=\frac{1}{2}\Sigma'_{0j}[-\sqrt{(z^2-a^2)}+z]$$

从而式(5-24)可化为

$$F_j(z_j)=\frac{1}{2}\Sigma'_{0j}\left[-1+\frac{z_j}{\sqrt{(z_j^2-a^2)}}\right]+\frac{C_j}{\sqrt{(z_j^2-a^2)}}$$
$$\boldsymbol{F}(z_*)=\frac{1}{2}\left[-\boldsymbol{I}+\left\langle\frac{z_*}{\sqrt{(z_*^2-a^2)}}\right\rangle\right]\boldsymbol{\Sigma}'_0+\frac{\boldsymbol{C}}{\sqrt{(z_*^2-a^2)}} \tag{5-25}$$

广义位移单值性条件要求绕裂纹一周后，位移回到初始值，或

$$\oint_L\boldsymbol{U}\mathrm{d}L=\oint_L 2\mathrm{Re}\boldsymbol{A}f(L)\mathrm{d}L=0,\quad 或\int_{-a}^{a}\boldsymbol{d}(x_1)\mathrm{d}x_1=0 \tag{5-26}$$

或

$$\int_{-a}^{a}[F_j^+(x_1)-F_j^-(x_1)]\mathrm{d}x_1=0$$

上式要求 $C_j=0$。所以有

$$\boldsymbol{BF}(z^*)_0=\frac{1}{2}\boldsymbol{B}\left[-\boldsymbol{I}+\left\langle\frac{z_*}{\sqrt{(z_*^2-a^2)}}\right\rangle\right](\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_0)$$
$$B_{ij}F_j(z_j)=\frac{1}{2}B_{ij}\Sigma'_{0j}\left[-1+\frac{z_j}{\sqrt{(z_j^2-a^2)}}\right]=\frac{1}{2}B_{ij}B_{jk}^{-1}\Sigma_{0k}\left[-1+\frac{z_j}{\sqrt{(z_j^2-a^2)}}\right] \tag{5-27}$$

从而问题的解为

$$U_i=\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4}A_{ij}B_{jk}^{-1}\Sigma_{0k}[\sqrt{(z_j^2-a^2)}-z_j]$$
$$\Phi_i=\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4}B_{ij}B_{jk}^{-1}\Sigma_{0k}[\sqrt{(z_j^2-a^2)}-z_j]$$
$$\Sigma_{i2}=2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4}B_{ij}F_j(z_j)=\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4}B_{ij}B_{jk}^{-1}\Sigma_{0k}\left[-1+\frac{z_j}{\sqrt{(z_j^2-a^2)}}\right] \tag{5-28}$$
$$\Sigma_{i1}=-2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4}\mu_jB_{ij}F_j(z_j)=\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4}\mu_jB_{ij}B_{jk}^{-1}\Sigma_{0k}\left[1-\frac{z_j}{\sqrt{(z_l^2-a^2)}}\right]$$

在 x_1 轴上，所有的 z_j 都等于 x_1，所以在式(5-28)中有 $B_{ij}B_{jk}^{-1}=\delta_{ik}$。当 $|x_1|<0$ 时，

$x_1/\sqrt{(x_1^2-a^2)}$ 是纯虚数，所以式(5-28)给出 $\Sigma_{i2}=\Sigma_{0i}$ 满足边界条件。在右裂尖 $x_1=a$ 的局部坐标系(r,θ)中，当 $z_j\to a^+$ 时，$z_j-a=r(\cos\theta+\mu_j\sin\theta)$，$z_j+a=2a$，所以式(5-28)的渐近形式是

$$\begin{aligned}\Sigma_{i2}&=\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4}B_{ij}B_{jk}^{-1}\sqrt{\frac{1}{2\pi r}}\frac{\Sigma_{0k}\sqrt{\pi a}}{\sqrt{\cos\theta+\mu_j\sin\theta}}\\ \Sigma_{i1}&=-\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4}B_{ij}B_{kj}^{-1}\sqrt{\frac{1}{2\pi r}}\frac{\mu_j\Sigma_{0k}\sqrt{\pi a}}{\sqrt{\cos\theta+\mu_j\sin\theta}}\end{aligned}\qquad(5-29)$$

对比式(5-14)可见，裂尖的渐近解是一致的，且

$$\boldsymbol{K}=\boldsymbol{\Sigma}_0\sqrt{\pi a}\qquad(5-30)$$

由上式可见，在线性电弹性理论中，电场对机械应力强度因子没有影响，机械应力对电位移强度因子没有影响，这种情况是物理模型决定的，和实际情况并不符合。

2) *解法 2*

式(5-21)还可变换为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{h}^+(x_1)+\boldsymbol{h}^-(x_1)=\boldsymbol{\Sigma}_0(x_1),\quad \boldsymbol{h}(z)=\boldsymbol{BF}(z)\\ &h_i^+(x_1)+h_i^-(x_1)=\Sigma_{0i}(x_1)\end{aligned}\qquad(5-31)$$

采用和上面相同的方法，可得

$$\boldsymbol{h}(z)=\boldsymbol{Q}(z)\left[\boldsymbol{C}+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\Sigma_0(x_1)\mathrm{d}x_1}{\boldsymbol{Q}^+(x_1)(x_1-z)}\right],\ \boldsymbol{Q}(z)=\mathrm{diag}[Y_0(z)]\qquad(5-32)$$

当 $\boldsymbol{\Sigma}_0(x_1)=-\boldsymbol{\Sigma}_0$ 是常矢量和计及位移单值性条件时，可得

$$\boldsymbol{h}(z)=\boldsymbol{BF}(z)=\frac{1}{2}\left[-\boldsymbol{I}+\left\langle\frac{z}{\sqrt{(z^2-a^2)}}\right\rangle\right]\boldsymbol{\Sigma}_0\qquad(5-33)$$

由上式求得的 $\boldsymbol{h}(z)$是 z 平面上的解析函数，同时也是任一 z_j 平面上的解析函数，从而按下述方法求得 $\boldsymbol{F}(z_*)$的第 j 个分量是 z_j 平面上的解析函数。

$$\boldsymbol{F}(z_*)=[F_1(z_1),\cdots,F_4(z_4)]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{h}(z_*),\quad F_j(z_j)=B_{ji}^{-1}h_i(z_j),\ B_{ji}^{-1}=[\boldsymbol{B}^{-1}]_{ji}\qquad(5-34)$$

所以有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{BF}(z_*)=\boldsymbol{B}[\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{h}(z_*)]\\ &B_{ij}F_j(z_j)=B_{ij}B_{jk}^{-1}h_k(z_j)=\frac{1}{2}B_{ij}B_{jk}^{-1}\Sigma_{0k}\left[-1+z_j/\sqrt{(z_j^2-a^2)}\right]\end{aligned}\qquad(5-35)$$

上式和式(5-28)相同。应当注意，在同一个平面上有 $\boldsymbol{BF}(z)=\boldsymbol{B}[\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{h}(z)]=\boldsymbol{h}(z)$，但由于 $\boldsymbol{F}(z_*)$是 4 个平面上的函数，不是同一个平面上的函数，故 $\boldsymbol{BF}(z_*)=\boldsymbol{B}[\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{h}(z_*)]\neq\boldsymbol{h}(z_*)$。但在 x_1 轴上有 $x_{1j}=x_1$，所以 $\boldsymbol{BF}(x_1)=\boldsymbol{B}[\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{h}(x_1)]=\boldsymbol{h}(x_1)$。

下面讨论裂纹面上位移的间断值。引入符号

$$\boldsymbol{Y}=\mathrm{i}\boldsymbol{AB}^{-1},\quad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{Y}+\overline{\boldsymbol{Y}}=\mathrm{i}(\boldsymbol{AB}^{-1}-\overline{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{B}}^{-1})=2\mathrm{Re}(\mathrm{i}\boldsymbol{AB}^{-1})\qquad(5-36)$$

注意到在裂纹面上，按式(1-49)，当 $|x_{1j}|<a_j$ 时，有 $\sqrt{z_j^2-a^2}=\pm\mathrm{i}\sqrt{a_j^2-x_{1j}^2}$，从而由式(5-15)求出裂纹面上位移的间断值为

$$\mathrm{i}\boldsymbol{d}'(x_1)=\mathrm{i}\boldsymbol{A}[\boldsymbol{F}^+(x_1)-\boldsymbol{F}^-(x_1)]-\bar{\mathrm{i}}\bar{\boldsymbol{A}}[\overline{\boldsymbol{F}^+(x_1)}-\overline{\boldsymbol{F}^-(x_1)}]=$$

$$\boldsymbol{H}[\boldsymbol{h}^+(x_1)-\boldsymbol{h}^-(x_1)]=\mathrm{i}\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Sigma}_0\frac{x_1}{\sqrt{(a^2-x_1^2)}} \tag{5-37}$$

$$\boldsymbol{d}(x_1)=\sqrt{(a^2-x_1^2)}\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Sigma}_0=\frac{1}{\sqrt{\pi a}}\sqrt{(a^2-x_1^2)}\boldsymbol{H}\boldsymbol{K}$$

同时，在 $x_1>a$ 且无限接近 a 的轴上有

$$\boldsymbol{\Sigma}_2=\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}(x_1)+\bar{\boldsymbol{B}}\overline{\boldsymbol{F}(x_1)}=\left[-1+\frac{x_1}{\sqrt{(x_1^2-a^2)}}\right]\boldsymbol{\Sigma}_0\approx\frac{\boldsymbol{K}}{\sqrt{2\pi(x_1-a)}}$$

所以按式(1-28a)，裂纹扩展时的能量释放率为

$$\widetilde{G}=\lim_{\Delta\to0}\frac{1}{2\Delta}\int_0^\Delta\boldsymbol{\Sigma}_2^{\mathrm{T}}(\Delta-r,\ 0)\boldsymbol{d}(r,\ 0)\mathrm{d}r=\lim_{\Delta\to0}\frac{1}{2\Delta}\int_0^\Delta\frac{\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}}{\sqrt{2\pi(\Delta-r)}}\boldsymbol{H}\frac{\boldsymbol{K}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{2r}\,\mathrm{d}r=$$

$$\lim_{\Delta\to0}\frac{1}{2\pi\Delta}\int_0^\Delta\sqrt{\frac{r}{\Delta-r}}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{K}\mathrm{d}r=\frac{1}{2\pi}\int_0^1\sqrt{\frac{r/\Delta}{1-r/\Delta}}\mathrm{d}\frac{r}{\Delta}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{K}=\frac{1}{4}\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{K} \tag{5-38}$$

式中 $\boldsymbol{K}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H}\boldsymbol{K}$ 是矩阵记法。推导该式时利用了下列公式

$$\int_0^1x^q(1-x)^q\mathrm{d}x=\frac{q\pi}{\sin q\pi},\ \mathrm{Re}\,q<1 \tag{5-39}$$

5.2.2 共线绝缘裂

设在 x_1 轴上存在 n 个裂纹，其左端点记为 a_k，右端点记为 b_k，其集合记为 L_c(图 5-3)。显然，式(5-15)～(5-22)仍成立。和上面相类似，问题的解为

$$F_j(z_j)=Y_0(z_j)\left[C(z_j)+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\Sigma'_{0j}(x_1)\mathrm{d}x_1}{Y_0^+(x_1)(x_1-z_j)}\right],\quad Y_0(z_j)=\prod_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{(z_j-a_k)(z_j-b_k)}}$$

$$\boldsymbol{F}(z_*)=\boldsymbol{Q}(z_*)\left[\boldsymbol{C}(z_*)+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\boldsymbol{\Sigma}'_0(x_1)\mathrm{d}x_1}{\boldsymbol{Q}^+(x_1)(x_1-z_*)}\right],\quad \boldsymbol{Q}(z_*)=\langle Y_0(z_*)\rangle \tag{5-40}$$

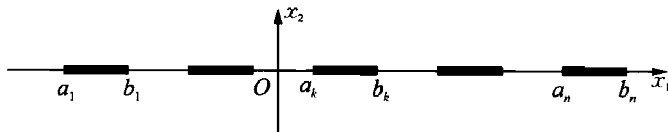


图 5-3 共线绝缘裂纹

上列诸式中 $Y_0(z_j)$ 是多值函数，为使其在全平面解析，需要取一单值分支，通常选取下述分支

$$\lim_{z\to\infty}[z_j^nY_0(z_j)]=1,\quad 或\ Y_0(z_j)=\frac{1}{z_j^n}+\frac{c}{z_j^{n+1}},\ z\to\infty \tag{5-41}$$

这相当于从最右端的裂纹的右端点沿 x_1 轴向左直至 $-\infty$ 作一割线。为使 $\boldsymbol{F}(z_*)$在无穷远处

解析，由式(5-40)推知，$\boldsymbol{C}(z_*)$的幂次不能超过裂纹的个数n，若要使$\boldsymbol{F}(\infty)=\mathbf{0}$，$\boldsymbol{C}(z_*)$的幂次不能超过$n-1$。

同时对于这类复连域问题，还要增加单值性条件：

$$\oint_{L_{cj}}\boldsymbol{U}\mathrm{d}L=\mathbf{0},\ j=1,\ 2,\cdots,\ n,\quad \sum_{j=1}^{n}L_{cj}=L_c \tag{5-42}$$

关于刚性夹杂等问题，将在下一章中和双材料问题一起讨论。

5.3 部分传导、部分绝缘的裂纹问题[59]

5.3.1 一般讨论

为确定起见，讨论位于x_1轴上的单个裂纹，左、右端点分别位于$-a$和$+a$，并记裂纹部分为L_c。在无穷远处作用有Σ_1^∞和Σ_2^∞。在裂纹尖端，电场和应力都很大。通常压电陶瓷强度高，塑性差，当外加应力场不很大，而电场较大时，尖端塑性区可近似地不予考虑，但置于空气中的装置，近裂尖区的空气隙往往被击穿而导电，导电后，由于电场强度降低，击穿部分又变成绝缘的，如此反复进行，形成电疲劳，原则上应是动态问题。本节只做简化静态模型的处理。这样，裂纹张开后，中间部分L_2是绝缘的，而近裂尖的裂纹区$L_1\cup L_3$是传导的(图5-4)，从而形成部分传导、部分绝缘的裂纹混合边值问题。本节采用分量表达式，裂纹面上的边界条件成为

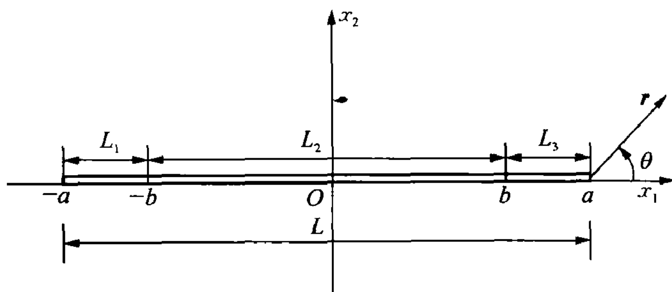


图5-4 部分绝缘、部分传导裂纹

$$\begin{aligned}&\sigma_{2j}^{\pm}(x_1,\ 0)=0,\quad E_1^{\pm}(x_1,\ 0)=0,\ x_1\in L_1\cup L_3\\&\sigma_{2j}^{\pm}(x_1,\ 0)=0,\quad D_2^{\pm}(x_1,\ 0)=0,\ x_1\in L_2\end{aligned} \tag{5-43}$$

假设裂纹面上无自由电荷，所以位移、电势和电位移的单值性要求

$$\begin{aligned}&\int_L[u_{j,1}^{+}(x_1,\ 0)-u_{j,1}^{-}(x_1,\ 0)]\mathrm{d}x_1=0,\quad \int_{L_2}[\varphi_{,1}^{+}(x_1,\ 0)-\varphi_{,1}^{-}(x_1,\ 0)]\mathrm{d}x_1=0\\&\int_{L_1}[D_2^{+}(x_1,\ 0)-D_2^{-}(x_1,\ 0)]\mathrm{d}x_1=0,\quad \int_{L3}[D_2^{+}(x_1,\ 0)-D_2^{-}(x_1,\ 0)]\mathrm{d}x_1=0\end{aligned} \tag{5-44}$$

利用式(4-19)、(4-24)和(4-25)和关系$\overline{\boldsymbol{F}^{+}(x_1)}=\overline{\boldsymbol{F}}^{-}(x_1)$，$\overline{\boldsymbol{F}^{-}(x_1)}=\overline{\boldsymbol{F}}^{+}(x_1)$，式(5-43)中的$E_1^{\mp}(x_1,\ 0)=\varphi_{,1}^{\pm}(x_1,\ 0)=0$化为

$$\sum_{\alpha}A_{4\alpha}F_{\alpha}^{\pm}(x_1)+\sum_{\alpha}\overline{A}_{4\alpha}\overline{F}_{\alpha}^{\mp}(x_1)=0,\ x_1\in L_1\cup L_3 \tag{5-45}$$

式中 α 取值 1～4。式(5-43)中的其余三式可化为

$$\Sigma_{2J}^{+}(x_1)+\Sigma_{2J}^{-}(x_1)=\sum_{\alpha}(B_{J\alpha}F_{\alpha}^{+}+\overline{B}_{J\alpha}\overline{F}_{\alpha}^{+}+\overline{B}_{J\alpha}\overline{F}_{\alpha}^{-}+B_{J\alpha}F_{\alpha}^{-})=s_1(x_1)\delta_{4J}$$

$$\Sigma_{2J}^{+}(x_1)-\Sigma_{2J}^{-}(x_1)=\sum_{\alpha}(B_{J\alpha}F_{\alpha}^{+}-\overline{B}_{J\alpha}\overline{F}_{\alpha}^{+}+\overline{B}_{J\alpha}\overline{F}_{\alpha}^{-}-B_{J\alpha}F_{\alpha}^{-})=s_2(x_1)\delta_{4J} \tag{5-46}$$

$$s_1(x_1)=\begin{cases}0,\ x_1\in L_2,\\ D_2^{+}+D_2^{-},\ x_1\in L_1\cup L_3,\end{cases}\qquad s_2(x_1)=\begin{cases}0,\ x_1\in L_2,\\ D_2^{+}-D_2^{-},\ x_1\in L_1\cup L_3\end{cases}$$

式中 $s_1(x_1)$和 $s_2(x_1)$是待求的函数,这是因为在区域 $x_1\in L_1\cup L_3$ 上 D_2 是未知的,这也是裂纹部分传导模型区别于完全绝缘裂纹的地方。式(5-44)化为

$$\int_{L}\sum_{\alpha}\mathrm{Re}\{A_{j\alpha}[F_{\alpha}^{+}(x_1)-F_{\alpha}^{-}(x_1)]\}\mathrm{d}x_1=0,\quad \int_{L_2}\sum_{\alpha}\mathrm{Re}\{A_{4\alpha}[F_{\alpha}^{+}(x_1)-F_{\alpha}^{-}(x_1)]\}\mathrm{d}x_1=0$$

$$\int_{L1}\sum_{\alpha}\mathrm{Re}\{B_{4\alpha}[F_{\alpha}^{+}(x_1)-F_{\alpha}^{-}(x_1)]\}\mathrm{d}x_1=0,\quad \int_{L_3}\sum_{\alpha}\mathrm{Re}\{B_{4\alpha}[F_{\alpha}^{+}(x_1)-F_{\alpha}^{-}(x_1)]\}\mathrm{d}x_1=0 \tag{5-47}$$

本节中大写英文字母和希腊字母取值 1～4,小写英文字母取值 1～3。为下面讨论需要,引入下列函数

$$X_a(z)=\frac{1}{\sqrt{z^2-a^2}},\quad X_b(z)=\frac{1}{\sqrt{z^2-b^2}},\quad X_{ab}(z)=X_a(z)X_b(z) \tag{5-48}$$

取下述单值分支:当 $z\to\infty$ 时,$\sqrt{z^2-a^2}\to z$,$\sqrt{z^2-b^2}\to z$,从而在裂纹的上下面有

$$\begin{aligned}
&X_b^{\pm}(x_1)=\frac{-1}{\sqrt{x_1^2-b^2}},\quad X_{ab}^{\pm}(x_1)=\frac{\pm\mathrm{i}}{\sqrt{(a^2-x_1^2)(x_1^2-b^2)}},\ x_1\in L_1\\
&X_b^{\pm}(x_1)=\frac{\mp\mathrm{i}}{\sqrt{x_1^2-b^2}},\quad X_{ab}^{\pm}(x_1)=\frac{-1}{\sqrt{(a^2-x_1^2)(b^2-x_1^2)}},\ x_1\in L_2\\
&X_b^{\pm}(x_1)=\frac{1}{\sqrt{x_1^2-b^2}},\quad X_{ab}^{\pm}(x_1)=\frac{\mp\mathrm{i}}{\sqrt{(a^2-x_1^2)(x_1^2-b^2)}},\ x_1\in L_3\\
&X_a^{\pm}(x_1)=\frac{\mp\mathrm{i}}{\sqrt{a^2-x_1^2}},\ x_1\in L
\end{aligned} \tag{5-49}$$

5.3.2 Riemann-Hilbert 混合边值问题的解

式(5-46)构成非齐次的 Riemann-Hilbert 边值问题,其解可以设成

$$\sum_{\alpha}[B_{J\alpha}F_{\alpha}(z)+\overline{B}_{J\alpha}\overline{F}_{\alpha}(z)]=X_a(z)S_{1J}(z)+X_a(z)(\beta_{0J}+\beta_{1J}z)$$

$$\sum_{\alpha}[B_{J\alpha}F_{\alpha}(z)-\overline{B}_{J\alpha}\overline{F}_{\alpha}(z)]=S_{2J}(z)+\mathrm{i}\beta_{2J}z \tag{5-50}$$

$$S_{1J}(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L}\frac{s_1(t)\delta_{4J}}{X_a^{+}(t)(t-z)}\mathrm{d}t,\ S_{2J}(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L}\frac{s_2(t)\delta_{4J}}{t-z}\mathrm{d}t$$

式中 β_{0J},β_{1J}和 β_{2J} 是实常数。$S_{1J}(z)$,$S_{2J}(z)$是除裂纹外的 z 平面上的解析函数。利用

Сохоцкий—Plemelj 公式(1-70)，由式(5-50)的第三和第四式可求得

$$S_{1J}^{+}(x_1)+S_{1J}^{-}(x_1)=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{s_1(t)\delta_{4J}}{X_\alpha^{+}(t)(t-x_1)}\mathrm{d}t,\quad S_{1J}^{+}(x_1)-S_{1J}^{-}(x_1)=\frac{s_1(x_1)\delta_{4J}}{X_\alpha^{+}(x_1)}$$

$$S_{2J}^{+}(x_1)+S_{2J}^{-}(x_1)=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{s_2(t)\delta_{4J}}{t-x_1}\mathrm{d}t,\quad S_{2J}^{+}(x_1)-S_{2J}^{-}(x_1)=s_2(x_1)\delta_{4J}$$

(5-51)

由式(5-50)的头两式可解得

$$F_\alpha(z)=B_{\alpha J}^{-1}[X_\alpha(z)S_{1J}(z)+S_{2J}(z)+X_\alpha(z)(\beta_{0J}+\beta_{1J}z)+\mathrm{i}\beta_{2J}] \tag{5-52}$$

式中 $B_{\alpha J}^{-1}$是矩阵$[B_{J\alpha}]^{-1}$的元，$B_{\alpha J}^{-1}=[\boldsymbol{B}^{-1}]_{\alpha J}$。利用无穷远处的边界条件，可求得 β_{1J}，β_{2J}

$$\Sigma_{2J}^{\infty}=2\mathrm{Re}[\sum_{\alpha=1}^{4}B_{J\alpha}F_\alpha(\infty)]=\mathrm{Re}(\beta_{1J}+\mathrm{i}\beta_{2J})=\beta_{1J}$$

$$\Sigma_{1J}^{\infty}=-2\mathrm{Re}[\sum_{\alpha=1}^{4}B_{J\alpha}\mu_\alpha F_\alpha(\infty)]=-\mathrm{Re}[\sum_{\alpha=1}^{4}B_{J\alpha}\mu_\alpha B_{\alpha K}^{-1}(\beta_{1K}+\mathrm{i}\beta_{2K})]$$

(5-53)

由式(5-52)又可获得

$$F_\alpha^{+}(x_1)+F_\alpha^{-}(x_1)=\frac{1}{2}B_{\alpha J}^{-1}[X_\alpha^{+}(x_1)(S_{1J}^{+}-S_{1J}^{-})+S_{2J}^{+}+S_{2J}^{-}+2\mathrm{i}\beta_{2J}]$$

$$F_\alpha^{+}(x_1)-F_\alpha^{-}(x_1)=\frac{1}{2}B_{\alpha J}^{-1}[X_\alpha^{+}(x_1)(S_{1J}^{+}+S_{1J}^{-})+S_{2J}^{+}-S_{2J}^{-}+2X_\alpha^{+}(\beta_{0J}+\beta_{1J}x_1)]$$

(5-54)

下面研究和电势导数相关的方程，这是此类问题求解的关键。由式(5-45)得

$$\mathrm{Re}\sum_\alpha A_{4\alpha}[F_\alpha^{+}(x_1)+F_\alpha^{-}(x_1)]=0,\quad \mathrm{Re}\sum_\alpha A_{4\alpha}[F_\alpha^{+}(x_1)-F_\alpha^{-}(x_1)]=0,\ x_1\in L_1\cup L_3$$

(5-55)

利用恒等式

$$\mathrm{Re}\sum_\alpha A_{J\alpha}(F_\alpha^{+}\pm F_\alpha^{-})=\sum_\alpha\sum_\beta\mathrm{Re}[A_{J\alpha}B_{\alpha K}^{-1}B_{K\beta}(F_\beta^{+}\pm F_\beta^{-})]=\mathrm{Im}\sum_\alpha Y_{JK}B_{K\alpha}(F_\alpha^{+}\pm F_\alpha^{-})$$

(5-56)

和式(4-36)一样，上式中引入了 $\boldsymbol{Y}=\mathrm{i}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}$，$Y_{IJ}=\sum_\alpha \mathrm{i}A_{I\alpha}B_{\alpha J}^{-1}$，下面还引入 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{Y}+\bar{\boldsymbol{Y}}$。由式(5-53)和(5-55)，得

$$\mathrm{Im}\{Y_{4J}[X_\alpha^{+}(x_1)(S_{1J}^{+}-S_{1J}^{-})+S_{2J}^{+}+S_{2J}^{-}+2\mathrm{i}\beta_{2J}]\}=0,\ x_1\in L_1\cup L_3$$

$$\mathrm{Im}\{Y_{4J}[X_\alpha^{+}(x_1)(S_{1J}^{+}+S_{1J}^{-})+S_{2J}^{+}-S_{2J}^{-}+2X_\alpha^{-}(\beta_{0J}+\beta_{1J}x_1)]\}=0,\ x_1\in L_1\cup L_3$$

(5-57)

利用式(5-51)，上式可化为

$$\mathrm{Im}\left\{Y_{44}\left[s_1(x_1)+\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{s_2(t)}{t-x_1}\mathrm{d}t\right]+2\mathrm{i}Y_{4J}\beta_{2J}\right\}=0,\ x_1\in L_1\cup L_3$$

$$\mathrm{Im}\left[Y_{44}X_\alpha^{-}(x_1)\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{s_1(t)}{X_\alpha^{+}(t)(t-x_1)}\mathrm{d}t+2Y_{4J}X_\alpha^{+}(x_1)(\beta_{0J}+\beta_{1J}x_1)\right]=0,\ x_1\in L_1\cup L_3$$

(5-58)

对于通常遇到的材料，Y_{44}是实数，所以上式中的 $s_1(x_1)$，$s_2(x_1)$是解耦的，即有

$$\begin{aligned}&\frac{H_{44}}{\pi i}\int_L \frac{s_2(t)}{t-x_1}dt+2iH_{4J}\beta_{2J}=0,\ x_1\in L_1\cup L_3\\&\frac{H_{44}}{\pi i}\int_L \frac{s_1(t)}{X_a^+(t)(t-x_1)}dt+2H_{4J}X_a^+(\beta_{0J}+\beta_{1J}x_1)=0,\ x_1\in L_1\cup L_3\end{aligned}\tag{5-59}$$

5.3.3 D_2 的假设和其中待定系数的确定

为了进一步求解，预设 D_2 具有下列形式，其正确性将由最后的结果来证明。设

$$D_2(z)=\mathrm{Re}[C_{ab}(z)X_{ab}(z)+C_a(z)X_a(z)+C_b(z)X_b(z)]+C\tag{5-60}$$

式中 $C_{ab}(z)$等是 z 的不超过二次的多项式，C 为实常数。由式(5-60)、(5-46)和(5-49)可导出

$$\begin{aligned}&s_1(x_1)=2(\gamma_5+\gamma_6x_1)X_b^+(x_1)+2C\\&s_2(x_1)=2i(\gamma_0+\gamma_1x_1+\gamma_2x_1^2)X_{ab}^+(x_1)+2i(\gamma_3+\gamma_4x_1)X_a^+(x_1),\ x_1\in L_1\cup L_3\end{aligned}\tag{5-61}$$

式中 $\gamma_k(k=0\sim6)$ 设为实常数。把上式代入奇异积分方程式(5-59)，并利用下列积分公式

$$\int_L \frac{X_{ab}^+(x_1)}{x_1-z}dx_1=\int_{L_1\cup L_3}\frac{X_{ab}^+(x_1)}{x_1-z}dx_1=\pi iX_{ab}(z)$$

$$\int_L \frac{x_1X_{ab}^+(x_1)}{x_1-z}dx_1=\int_{L_1\cup L_3}\frac{x_1X_{ab}^+(x_1)}{x_1-z}dx_1=\pi izX_{ab}(z)$$

$$\int_L \frac{x_1^2X_{ab}^+(x_1)}{x_1-z}dx_1=\int_{L_1\cup L_3}\frac{x_1^2X_{ab}^+(x_1)}{x_1-z}dx_1=\pi i[z^2X_{ab}(z)-1]$$

$$\int_L \frac{X_b^+(x_1)}{(x_1-z)X_a^+(x_1)}dx_1=\int_{L_1\cup L_3}\frac{X_b^+(x_1)}{(x_1-z)X_a^+(x_1)}dx_1=\pi i\left[\frac{X_b(z)}{X_a(z)}-1\right]$$

$$\int_L \frac{x_1X_b^+(x_1)}{(x_1-z)X_a^+(x_1)}dx_1=\int_{L_1\cup L_3}\frac{x_1X_b^+(x_1)}{(x_1-z)X_a^+(x_1)}dx_1=\pi iz\left[\frac{X_b(z)}{X_a(z)}-1\right]$$

当 $t\in L_1\cup L_3$ 时有

$$\int_L \frac{X_{ab}^+(x_1)}{x_1-t}dx_1=\int_{L_1\cup L_3}\frac{X_{ab}^+(x_1)}{x_1-t}dx_1=0,\quad \int_L \frac{x_1X_{ab}^+(x_1)}{x_1-t}dx_1=\int_{L_1\cup L_3}\frac{x_1X_{ab}^+(x_1)}{x_1-t}dx_1=0$$

$$\int_L \frac{x_1^2X_{ab}^+(x_1)}{x_1-t}dx_1=\int_{L_1\cup L_3}\frac{x_1^2X_{ab}^+(x_1)}{x_1-t}dx_1=-\pi i$$

$$\int_L \frac{X_b^+(x_1)}{(x_1-t)X_a^+(x_1)}dx_1=\int_{L_1\cup L_3}\frac{X_b^+(x_1)}{(x_1-t)X_a^+(x_1)}dx_1=-\pi i$$

$$\int_L \frac{x_1X_b^+(x_1)}{(x_1-t)X_a^+(x_1)}dx_1=\int_{L_1\cup L_3}\frac{x_1X_b^+(x_1)}{(x_1-t)X_a^+(x_1)}dx_1=\pi it$$

当 $t\in L_2$ 时有

$$\int_L \frac{X_{ab}^{+}(x_1)}{x_1 - t}\mathrm{d}x_1 = \int_{L_1 \cup L_3} \frac{X_{ab}^{+}(x_1)}{x_1 - t}\mathrm{d}x_1 = \pi \mathrm{i} X_{ab}^{+}(t)$$

$$\int_L \frac{x_1 X_{ab}^{+}(x_1)}{x_1 - t}\mathrm{d}x_1 = \int_{L_1 \cup L_3} \frac{x_1 X_{ab}^{+}(x_1)}{x_1 - t}\mathrm{d}x_1 = \pi \mathrm{i} t X_{ab}^{+}(t)$$

$$\int_L \frac{x_1^2 X_{ab}^{+}(x_1)}{x_1 - t}\mathrm{d}x_1 = \int_{L_1 \cup L_3} \frac{x_1^2 X_{ab}^{+}(x_1)}{x_1 - t}\mathrm{d}x_1 = \pi \mathrm{i}[t^2 X_{ab}^{+}(t) - 1]$$

$$\int_L \frac{X_b^{+}(x_1)}{(x_1 - t)X_a^{+}(x_1)}\mathrm{d}x_1 = \int_{L_1 \cup L_3} \frac{X_b^{+}(x_1)}{(x_1 - t)X_a^{+}(x_1)}\mathrm{d}x_1 = \pi \mathrm{i}\left[\frac{X_b^{+}(t)}{X_a^{+}(t)} - 1\right]$$

$$\int_L \frac{x_1 X_b^{+}(x_1)}{(x_1 - t)X_a^{+}(x_1)}\mathrm{d}x_1 = \int_{L_1 \cup L_3} \frac{x_1 X_b^{+}(x_1)}{(x_1 - t)X_a^{+}(x_1)}\mathrm{d}x_1 = -\pi \mathrm{i} t$$

积出奇异积分项，便得

$$-H_{44}\gamma_2 + \frac{H_{44}}{\pi \mathrm{i}}\int_{L_1 \cup L_3} \frac{(\gamma_3 + \gamma_4 t)X_a^{+}(t)}{t - x_1}\mathrm{d}t + H_{4J}\beta_{2J} = 0,\ t \in L_1 \cup L_3$$

$$-H_{44}(\gamma_5 + \gamma_6 t) + \frac{H_{44}}{\pi \mathrm{i}}\int_{L_1 \cup L_3} \frac{C}{X_a^{+}(t)(t - x_1)}\mathrm{d}t + H_{4J}X_a^{+}(\beta_{0J} + \beta_{1J}x_1) = 0 \tag{5-62}$$

上式中的积分项是可以积出的，但太繁，故未写出。因为对任何 x_1 上式都成立，所以有

$$C = 0,\quad \gamma_3 = \gamma_4 = 0,\quad \gamma_2 = \frac{H_{4J}\beta_{2J}}{H_{44}},\quad \gamma_5 = \frac{H_{4J}\beta_{0J}}{H_{44}},\quad \gamma_6 = \frac{H_{4J}\beta_{1J}}{H_{44}} \tag{5-63}$$

利用式(5-46)中 $s_1(x_1)$，$s_2(x_1)$、式(5-51)中 $S_{1J}^{\pm}(x_1)$，$S_{2J}^{\pm}(x_1)$ 和式(5-49)以及奇异积分的公式，式(5-53)可以化为

$$\sum_\alpha B_{J\alpha}(F_\alpha^{+} - F_\alpha^{-}) = X_a^{+}(x_1)[-\delta_{4J}(\gamma_5 + \gamma_6 x_1) + \mathrm{i}\delta_{4J}(\gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_1^2)X_b^{+}(x_1) + (\beta_{0J} + \beta_{1J}x_1)],\ x_1 \in L_1 \cup L_3$$

$$\sum_\alpha B_{J\alpha}(F_\alpha^{+} - F_\alpha) = X_a^{+}(x_1)\left[\delta_{4J}(\gamma_5 + \gamma_6 x_1)\left(\frac{X_b^{+}(x_1)}{X_a^{+}(x_1)} - 1\right) + (\beta_{0J} + \beta_{1J}x_1)\right],\ x_1 \in L_2 \tag{5-64}$$

由上式中的第一式，得

$$\mathrm{Re}\sum_\alpha B_{4\alpha}(F_\alpha^{+} - F_\alpha^{-}) = \mathrm{Re}[\mathrm{i}(\gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_1^2)X_a^{+}(x_1)X_b^{+}(x_1)],\ x_1 \in L_1 \cup L_3 \tag{5-65}$$

把上式代入式(5-47)中的第三和第四式（裂纹传导表面无自由电荷条件），得

$$\int_{-a}^{-b} \frac{\gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_1^2}{\sqrt{(a^2 - x_1^2)(x_1^2 - b^2)}}\mathrm{d}x_1 = 0,\quad \int_b^a \frac{\gamma_0 + \gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_1^2}{\sqrt{(a^2 - x_1^2)(x_1^2 - b^2)}}\mathrm{d}x_1$$

由此推出

$$\gamma_1 = 0, \quad \gamma_0 = -\gamma_2 \frac{\mathrm{I}_2}{\mathrm{I}_1}$$

$$\mathrm{I}_2 = \int_b^a \frac{x_1^2}{\sqrt{(a^2 - x_1^2)(x_1^2 - b^2)}} \mathrm{d}x_1, \quad \mathrm{I}_1 = \int_b^a \frac{1}{\sqrt{(a^2 - x_1^2)(x_1^2 - b^2)}} \mathrm{d}x_1 \tag{5-66}$$

式中 I_1，I_2 是两个椭圆积分。由式(5－56)和(5－64)，可得

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\sum_\alpha A_{J\alpha}[F_\alpha^+ - F_\alpha] = \mathrm{Im}\{&X_a^+(x_1)[-Y_{J4}(\gamma_5 + \gamma_6 x_1) + \mathrm{i}Y_{J4}(\gamma_0 + \gamma_2 x_1^2)X_b^+(x_1) + \\ &Y_{JK}(\beta_{0K} + \beta_{1K}x_1)]\} = \\ &\frac{1}{2\mathrm{i}}X_a^+(x_1)[-H_{J4}(\gamma_5 + \gamma_6 x_1) + \mathrm{i}(Y_{J4} - \overline{Y}_{J4})(\gamma_0 + \gamma_2 x_1^2)X_b^+(x_1) + \\ &H_{JK}(\beta_{0K} + \beta_{1K}x_1)], \ x_1 \in L_1 \cup L_3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\sum_\alpha A_{J\alpha}[F_\alpha^+ - F_\alpha^-] = \mathrm{Im}&\left\{X_a^+(x_1)\left[Y_{J4}(\gamma_5 + \gamma_6 x_1)\left(\frac{X_b^+(x_1)}{X_a^+(x_1)} - 1\right) + Y_{JK}(\beta_{0K} + \beta_{1K}x_1)\right]\right\} = \\ &\frac{1}{2\mathrm{i}}X_a^+(x_1)\left\{H_{J4}(\gamma_5 + \gamma_6 x_1)\left[\frac{X_b^+(x_1)}{X_a^+(x_1)} - 1\right] + H_{JK}(\beta_{0K} + \beta_{1K}x_1)\right\}, \ x_1 \in L_2\end{aligned} \tag{5-67}$$

把上式中的第二式代入裂纹绝缘部分电势单值性条件式(5－47)中的第二式，便得

$$\begin{aligned}&\int_{L_2} X_a^+(x_1)\left\{H_{44}(\gamma_5 + \gamma_6 x_1)\left[\frac{X_b^+(x_1)}{X_a^+(x_1)} - 1\right] + H_{4K}(\beta_{0K} + \beta_{1K}x_1)\right\}\mathrm{d}x_1 = \\ &\int_{L_2} \{H_{44}\gamma_5[X_b^+(x_1) - X_a^+(x_1)] + X_a^+(x_1)H_{4K}\beta_{0K}\}\mathrm{d}x_1 = \\ &\int_{L_2} [H_{44}\gamma_5 X_b^+(x_1)]\mathrm{d}x_1 = 0\end{aligned} \tag{5-68}$$

推导上式时，已经应用了 $x_1X_a^+(x_1)$是奇函数和 $\gamma_5 = H_{4J}\beta_{0J}/H_{44}$（见式(5－63)）的性质。由此推出

$$\gamma_5 = H_{4J}\beta_{0J}/H_{44} = 0 \tag{5-69}$$

利用式(5－64)，位移单值性条件式(5－47)中的第一式为

$$\begin{aligned}&\int_{L_1 \cup L_3} X_a^+(x_1)[-H_{J4}(\gamma_5 + \gamma_6 x_1) + \mathrm{i}(Y_{J4} - \overline{Y}_{J4})(\gamma_0 + \gamma_2 x_1^2)X_b^+(x_1) + \\ &\quad H_{JK}(\beta_{0K} + \beta_{1K}x_1)]\mathrm{d}x_1 + \int_{L_2} X_a^+(x_1)[-H_{J4}(\gamma_5 + \gamma_6 x_1) + H_{JK}(\beta_{0K} + \beta_{1K}x_1)]\mathrm{d}x_1 = \\ &\int_{L_1 \cup L_3} X_a^+(x_1)[-H_{J4}\gamma_6 x_1 + H_{JK}(\beta_{0K} + \beta_{1K}x_1)]\mathrm{d}x_1 + \\ &\quad \int_{L_2} X_a^+(x_1)[-H_{J4}(\gamma_5 + \gamma_6 x_1) + H_{JK}(\beta_{0K} + \beta_{1K}x_1)]\mathrm{d}x_1 = \\ &\int_L X_a^+(x_1)[H_{JK}\beta_{0K}]\mathrm{d}x_1 = 0\end{aligned} \tag{5-70}$$

推导上式时已应用了 $\gamma_5 = 0$，$\gamma_6 = H_{4J}\beta_{1J}/H_{44}$ 和 $\int_{L_1 \cup L_3} X_a^+(x_1)(\gamma_0 + \gamma_2 x_1^2)X_b^+(x_1)\mathrm{d}x_1 = 0$。由于 $\boldsymbol{H}$ 为非奇异矩阵和 $\gamma_5 = 0$，故由上式推出

$$\beta_{0K} = 0 \tag{5-71}$$

至此,所有的待定常数均已求出。由式(5-61)和(5-50),可求得

$$S_{1J}(z)=\frac{\delta_{4J}}{2\pi i}\int_L\frac{2(\gamma_5+\gamma_6 x_1)X_b^+(x_1)}{X_a^+(x_1)(x_1-z)}dx_1=\delta_{4J}\gamma_6 z\left[\frac{X_b(z)}{X_a(z)}-1\right]$$
$$S_{2J}(z)=\frac{\delta_{4J}}{2\pi i}\int_L\frac{2i(\gamma_0+\gamma_1 x_1+\gamma_2 x_1^2)X_{ab}^+(x_1)}{x_1-z}dx_1=\delta_{4J}[i(\gamma_0+\gamma_2 z^2)X_{ab}(z)-i\gamma_2] \tag{5-72}$$

5.3.4 解的最终形式

最终解式(5-52)可以写成

$$F_a(z)=\frac{1}{2}B_{a4}^{-1}\{\gamma_6 z[X_b(z)-X_a(z)]+i(\gamma_0+\gamma_2 z^2)X_{ab}(z)-i\gamma_2\}+\frac{1}{2}B_{aJ}^{-1}[\beta_{1J}zX_a(z)+i\beta_{2J}] \tag{5-73}$$

易于验证,解式(5-73)满足所有的边界条件和单值性条件,故是正确解。

通过极限分析,易于证明,当裂纹绝缘部分长度 $b=0$ 时,有 $\gamma_0=0$,绝缘部分长度 $b=a$ 时,有 $\gamma_0=-a^2\gamma_2$,从而本节给出的解在这两种情形都可以退化到传导裂纹和绝缘裂纹的解。

5.3.5 裂纹尖端场

现在讨论工程上关心的裂纹尖端场,不失一般性,下面只讨论右裂尖场。根据已有分析,平行裂纹的电场不影响绝缘裂纹裂尖场,相反,垂直裂纹的电场不影响传导裂纹的裂尖场;同时绝缘裂纹的电场强度因子用接近裂尖的 $D_2(x_1, 0)$ 来刻画,传导裂纹的电场强度因子用接近裂尖的 $E_1(x_1, 0)$ 来刻画,所以只讨论裂尖近旁的 $E_1(x_1, 0)$ 和 $D_2(x_1, 0)$。

对于部分传导、部分绝缘的裂纹问题,裂纹右端存在两个奇点:$(a, 0)$ 和 $(b, 0)$,所以采用两套极坐标系,原点在 $(a, 0)$ 的用 (r, θ);原点在 $(b, 0)$ 的用 (r_b, θ_b)。由式(5-73),可求得

$$\sigma_{2j}(x_1)=\frac{\beta_{1j}x_1}{\sqrt{x_1^2-a^2}}=\frac{\sigma_{2j}^{\infty}x_1}{\sqrt{x_1^2-a^2}}$$
$$D_2(x_1)=\frac{H_{4j}\sigma_{2j}^{\infty}x_1}{H_{44}}\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2-b^2}}-\frac{1}{\sqrt{x_1^2-a^2}}\right)+\frac{D_2^{\infty}x_1}{\sqrt{x_1^2-b^2}} \tag{5-74}$$
$$E_1(x_1)=\frac{\beta_{2J}H_{4J}(I_2/I_1-x_1^2)}{2\sqrt{(x_1^2-b^2)(x_1^2-a^2)}}-\mathrm{Im}(Y_{4j})\frac{\sigma_{2j}^{\infty}x_1}{\sqrt{x_1^2-a^2}}$$

由上式知,应力强度因子总是可以定义为

$$K_{\mathrm{II}}=\sqrt{\pi a}\sigma_{21}^{\infty},\quad K_{\mathrm{I}}=\sqrt{\pi a}\sigma_{22}^{\infty},\quad K_{\mathrm{III}}=\sqrt{\pi a}\sigma_{23}^{\infty} \tag{5-75}$$

但是裂尖的电位移和电场分布较为复杂。令 $\delta=a-b$,可分三种情况来讨论。

情形(1):$r\ll\delta$,此时 $x_1=b$ 的奇异场不影响物理裂纹顶点 $x_1=a$ 的渐近场,所以电位移和电场强度因子与传导裂纹相同,即

$$K_{\mathrm{D}}=\lim_{r\to 0}\sqrt{2\pi r}D_2(r,\ 0)=-H_{4j}\sigma_{2j}^{\infty}\ \sqrt{\pi a}/H_{44}$$

$$K_{\mathrm{E}}=\lim_{r\to 0}\sqrt{2\pi r}E_1(r,\ 0)=\frac{\beta_{2J}H_{4J}\sqrt{\pi}\,(\mathrm{I}_2/\mathrm{I}_1-a^2)}{2\sqrt{a(a^2-b^2)}}-\sigma_{2j}^{\infty}\ \sqrt{\pi a}\,\mathrm{Im}(Y_{4j}) \tag{5-76}$$

情形(2)：$r\gg\delta$，此时 $x_1=b$ 和物理裂纹顶点 $x_1=a$ 可以处理成一个点，所以电位移和电场强度因子与绝缘裂纹相同，即

$$K_{\mathrm{D}}=\lim_{r\to 0}\sqrt{2\pi r}D_2(r,\ 0)=D_2\sqrt{\pi a}$$

$$K_{\mathrm{E}}=\lim_{r\to 0}\sqrt{2\pi r}E_1(r,\ 0)=-\sigma_{2j}^{\infty}\sqrt{\pi a}\,\mathrm{Im}(Y_{4j}) \tag{5-77}$$

情形(3)：$r\sim\delta$，此时 $x_1=b$ 和物理裂纹顶点 $x_1=a$ 处相互影响，电位移和电场强度因子同时依赖于 r 和 δ。强度因子值从绝缘裂纹的过渡到传导裂纹的值。

为确定起见，讨论横观各向同性压电体。按极化方向不同，又区分为两种情况。

1) **极化沿 x_2 方向**

此时材料常数矩阵只保留第 1，2，4 行和 1，2，4 列，即

$$\boldsymbol{H}=2\begin{bmatrix}1/C_L & 0 & 0\\ 0 & 1/C_T & 1/e\\ 0 & 1/e & -1/\epsilon\end{bmatrix},\quad \mathrm{Im}[\boldsymbol{Y}]=\begin{bmatrix}0 & \psi & -\varsigma\\ -\psi & 0 & 0\\ \varsigma & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{5-78}$$

式中 C_L，C_T，e，ϵ，ψ，ς是一些正的材料常数，C_L，C_T，ψ^{-1}具有量纲 $\mathrm{N/m^2}$，e，ς^{-1}具有量纲 $\mathrm{C/m^2}$，ϵ具有量纲 $\mathrm{F/m}=\mathrm{C^2/N\cdot m^2}$。对于横观各向同性压电体，式(5-74)中的 D_2 和 E_1 化为

$$D_2(x_1)=\frac{\epsilon\sigma_{22}^{\infty}x_1}{e}\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2-a^2}}-\frac{1}{\sqrt{x_1^2-b^2}}\right)+\frac{D_2^{\infty}\ x_1}{\sqrt{x_1^2-b^2}}$$

$$E_1(x_1)=\frac{x_1^2-\mathrm{I}_2/\mathrm{I}_1}{\sqrt{(x_1^2-b^2)(x_1^2-a^2)}}\ \frac{\beta_{24}}{2\epsilon}-\varsigma\frac{\sigma_{21}^{\infty}x_1}{\sqrt{x_1^2-a^2}} \tag{5-79}$$

2) **极化沿 x_1 方向**

此时材料常数矩阵为

$$\boldsymbol{H}=2\begin{bmatrix}1/C_T & 0 & 1/e\\ 0 & 1/C_L & 0\\ 1/e & 0 & -1/\epsilon\end{bmatrix},\quad \mathrm{Im}[\boldsymbol{Y}]=\begin{bmatrix}0 & \psi & 0\\ -\psi & 0 & \varsigma\\ 0 & -\varsigma & 0\end{bmatrix} \tag{5-80}$$

从而有

$$D_2(x_1)=\frac{\epsilon\sigma_{22}^{\infty}\ x_1}{e}\left(\frac{1}{\sqrt{x_1^2-a^2}}-\frac{1}{\sqrt{x_1^2-b^2}}\right)+\frac{D_2^{\infty}x_1}{\sqrt{x_1^2-b^2}}$$

$$E_1(x_1)=\frac{x_1^2-\mathrm{I}_2/\mathrm{I}_1}{\sqrt{(x_1^2-b^2)(x_1^2-a^2)}}\left(\frac{\beta_{24}}{2\epsilon}-\frac{\beta_{21}}{2e}\right)+\varsigma\frac{\sigma_{22}^{\infty}x_1}{\sqrt{x_1^2-a^2}} \tag{5-81}$$

当 $b=a$ 时，$\mathrm{I}_2/\mathrm{I}_1=a^2$；当 $b=0$ 时，$\mathrm{I}_2/\mathrm{I}_1=0$。式(5-79)、(5-81)分别与绝缘和传导裂纹相同。

5.3.6 能量释放率和 J 积分

把式(1-28)中的 $\boldsymbol{\Sigma}$ 和 $\boldsymbol{u}$ 理解为广义应力和广义位移,能量释放率 $\widetilde{G}$ 的公式便可推广到压电体,其具体形式是:当坐标原点取在虚扩展后的裂纹尖点时为

$$\widetilde{G}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{2\Delta}\int_0^{\Delta}\{\sigma_{2j}(\Delta-r)[u_j^{+}(r)-u_j^{-}(r)]+D_2(\Delta-r)[\varphi^{+}(r)-\varphi^{-}(r)]\}\mathrm{d}r \tag{5-82a}$$

当坐标原点取在虚扩展前的裂纹尖点时为

$$\begin{aligned}\widetilde{G}=\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{2\Delta}\int_0^{\Delta}\{&\sigma_{2j}(r_1)[u_j^{+}(\Delta-r_1)-u_j^{-}(\Delta-r_1)]+\\&D_2(\Delta-r_1)[\varphi^{+}(\Delta-r_1)-\varphi^{-}(\Delta-r_1)]\}\mathrm{d}r\end{aligned} \tag{5-82b}$$

由式(3-120)知,J 积分为

$$J=\int_{\Gamma}(Un_1-n_i\sigma_{ip}u_{p,1}-n_iD_i\varphi_{,1})\mathrm{d}l \tag{5-83}$$

式中 Γ 是围绕裂尖的端点中止在裂纹面上的围线,U 是应变能,n_i 是围线的外法线。当 J 积分只包含 $x_1=a$ 一个奇点时,视载荷情况,J 积分值随 b/a 的增加而降低或不变,当 $b/a\to 0$ 时接近传导裂纹的值;当 J 积分包含 $x_1=a$ 和 $x_1=b$ 两个奇点时,视载荷情况,J 积分值随 b/a 的增加而不变或降低,当 $b/a\to 1$ 时接近绝缘裂纹的值。

5.3.7 数字例题

现在讨论 PZT-4 材料的具体例子,极化沿 x_3 方向,此时的材料常数如下:

$C_{11}=13.9\times 10^{10}$, $C_{12}=7.78\times 10^{10}$, $C_{13}=7.43\times 10^{10}$, $C_{33}=11.3\times 10^{10}$,
$C_{44}=2.56\times 10^{10}(\mathrm{N/m^2})$; $e_{31}=-6.98$, $e_{33}=13.84$, $e_{15}=13.44(\mathrm{C/m^2})$;
$\epsilon_{11}=6.00\times 10^{-9}$, $\epsilon_{33}=5.47\times 10^{-9}(\mathrm{C/V\cdot m})$

在式(5-78)中的矩阵 $\boldsymbol{H}$, Im[$\boldsymbol{Y}$]的数字形式是(极化沿 x_2 方向)

$C_L=5.68\times 10^{10}$, $C_T=5.72\times 10^{10}(\mathrm{N/m^2})$, $\psi=7.62\times 10^{-12}(\mathrm{N/m^2})$
$e=45.15(\mathrm{C/m^2})$, $\varsigma=1.88\times 10^{-2}(\mathrm{C/m^2})$, $\epsilon=-5.72\times 10^{-9}(\mathrm{F/m})$

在给定无穷远处的应力场和电场时,式(5-79)化为

$$D_2(x_1)=\sigma_{22}^{\infty}x_1\left(\frac{25.33}{\sqrt{x_1^2-a^2}}-\frac{1.353}{\sqrt{x_1^2-b^2}}\right)\times 10^{-11}+(10.03E_2^{\infty}-0.178\sigma_{11}^{\infty})\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-b^2}}\times 10^{-9}$$

$$E_1(x_1)=(0.0188\sigma_{21}^{\infty}+E_1^{\infty})\frac{x_1^2-\mathrm{I}_2/\mathrm{I}_1}{\sqrt{(x_1^2-b^2)(x_1^2-a^2)}}-0.0188\sigma_{21}^{\infty}\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-a^2}}$$

式(5-81)化为

$$D_2(x_1)=x_1\left(\frac{(13.056E_2^{\infty}+0.2717\sigma_{21}^{\infty})}{\sqrt{x_1^2-b^2}}+\frac{0.2533\sigma_{21}^{\infty}}{\sqrt{x_1^2-a^2}}\right)\times 10^{-9}$$

$$E_1(x_1)=\frac{x_1^2-\mathrm{I}_2/\mathrm{I}_1}{\sqrt{(x_1^2-b^2)(x_1^2-a^2)}}(E_1^{\infty}-0.0188\sigma_{22}^{\infty})+0.0188\frac{\sigma_{22}^{\infty}x_1}{\sqrt{x_1^2-a^2}}$$

图 5－5 到 5—9 中，给出量纲一的物理量$\widetilde{D}_{2j}$，$\widetilde{E}_{1j}$，$\widetilde{K}_{Dj}$，$\widetilde{K}_{Ej}$随 b/a 的变化。

$$\widetilde{D}_{2j}=\frac{\sqrt{2\pi r}D_2(a+r,\ 0)}{\sqrt{\pi a}\kappa_{11}E_j^\infty},\quad \widetilde{E}_{1j}=\frac{\sqrt{2\pi r}E_1(a+r,\ 0)}{\sqrt{\pi a}E_j^\infty},\quad \widetilde{K}_{Dj}=\frac{K_D}{\sqrt{\pi a}\kappa_{11}E_j^\infty},\ \widetilde{K}_{Ej}=\frac{K_E}{\sqrt{\pi a}E_j^\infty}$$

本节讨论两种载荷情况：① $\sigma_{22}^\infty=1$ MPa，$E_1^\infty=0.1$ MV/m；② $\sigma_{22}^\infty=1$ MPa，$E_2^\infty=0.1$ MV/m。

1）极化沿 x_2 方向

量纲一的物理量随 b/a 的变化示于图 5－5 和 5－6。由图可知，当 b/a 在 0.1～0.9 范围内变化时，$\widetilde{D}_{2j}$和$\widetilde{K}_{Dj}$难以区别，它们的差别只是在两个奇点存在相互影响的 0.9～1.0 范围内。$\widetilde{E}_{11}$和$\widetilde{K}_{E1}$当 b/a 在整个范围内变化时均难以区别。因为对于载荷②，$E_1(x_1,\ 0)\cong 0$，所以在图 5－6 上没有显示相关信息。

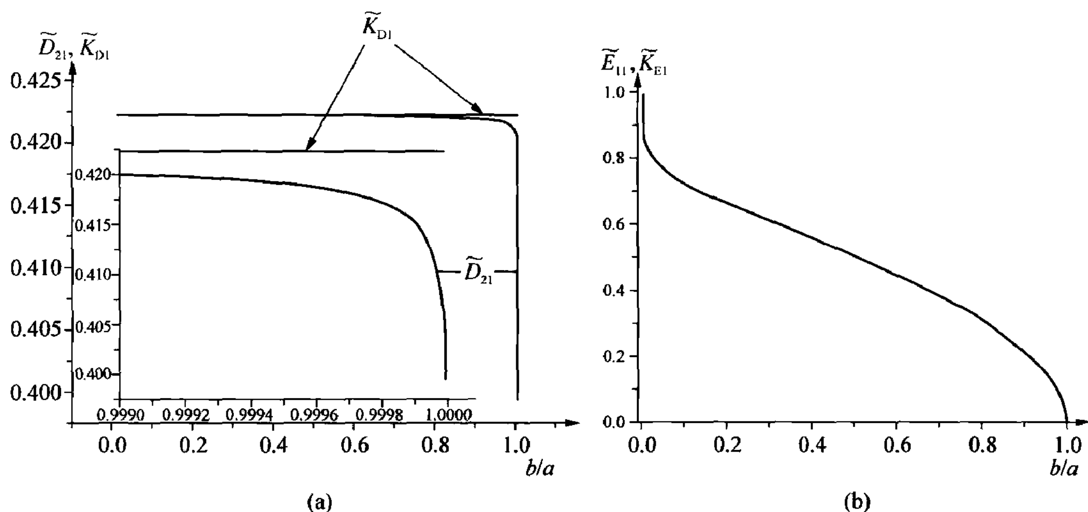


图 5－5　$\sigma_{22}^\infty=1$ MPa，$E_1^\infty=0.1$ MV/m，极化沿 x_2 方向时

（a）$\widetilde{K}_{D1}$，$\widetilde{D}_{21}$随 b/a 的变化；（b）$\widetilde{K}_{E1}$，$\widetilde{E}_{11}$随 b/a 的变化

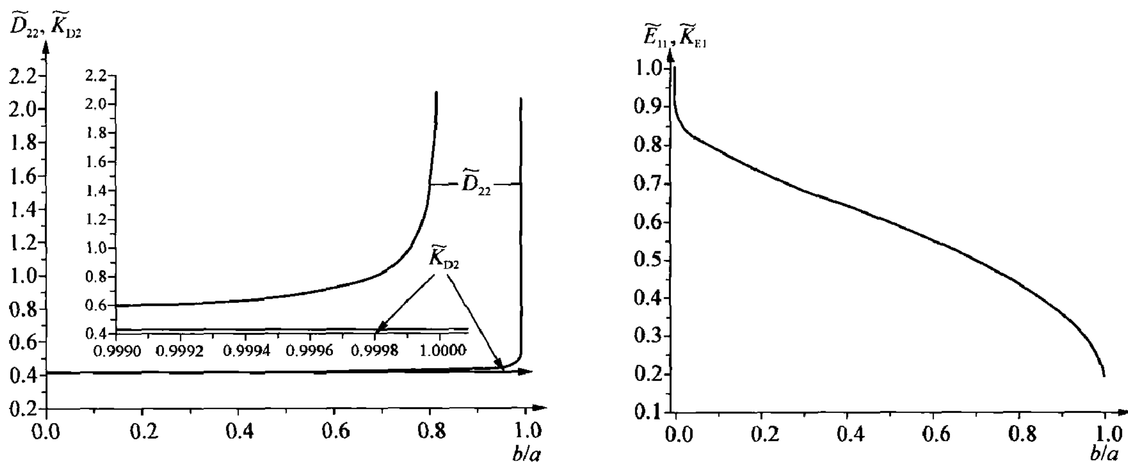


图 5－6　$\sigma_{22}^\infty=1$ MPa，$E_2^\infty=0.1$ MV/m，极化沿 x_2 方向时的$\widetilde{K}_{D2}$，$\widetilde{D}_{22}$随 b/a 的变化

图 5－7　$\sigma_{22}^\infty=1$ MPa，$E_1^\infty=0.1$ MV/m，极化沿 x_1 方向时的$\widetilde{K}_{E1}$，$\widetilde{E}_{11}$随 b/a 的变化

2）**极化沿 x_1 方向**

量纲一的物理量随 b/a 的变化示于图 5－7 和 5－8。对于载荷①，$D_2(x_1, 0)\equiv 0$，所以在图 5－8 上没有显示相关信息。

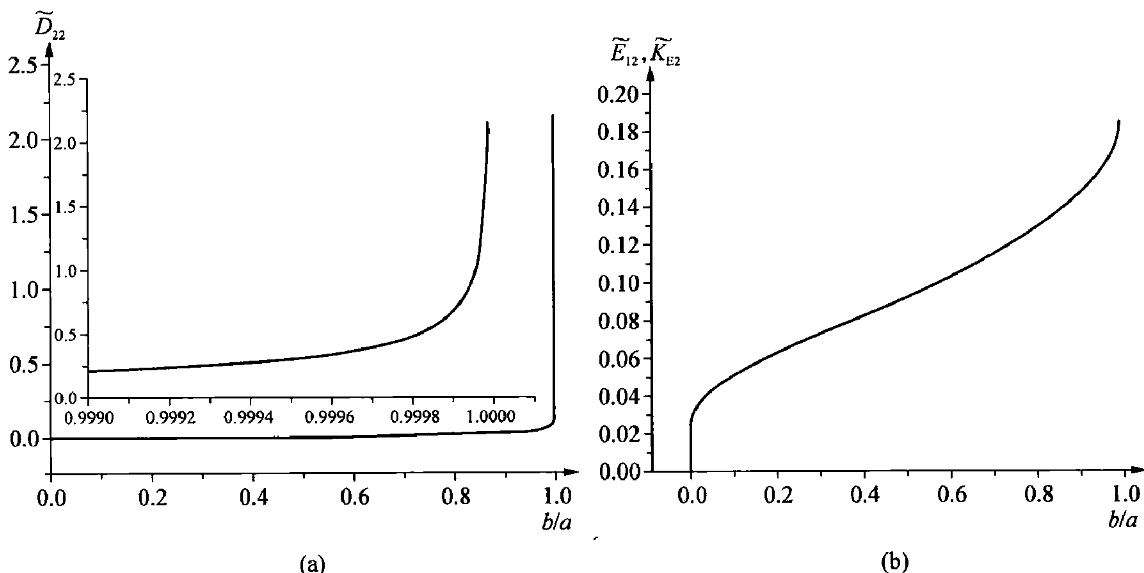


图 5－8 $\sigma_{22}^{\infty}=1$ MPa，$E_2^{\infty}=0.1$ MV/m，极化沿 x_1 方向时

(a) $\widetilde{D}_{22}(\widetilde{K}_{D2}=0)$随 b/a 的变化；(b) $\widetilde{K}_{E2}$，$\widetilde{E}_{12}$随 b/a 的变化

5.4 非理想裂纹[60]

5.4.1 非理想裂纹

实际结构中的裂纹并不一定都是理想裂纹，特别在拉伸载荷下，裂纹中部会被拉开，成为非理想裂纹。本节限于讨论对称非理想裂纹带来的影响。图 5－9 示出一对称的非理想裂纹，它用下列方程描写

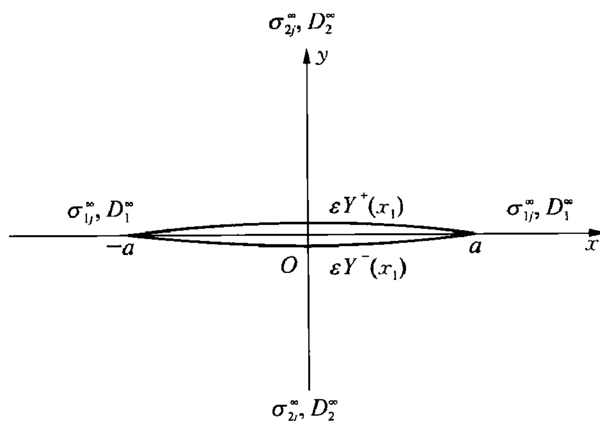


图 5－9 非理想裂纹

$$x_2 = \varepsilon Y_{\pm}(x_1), \quad Y_{+}(x_1) - Y_{-}(x_1) > 0, \ |x_1| < a$$
$$Y'_{+}(\pm a) - Y'_{-}(\pm a) = 0 \tag{5-84}$$

式中 ε 是小参数，$2a$ 为裂纹长度。上式中的最后一个方程是理想裂尖的条件。

非理想裂纹内部充满各向同性电介质空气，正如式(4-93)和(4-95)所表明的，电势可用一个复解析函数 ϕ 表示，从而其中的电场和电位移也可用 ϕ 表示

$$\varphi^{c}(x_1, x_2) = \phi(z) + \overline{\phi(z)} = 2\mathrm{Re}\phi(z)$$
$$E_1 = -\varphi^{c}_{,1} = -2\mathrm{Re}\phi'(z), \quad E_2 = -\varphi^{c}_{,2} = 2\mathrm{Im}\phi'(z) \tag{5-85}$$
$$D_1 = \epsilon^{c} E_1, \quad D_2 = \epsilon^{c} E_2$$

现在讨论在无穷远处承受载荷 $\boldsymbol{\Sigma}_1^{\infty}$，$\boldsymbol{\Sigma}_2^{\infty}$ 作用的非理想裂纹问题。在非理想裂纹的边界上，没有应力作用，空气和电介质的电势和电位移是连续的。

5.4.2 开路或电渗透非理想裂纹的小参数法

我们将以理想裂纹解为基础，采用小参数法来求非理想裂纹的解。按小参数法的一般方法，根据式(5-84)，裂纹面上的点记为

$$z^{0} = x_1 + \mathrm{i}\varepsilon Y_{\pm}(x_1), \quad z_j^{0} = x_1 + \varepsilon\mu_j Y_{\pm}(x_1), \ |x_1| \leqslant a \tag{5-86}$$

把复势展成小参数 ε 的函数，如只讨论到一阶近似，则有

$$f_j(z_j) = f_j(z_j, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty}(\varepsilon^{n}/n!) f_j^{(n)}(z_j) = f_j^{(0)}(z_j) + \varepsilon f_j^{(1)}(z_j) + \cdots \tag{5-87}$$

在裂纹面上有

$$f_j^{(n)}(z_j^{0}) = f_j^{(n)\pm}(x_1) + \varepsilon\mu_j Y_{\pm}(x_1) f_j'^{(n)\pm}(x_1) + \cdots \tag{5-88}$$

式中 $f_j^{(n)\pm}(x_1)$是 $f_j^{(n)}(z_j)$在裂纹面上 $z_j^{0} = x_1 + \varepsilon\mu_j Y_{\pm}(x_1)$ 处的值，$f_j'^{(n)\pm}(z)$是 $f_j^{(n)\pm}(z)$对 z 的导数。空气中的复电势可同样处理

$$\phi(z) = \phi(z, \varepsilon) = \phi^{(0)}(z) + \varepsilon\phi^{(1)}(z) + \cdots$$
$$\phi^{(n)}(z^{0}) = \phi^{(n)\pm}(x_1) + \mathrm{i}\varepsilon Y_{\pm}(x_1)\phi'^{(n)\pm}(x_1) + \cdots \tag{5-89}$$

开路裂纹面上的边界条件为面力自由，电位移和电势的连接条件，即

$$2\mathrm{Re}\sum_j B_{kj} f_j(z_j^{0}) = 0, \quad 2\mathrm{Re}\sum_j B_{4j} f_j(z_j^{0}) = 2\epsilon^{c}\mathrm{Im}\phi^{(0)}(z^{0})$$
$$2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4} A_{4j} f_j(z_j^{0}) = 2\mathrm{Re}\phi^{(0)}(z^{0}), \ k = 1, 2, 3 \tag{5-90}$$

在裂纹面 $|x_1| \leqslant a$，$x_2 = 0$ 上的零阶近似为

$$2\mathrm{Re}\sum_j B_{kj} f_j^{(0)\pm}(x_1) = 0, \ 2\mathrm{Re}\sum_j B_{4j} f_j^{(0)\pm}(x_1) = 2\epsilon^{c}\mathrm{Im}\phi^{(0)}(x_1)$$
$$2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4} A_{4j} f_j^{(0)\pm}(x_1) = 2\mathrm{Re}\phi^{(0)}(x_1), \ k = 1, 2, 3 \tag{5-91a}$$

一阶近似为

$$2\text{Re}\sum_j B_{kj}[\mu_j Y_\pm(x_1)f_j'^{(0)\pm}(x_1)+f_j^{(1)\pm}(x_1)]=0$$

$$2\text{Re}\sum_j B_{4j}[\mu_j Y_\pm(x_1)f_j'^{(0)\pm}(x_1)+f_j^{(1)\pm}(x_1)]=2\epsilon^c\text{Im}[\text{i}Y_\pm(x_1)\phi'^{(0)}(x_1)+\phi^{(1)}(x_1)]$$

$$2\text{Re}\sum_j A_{4j}[\mu_j Y_\pm(x_1)f_j'^{(0)\pm}(x_1)+f_j^{(1)\pm}(x_1)]=2\text{Re}[\text{i}Y_\pm(x_1)\phi'^{(0)}(x_1)+\phi^{(1)}(x_1)]$$

(5 - 91b)

远场边界条件为

$$\lim_{x\to\infty}2\text{Re}\Big[\sum_{j=1}^4 B_{Kj}\mu_j f_j'^{(0)}(z_j)\Big]=-\Sigma_{1K}^\infty,\quad \lim_{x\to\infty}2\text{Re}\Big[\sum_{j=1}^4 B_{Kj}\mu_j f_j'^{(1)}(z_j)\Big]=0$$

$$\lim_{x\to\infty}2\text{Re}\Big[\sum_{j=1}^4 B_{Kj}f_j'^{(0)}(z_j)\Big]=\Sigma_{2K}^\infty,\quad \lim_{x\to\infty}2\text{Re}\Big[\sum_{j=1}^4 B_{Kj}f_j'^{(1)}(z_j)\Big]=0$$

(5 - 92)

式中下标大写字母取值 1～4。位移单值性条件要求

$$\int_{-a}^a\Big[\sum_j B_{Kj}f_j'^{(0)+}(x_1)-\sum_j B_{Kj}f_j'^{(0)-}(x_1)\Big]=0$$

$$\int_{-a}^a\Big[\sum_j B_{Kj}f_j'^{(1)+}(x_1)-\sum_j B_{Kj}f_j'^{(1)-}(x_1)\Big]=0$$

(5 - 93)

5.4.3 开路非理想裂纹的零阶近似解

改写零阶近似的公式(5 - 91a)为

$$2\text{Re}\sum_j B_{Kj}f_j^{(0)\pm}(x_1)=T_K^{(0)}(x_1),\quad 2\text{Re}\sum_j A_{4j}f_j^{(0)+}(x_1)=2\text{Re}\phi^{(0)}(x_1)$$

$$T_K^{(0)}(x_1)=[0,\ 0,\ 0,\ 2\epsilon^c\text{Im}\phi^{(0)}(x_1)]^\text{T}$$

(5 - 94)

由上式的第一个方程推出

$$\sum_j[B_{Kj}f_j^{(0)+}(x_1)-\overline{B}_{Kj}\overline{f}_j^{(0)+}(x_1)]-\sum_j[B_{Kj}f_j^{(0)-}(x_1)-\overline{B}_{Kj}\overline{f}_j^{(0)-}(x_1)]=0$$

$$\sum_j[B_{Kj}f_j^{(0)+}(x_1)+\overline{B}_{Kj}\overline{f}_j^{(0)+}(x_1)]+\sum_j[B_{Kj}f_j^{(0)-}(x_1)+\overline{B}_{Kj}\overline{f}_j^{(0)-}(x_1)]=2T_K^{(0)}(x_1)$$

(5 - 95)

显然，上式是非齐次的 Riemann-Hilbert 问题。按照第 1、4 章的讨论，首先研究相应问题在 z 平面上的解。计及无穷远处载荷是常数，由式(5 - 95)中的第一式，可得

$$\sum_j[B_{Kj}f_j^{(0)}(z)-\overline{B}_{Kj}\overline{f}_j^{(0)}(z)]=\text{i}C_K^{(0)}z \tag{5 - 96}$$

式中 $C_K^{(0)}$ 是实常数。由式(5 - 95)中的第二式，可得在裂纹端部有界的解为

$$\sum_j [B_{Kj} f_j^{(0)}(z) + \overline{B}_{Kj} \overline{f}_j^{(0)}(z)] = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{2T_K^{(0)}(t)\mathrm{d}t}{X^+(t)(t-z)} + C_K^{(1)} X(z)$$
$$X(z) = \sqrt{z^2 - a^2} \tag{5-97}$$

式中 $C_K^{(1)}$ 是实常数，由远场边界条件确定。$X(z)$取 $z \to \infty$ 时趋于 z 的那个分支，在裂纹面上 $X^{\pm}(x_1) = \pm i\sqrt{a^2 - x_1^2}$。由式(5-96)和(5-97)，按照第 1、4 章的解释，可得

$$f_j^{(0)}(z_k) = \frac{B_{jK}^{-1} X(z_j)}{2\pi i}\int_L \frac{T_K^{(0)}(t)\mathrm{d}t}{X^+(t)(t-z_k)} + \frac{1}{2} B_{jK}^{-1}[C_K^{(1)} X(z_j) + iC_K^{(0)} z_j] \tag{5-98}$$

式中 B_{jK}^{-1} 是 $|B_{Kj}|^{-1}$ 中的元素。上式等式右边第一项在无穷远处趋于常数，故其无穷远处的导数为零，从而利用无穷远处的边界条件后便得

$$C_K^{(1)} = \Sigma_{2K}^{\infty}, \quad C_M^{(0)} \mathrm{Im}\Big(\sum_j B_{jM}^{-1}\mu_j B_{Kj}\Big) - C_M^{(1)} \mathrm{Re}\Big(\sum_j B_{jM}^{-1}\mu_j B_{Kj}\Big) = \Sigma_{1K}^{\infty} \tag{5-99}$$

由于 $\Sigma_{21}^{\infty} = \Sigma_{12}^{\infty}$，所以上式中的 8 个常数 $C_K^{(0)}$，$C_K^{(1)}$ 只有 7 个独立方程。不失一般性，可令 $C_2^{(0)} = 0$，其余的常数可用数值方法求解。易于证明，上式满足单值性条件，所以单值性条件不用另外考虑。

现在讨论式(5-94)中的第二个方程。由该方程可推出

$$\sum_j A_{4j}[f_j^{(0)+}(x_1) - f_j^{(0)-}(x_1)] = \sum_j \overline{A}_{4j}[\overline{f}_j^{(0)+}(x_1) - \overline{f}_j^{(0)-}(x_1)] \tag{5-100}$$

把式(5-98)代入(5-100)，并考虑到式(5-98)中 $T_K^{(0)}(x_1)$的表达式，便得

$$(M_{4J} - \overline{M}_{4J})C_J^{(1)}\pi i + (M_{44} - \overline{M}_{44})\int_L \frac{T_4^{(0)}(t)\mathrm{d}t}{X^+(t)(t-x_1)} = 0$$
$$M_{KJ} = \sum_m A_{Km} B_{mJ}^{-1}, \quad H_{KJ} = i(M_{KJ} - \overline{M}_{KJ}) \tag{5-101}$$

为方便计，按式(1-131)引入下述积分的明显表达式

$$\int_{-a}^{a} \frac{t\,\mathrm{d}t}{X^+(t)(t-x_1)} = -i\pi, \quad \int_{-a}^{a} \frac{t\,\mathrm{d}t}{X^+(t)(t-z)} = -i\pi[1 - z/X(z)]$$
$$\int_{-a}^{a} \frac{t^3\,\mathrm{d}t}{X^+(t)(t-x_1)} = -i\pi\left(x_1^2 + \frac{a^2}{2}\right), \quad \int_{-a}^{a} \frac{t^3\,\mathrm{d}t}{X^+(t)(t-z)} = -i\pi\left[z_1^2 + \frac{a^2}{2} - \frac{z^3}{X(z)}\right]$$
$$\int_{-a}^{a} \frac{X^+(t)\mathrm{d}t}{(t-x_1)} = -i\pi x_1, \quad \int_{-a}^{a} \frac{X^+(t)\mathrm{d}t}{(t-z)} = -i\pi[z - X(z)]$$
$$\int_{-a}^{a} \frac{tX^+(t)\mathrm{d}t}{(t-x_1)} = -i\pi\left(x_1^2 - \frac{a^2}{2}\right), \quad \int_{-a}^{a} \frac{tX^+(t)\mathrm{d}t}{(t-z)} = -i\pi\left[z^2 - zX(z) - \frac{a^2}{2}\right]$$
$$\int_{-a}^{a} \frac{t^2X^+(t)\mathrm{d}t}{(t-x_1)} = -i\pi\left(x_1^3 - \frac{a^2 x_1}{2}\right), \quad \int_{-a}^{a} \frac{t^2X^+(t)\mathrm{d}t}{(t-z)} = -i\pi\left[z^3 - \frac{a^2 z}{2} - z^2 X(z)\right] \tag{5-102}$$

利用公式(5-102)，由式(5-101)可解出

$$T_{40}(x_1)=\frac{M_{4J}-\overline{M}_{4J}}{M_{44}-\overline{M}_{44}}\Sigma_{2J}^{\infty}x_1=Cx_1,\ C=\frac{H_{4J}}{H_{44}}\Sigma_{2J}^{\infty} \tag{5-103}$$

把式(5-103)代入(5-98),并利用式(5-102),便得

$$\begin{aligned}&f_j^{(0)}(z_j)=\frac{1}{2}[U_jX(z_j)+V_jz_j]\\&U_j=B_{jK}^{-1}\Sigma_{2K}^{\infty}-B_{j4}^{-1}C=\left(B_{jK}^{-1}-B_{j4}^{-1}\frac{H_{4K}}{H_{44}}\right)\Sigma_{2K}^{\infty},\ V_j=\mathrm{i}B_{jK}^{-1}C_{K0}+B_{j4}^{-1}C\end{aligned} \tag{5-104}$$

上式表明,U_j 只依赖无穷远处的机械载荷 Σ_{2K}^{∞}。把式(5-104)代入(5-94),并注意到

$$\mathrm{Re}\sum_j \mathrm{i}A_{4j}\left(B_{jK}^{-1}-B_{j4}^{-1}\frac{H_{4K}}{H_{44}}\right)=\mathrm{Re}\left[\mathrm{i}M_{4K}-\mathrm{i}M_{44}\frac{\mathrm{i}(M_{4K}-\overline{M}_{4K})}{\mathrm{i}(M_{44}-\overline{M}_{44})}\right]=$$

$$\mathrm{Re}\left[(\mathrm{iRe}M_{4K}-\mathrm{Im}M_{4K})-(\mathrm{iRe}M_{44}-\mathrm{Im}M_{44})\frac{\mathrm{Im}M_{4K}}{\mathrm{Im}M_{44}}\right]=0$$

则由其中的第二个方程得 $2\mathrm{Re}\phi^{(0)}(x_1)=\mathrm{Re}(\mathrm{i}M_{4K}C_K^{(0)}+M_{44}C)x_1$,由其中的第一个方程中的第四式得 $2\mathrm{Im}\phi^{(0)}(x_1)=\mathrm{Re}(\mathrm{i}C_4^{(0)}+C)x_1/\epsilon^c=(C/\epsilon^c)x_1$,所以有

$$2\phi^{(0)}(z)=\left[\mathrm{Re}(\mathrm{i}M_{4K}C_K^{(0)}+M_{44}C)+\mathrm{i}\frac{1}{\epsilon^c}C\right]z+C_0 \tag{5-105}$$

式中 C_0 为常数。至此,零阶近似问题已解决,一般压电体中的解由式(5-104)表示,非理想裂纹空气隙中的解由式(5-105)表示。

5.4.4 开路非理想裂纹的零阶近似解的裂尖渐近场

取原点在右裂尖的局部极坐标(r,θ),由式(5-104),可求得压电介质中的广义应力和广义位移的零阶渐近场为

$$\begin{aligned}&\Sigma_{2K}^{(0)}(r,\theta)=\sqrt{\frac{a}{2r}}\mathrm{Re}\left(\sum_j B_{Kj}U_j\frac{1}{\sqrt{\Theta_j}}\right)+\delta_{4j}C+0(\sqrt{r})\\&u_K^{(0)}(r,\theta)=\mathrm{Re}\left(\sum_j A_{Kj}U_j\sqrt{2ar\Theta_j}+V_ja+V_jr\Theta_j\right)+0(r^{3/2})\\&\Theta_j=\cos\theta+\mu_j\sin\theta\end{aligned} \tag{5-106}$$

由上式可得零阶近似解在裂尖前方 x_1 轴上的渐近表达式和广义应力强度因子

$$\begin{aligned}&\Sigma_{2J}^{(0)}(r,0)=\sqrt{\frac{a}{2r}}\left(\Sigma_{2J}^{\infty}-\delta_{4J}\frac{H_{4K}}{H_{44}}\Sigma_{2K}^{\infty}\right)\\&K_{\mathrm{I}}^{(0)}=\sqrt{\pi a}\sigma_{22}^{\infty},\quad K_{\mathrm{II}}^{(0)}=\sqrt{\pi a}\sigma_{21}^{\infty}\\&K_{\mathrm{III}}^{(0)}=\sqrt{\pi a}\sigma_{23}^{\infty},\quad K_{\mathrm{D}}^{(0)}=-\sqrt{\pi a}\sigma_{2j}^{\infty}H_{4j}/H_{44}\end{aligned} \tag{5-107}$$

由上式知,对于开路裂纹零阶近似,外加电场既不影响应力强度因子,也不影响电强度因子,这和传导裂纹一致;但外加机械应力能产生电强度因子,这和横观各向同性体的结果一致。

由式(5-105)和(5-85)可求空气隙中电场的零阶近似解

$$E_2^{(0)c}(x_1,0)=\frac{H_{4J}\Sigma_{2J}^{\infty}}{H_{44}\epsilon^c}=\frac{D_2^{\infty}}{\epsilon^c}+\frac{H_{4j}\sigma_{2j}^{\infty}}{H_{44}\epsilon^c}$$

$$E_1^{(0)c}(x_1,0)=-\mathrm{Re}(\mathrm{i}M_{4K}C_K^{(0)}+M_{44}C)=E_1^{\infty}+\mathrm{Re}\sum_j A_{4j}U_j \tag{5-108}$$

没有机械载荷时，单纯的电场载荷不影响非理想开路裂纹的一阶近似解。

5.4.5 开路非理想裂纹的一阶近似解

对于一阶问题，改写式(5-91b)为

$$2\mathrm{Re}\sum_j B_{Kj}f_j^{(1)\pm}(x_1)=T_K^{(1)\pm}(x_1)$$

$$2\mathrm{Re}\sum_j A_{4j}[\mu_j Y_{\pm}(x_1)f_j'^{(0)\pm}(x_1)+f_j^{(1)+}(x_1)]=2\mathrm{Re}[\mathrm{i}Y_{\pm}(x_1)\phi'^{(0)}(x_1)+\phi^{(1)}(x_1)]$$

$$T_K^{(1)\pm}(x_1)=-2Y_{\pm}(x_1)\mathrm{Re}\Big[\sum_j B_{Kj}\mu_j f_j'^{(0)\pm}(x_1)\Big]+2\delta_{4K}\epsilon^c\mathrm{Im}[\mathrm{i}Y_{\pm}(x_1)\phi'^{(0)}(x_1)+\phi^{(1)}(x_1)] \tag{5-109}$$

由式(5-109)的第一式可推出

$$\sum_j[B_{Kj}f_j^{(1)+}(x_1)-\overline{B}_{Kj}\overline{f}_j^{(1)+}(x_1)]-\sum_j[B_{Kj}f_j^{(1)-}(x_1)-\overline{B}_{Kj}\overline{f}_j^{(1)-}(x_1)]=T_K^{(1)+}(x_1)-T_K^{(1)-}(x_1)$$

$$\sum_j[B_{Kj}f_j^{(1)+}(x_1)+\overline{B}_{Kj}\overline{f}_j^{(1)+}(x_1)]+\sum_j[B_{Kj}f_j^{(1)-}(x_1)+\overline{B}_{Kj}\overline{f}_j^{(1)-}(x_1)]=T_K^{(1)+}(x_1)+T_K^{(1)-}(x_1) \tag{5-110}$$

由于无穷远场只和零阶近似相关，一阶近似场在无穷远处趋于零，所以满足无穷远处的边界条件的式(5-110)在 z 平面上的解为

$$\sum_j[B_{Kj}f_j^{(1)}(z)-\overline{B}_{Kj}\overline{f}_j^{(1)}(z)]=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{T_K^{(1)+}(x_1)-T_K^{(1)-}(x_1)}{x_1-z}\mathrm{d}x_1$$

$$\sum_j[B_{Kj}f_j^{(1)}(z)+\overline{B}_{Kj}\overline{f}_j^{(1)}(z)]=\frac{X(z)}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{T_K^{(1)+}(x_1)+T_K^{(1)-}(x_1)}{X^+(x_1)(x_1-z)}\mathrm{d}x_1 \tag{5-111}$$

因此压电体中的一阶近似解为

$$f_j^{(1)}(z_j)=\frac{1}{2}B_{jK}^{-1}\left[\frac{X(z_j)}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{T_K^{(1)+}(x_1)+T_K^{(1)-}(x_1)}{X^+(x_1)(x_1-z_j)}\mathrm{d}x_1+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{T_K^{(1)+}(x_1)-T_K^{(1)-}(x_1)}{x_1-z_j}\mathrm{d}x_1\right] \tag{5-112}$$

为要得到上式的显式解，需要给出 $Y_{\pm}(x_1)$ 的具体表达式。为简单计，设为

$$Y_{\pm}(x_1)=\pm Y(x_1)=\pm(a^2-x_1^2)^{3/2}/(3a^2) \tag{5-113}$$

把零阶解代入式(5-109)中的 $T_K^{(1)\pm}(x_1)$，可得

$$T_K^{(1)+}(x_1)+T_K^{(1)-}(x_1)=2\mathrm{Re}\sum_j(\mathrm{i}B_{Kj}\mu_jU_j)\frac{x_1Y(x_1)}{\sqrt{a^2-x_1^2}}+4\delta_{4K}\epsilon^c\mathrm{Im}\phi^{(1)}(x_1)$$

$$T_K^{(1)+}(x_1)-T_K^{(1)-}(x_1)=-2\Big[\mathrm{Re}\sum_j(B_{Kj}\mu_jV_j)+\delta_{4K}\epsilon^cE_1^{(0)c}\Big]Y(x_1) \tag{5-114}$$

利用积分公式(5-102)，把式(5-114)代入(5-112)，可得

$$f_j^{(1)}(z_j) = \frac{B_{jK}^{-1}}{a^2}\left\{\frac{a^2\delta_{4K}\epsilon^c X(z_j)}{\pi i}\int_L \frac{\mathrm{Im}\phi^{(1)}(x_1)}{X^+(x_1)(x_1-z_j)}\mathrm{d}x_1 - \right.$$

$$\frac{1}{6}\mathrm{Re}\left(\sum_j \mathrm{i}B_{Kj}\mu_j U_j\right)X(z_j)\left[z_j X(z_j) - z_j^2 + \frac{a^2}{2}\right] + \tag{5-115}$$

$$\left.\frac{\mathrm{i}}{6}\left[\mathrm{Re}\left(\sum_j B_{Kj}\mu_j V_j\right) + \delta_{4K}\epsilon^c E_1^{(0)c}\right]\left[(a^2 - z_j^2)X(z_j) - \frac{3}{2}a^2 z_j + z_j^3\right]\right\}$$

由式(5-109)的第二式得

$$2\mathrm{Re}\sum_j A_{4j}\left[f_j^{(1)+}(x_1) - f_j^{(1)-}(x_1)\right] + 2\left(\mathrm{Re}\sum_j A_{4j}\mu_j V_j + E_2^{(0)c}\right)Y(x_1) = 0 \tag{5-116}$$

联合式(5-115)和(5-116)，得到 $\mathrm{Im}\phi^{(1)}(x_1)$ 的奇异积分方程，由此解出 $\mathrm{Im}\phi^{(1)}(x_1)$，得

$$\mathrm{Im}\phi^{(1)}(x_1) = -\frac{1}{\pi \mathrm{i} A_1}\left[\frac{1}{3a^2}(A_2 + A_3)x_1^3 - \left(\frac{A_2}{3} + \frac{A_3}{2}\right)x_1\right]$$

$$A_1 = -\frac{2H_{44}\epsilon^c}{\pi},\ A_2 = \mathrm{i}H_{4K}\mathrm{Re}(\mathrm{i}B_{Kj}\mu_j U_j) \tag{5-117}$$

$$A_3 = \mathrm{i}\left\{2\mathrm{Re}(M_{4K})\left[\delta_{4K}\epsilon^c E_1^{(0)c} + \mathrm{Re}\left(\sum_j B_{Kj}\mu_j V_j\right)\right] - 2\left[\mathrm{Re}\left(\sum_j A_{4j}\mu_j V_j\right) + E_2^{(0)c}\right]\right\}$$

从而有

$$f_j^{(1)}(z_j) = \frac{B_{jK}^{-1}}{a^2}\left(\frac{\delta_{4K}\epsilon^c X(z_j)}{\pi \mathrm{i} A_1}\left\{\frac{1}{3}(A_2 + A_3)\left[\frac{z_j^3}{X(z_j)} - z_j^2 - \frac{a^2}{2}\right]\right\} - a^2\left(\frac{A_2}{3} + \frac{A_3}{2}\right)\cdot\right.$$

$$\left.\left[\frac{z_j}{X(z_j)} - 1\right]\right) - \frac{1}{6}\mathrm{Re}\left(\sum_j \mathrm{i}B_{Kj}\mu_j U_j\right)X(z_j)\left[z_j X(z_j) - z_j^2 + \frac{a^2}{2}\right] +$$

$$\frac{\mathrm{i}}{6}\left[\mathrm{Re}\left(\sum_j B_{Kj}\mu_j V_j\right) + \delta_{4k}\epsilon^c E_1^{(0)c}\right]\left[(a^2 - z_j^2)X(z_j) - \frac{3}{2}a^2 z_j + z_j^3\right] \tag{5-118}$$

结合式(5-118)和(5-109)的第二式，可推出

$$\mathrm{Re}\phi^{(1)}(x_1) = \frac{1}{4}\left(\Pi_1\frac{x_1^3}{a^2} + \Pi_2 x_1\right)$$

$$\Pi_1 = 2\mathrm{Re}(M_{4K})\left[-\frac{2\delta_{4K}\epsilon^c}{3\pi \mathrm{i} A_1}(A_2 + A_3) - \frac{1}{3}\mathrm{Re}\left(\sum_j B_{Kj}\mu_j U_j\right)\right] +$$

$$\frac{H_{4K}}{3}\left[\mathrm{Re}\left(\sum_j B_{Kj}\mu_j V_j\right) + \delta_{4K}\epsilon^c E_1^{(0)c}\right] - \frac{2}{3}\mathrm{Im}\left(\sum_j A_{4j}\mu_j U_j\right) \tag{5-119}$$

$$\Pi_2 = 2\mathrm{Re}(M_{4K})\left[\frac{2\delta_{4k}\epsilon^c}{\pi \mathrm{i} A_1}\left(\frac{A_2}{3} + \frac{A_3}{2}\right) + \frac{1}{3}\mathrm{Re}\left(\sum_j \mathrm{i}B_{Kj}\mu_j U_j\right)\right] -$$

$$\frac{H_{4K}}{2}\left[\mathrm{Re}\left(\sum_j B_{Kj}\mu_j V_j\right) + \delta_{4K}\epsilon^c E_1^{(0)c}\right] + \frac{2}{3}\mathrm{Im}\left(\sum_j A_{4j}\mu_j U_j\right)$$

至此，一阶近似问题已解决，压电体中的解由式(5－118)表示，非理想裂纹空气隙中的解由式(5－117)和(5－119)表示。

5.4.6 开路非理想裂纹的一阶近似解的裂尖渐近解

压电介质中的广义应力和广义位移的一阶渐近场为

$$\Sigma_{2K}^{(1)}(r,\theta)=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{a}{2r}}\mathrm{Re}\left\{\sum_j\frac{B_{Kj}B_{jM}^{-1}}{\sqrt{\Theta_j}}\left[\mathrm{Re}\left(\sum_j\mathrm{i}B_{Mj}\mu_jU_j\right)-\frac{\delta_{4M}H_{4N}}{H_{44}}\cdot\right.\right.$$
$$\left.\left.\mathrm{Re}\left(\sum_j\mathrm{i}B_{Nj}\mu_jU_j\right)\right]\right\}-\frac{2\delta_{4K}\epsilon^c}{\pi\mathrm{i}A_1}\left(\frac{2A_2}{3}+\frac{A_3}{2}\right)-\frac{2}{3}\mathrm{Re}\left(\sum_j\mathrm{i}B_{Kj}\mu_jU_j\right)+0(\sqrt{r})$$

$$u_K^{(1)}(r,\theta)=2\mathrm{Re}\left(\sum_jA_{Kj}B_{jM}^{-1}\right)\left\{-\frac{\delta_{4M}\epsilon^c}{\pi\mathrm{i}A_1}\left[-\frac{A_3a}{6}+\left(\frac{2A_2}{3}+\frac{A_3}{2}\right)r\Theta_j-\frac{A_2}{6}\sqrt{2ar\Theta_j}\right]\right\}-$$
$$\frac{1}{6}\mathrm{Re}\left(\sum_j\mathrm{i}B_{Mj}\mu_jU_j\right)\left(2r\Theta_j-\frac{1}{2}\sqrt{2ar\Theta_j}\right)+ \tag{5-120}$$
$$\frac{\mathrm{i}}{6}\left[\mathrm{Re}\left(\sum_jB_{Mj}\mu_jV_j\right)+\delta_{4M}\epsilon^cE_1^{(0)c}\right]\left(-\frac{a}{2}+\frac{3}{2}r\Theta_j\right)+0(r^{3/2})$$

由上式可得一阶近似解的奇异项在裂尖前方 x_1 轴上的表达式和广义应力强度因子

$$\Sigma_{2K}^{(1)}(r,0)=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{a}{2r}}\left[\mathrm{Re}\left(\sum_j\mathrm{i}B_{Kj}\mu_jU_j\right)-\frac{\delta_{4K}H_{4N}}{H_{44}}\mathrm{Re}\left(\sum_j\mathrm{i}B_{Nj}\mu_jU_j\right)\right]$$

$$K_{\mathrm{I}}^{(1)}=\frac{\sqrt{\pi a}}{6}\mathrm{Re}\left(\sum_j\mathrm{i}B_{2j}\mu_jU_j\right),\quad K_{\mathrm{II}}^{(1)}=\frac{\sqrt{\pi a}}{6}\mathrm{Re}\left(\sum_j\mathrm{i}B_{1j}\mu_jU_j\right) \tag{5-121}$$

$$K_{\mathrm{III}}^{(1)}=\frac{\sqrt{\pi a}}{6}\mathrm{Re}\left(\sum_j\mathrm{i}B_{3j}\mu_jU_j\right),\quad K_{\mathrm{D}}^{(1)}=-\frac{\sqrt{\pi a}H_{4n}}{6H_{44}}\mathrm{Re}\left(\sum_j\mathrm{i}B_{nj}\mu_jU_j\right)$$

由上式知，无穷远处的 σ_{11}^{∞}，σ_{13}^{∞} 和电场不影响一阶应力强度因子；一阶应力强度因子和零阶应力强度因子具有相同的奇异性，但具有不同的角分布；进一步研究表明，对于各向同性材料，恒有 $K_I^{(1)}=K_{\mathrm{D}}^{(1)}=0$。

利用式(5－117)、(5－119)和(5－85)，可得空气隙内的一阶近似电场分布

$$E_1^{(1)c}(x_1,0)=-\frac{1}{2}\left(3\Pi_1\frac{x_1^2}{a^2}+\Pi_2\right),\quad E_2^{(1)c}(x_1,0)=-\frac{1}{\pi\mathrm{i}A_1}\left[(A_2+A_3)\frac{x_1^2}{a^2}-\left(\frac{A_3}{2}+\frac{A_2}{3}\right)\right]$$

由上式知，空气隙内的一阶近似电场分布是不均匀的。

利用式(5－84)、(5－85)和(5－89)，可得空气隙上下岸的电势跳跃为

$$\varphi[x_1,Y_+(x_1)]-\varphi[x_1,Y_-(x_1)]=-2\varepsilon[Y_+(x_1)-Y_-(x_1)](E_2^{(0)c}+E_2^{(1)c}) \tag{5-122}$$

由上式可见，如考虑一阶近似，空气隙上下岸的电势跳跃是不均匀的，如只考虑零阶近似，则空气隙上下岸的电势跳跃是均匀的。

Hao 和 Shen[61]基于裂纹不是理想的，提出下列边界条件

$$D_2^+=D_2^-=\epsilon^c(\varphi^--\varphi^+)/(u_2^+-u_2^-) \tag{5-123}$$

如果我们用理想裂纹的张开位移作为近似的非理想裂纹的形状，那么用本节的方法也可以很方便地讨论变形过程中裂纹张开的影响。Zhang，Qian 和 Tong[62]分析了考虑变形过程中裂纹张开位移时的解。

5.4.7 绝缘非理想裂纹

和开路裂纹不同，绝缘裂纹的裂纹面上通常假设电位移为零，从而式(5－90)改为

$$2\mathrm{Re}\Big[\sum_j B_{kj} f_j(z_j^0)\Big]=0,\ k=1,2,3,4 \tag{5-124}$$

求解过程和开路裂纹类似，不过由于裂纹面上法向电位移为零，此时式(5－94)中的$T_4^{(0)}(x_1)$也是零，因而式(5－98)中有关未知量$T_4^{(0)}(x_1)$的积分项消失，所以问题更简单一些。问题求解后，最终得

$$\begin{aligned}
&K_{\mathrm{I}}^{(0)}=\sqrt{\pi a}\sigma_{22}^{\infty},\quad K_{\mathrm{II}}^{(0)}=\sqrt{\pi a}\sigma_{21}^{\infty},\quad K_{\mathrm{III}}^{(0)}=\sqrt{\pi a}\sigma_{23}^{\infty},\quad K_{\mathrm{D}}^{(0)}=\sqrt{\pi a}D_2^{\infty}\\
&K_{\mathrm{I}}^{(1)}=\frac{\sqrt{\pi a}}{6}\mathrm{Re}\Big(\sum_j \mathrm{i}B_{2j}\mu_j U_j\Big),\quad K_{\mathrm{II}}^{(1)}=\frac{\sqrt{\pi a}}{6}\mathrm{Re}\Big(\sum_j \mathrm{i}B_{1j}\mu_j U_j\Big)\\
&K_{\mathrm{III}}^{(1)}=\frac{\sqrt{\pi a}}{6}\mathrm{Re}\Big(\sum_j \mathrm{i}B_{3j}\mu_j U_j\Big),\quad K_{\mathrm{D}}^{(1)}=\frac{\sqrt{\pi a}}{6}\mathrm{Re}\Big(\sum_j \mathrm{i}B_{4j}\mu_j U_j\Big)
\end{aligned} \tag{5-125}$$

式中$U_j=B_{jK}^{-1}\Sigma_{2K}^{\infty}$。

5.4.8 传导非理想裂纹

如果裂纹内充满了导电液体，此时便成为传导裂纹，传导裂纹面上通常假设电势为零，从而式(5－90)改为

$$2\mathrm{Re}\Big[\sum_j B_{kj} f_j(z_j^0)\Big]=0,\ k=1,2,3;\quad 2\mathrm{Re}\Big[\sum_j A_{4j} f_j(z_j^0)\Big]=0 \tag{5-126}$$

类比于开路裂纹，易于得到其解。令

$$\widetilde{A}_{kj}=\begin{cases}A_{kj},\ k=1,2,3,\\ -B_{4j},\ k=4;\end{cases}\quad \widetilde{B}_{kj}=\begin{cases}B_{kj},\ k=1,2,3,\\ -A_{4j},\ k=4\end{cases} \tag{5-127}$$

则有

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\Sigma}_{2k}=\begin{Bmatrix}\sigma_{2k}\\ E_1\end{Bmatrix}=2\mathrm{Re}\Big[\sum_j \widetilde{B}_{kj} f'_j(z_j)\Big],\quad \widetilde{\Sigma}_{1k}=\begin{Bmatrix}\sigma_{1k}\\ -E_2\end{Bmatrix}=-2\mathrm{Re}\Big[\sum_j \widetilde{B}_{kj}\mu_j f'_j(z_j)\Big]\\
&\tilde{u}_k=[u_j,\tilde{u}_4]=2\mathrm{Re}\Big[\sum_j \widetilde{A}_{kj} f_j(z_j)\Big]
\end{aligned} \tag{5-128}$$

式中$\tilde{u}_4$为垂直曲线的法向电位移的总通量。同时有

$$\begin{aligned}
&K_{\mathrm{I}}^{(0)}=\sqrt{\pi a}\sigma_{22}^{\infty},\quad K_{\mathrm{II}}^{(0)}=\sqrt{\pi a}\sigma_{21}^{\infty},\quad K_{\mathrm{III}}^{(0)}=\sqrt{\pi a}\sigma_{23}^{\infty},\quad K_{\mathrm{E}}^{(0)}=\sqrt{\pi a}E_1^{\infty}\\
&K_{\mathrm{I}}^{(1)}=\frac{\sqrt{\pi a}}{6}\mathrm{Re}\Big(\sum_j \mathrm{i}\widetilde{B}_{2j}\mu_j\widetilde{U}_j\Big),\quad K_{\mathrm{II}}^{(1)}=\frac{\sqrt{\pi a}}{6}\mathrm{Re}\Big(\sum_j \mathrm{i}\widetilde{B}_{1j}\mu_j\widetilde{U}_j\Big)\\
&K_{\mathrm{III}}^{(1)}=\frac{\sqrt{\pi a}}{6}\mathrm{Re}\Big(\sum_j \mathrm{i}\widetilde{B}_{3j}\mu_j\widetilde{U}_j\Big),\quad K_{\mathrm{E}}^{(1)}=\frac{\sqrt{\pi a}}{6}\mathrm{Re}\Big(\sum_j \mathrm{i}\widetilde{B}_{4j}\mu_j\widetilde{U}_j\Big)
\end{aligned} \tag{5-129}$$

式中 $\widetilde{U}_j = \widetilde{B}_{jk}^{-1} \widetilde{\Sigma}_{2k}^{\infty}$。

5.5 电学条形模型

5.5.1 绝缘裂纹的电学条形模型

通常压电陶瓷的机械强度很高，塑性变形很小，常常可略去；但是在强电场作用下，裂尖附近的介质中存在电场集中，可以达到电饱和(但不考虑空气隙中的电击穿)，由此提出机械上弹性、电学上局部电饱和的电学条形模型，电学条形模型是弹性体中的Dugdale模型的推广。图5-10表示一电学条形模型，在裂纹前方 x_1 轴上存在一待求长度的电学饱和线段，在该线段上，电位移达到饱和值 D_s。为简单计，讨论如下问题。在无穷远处

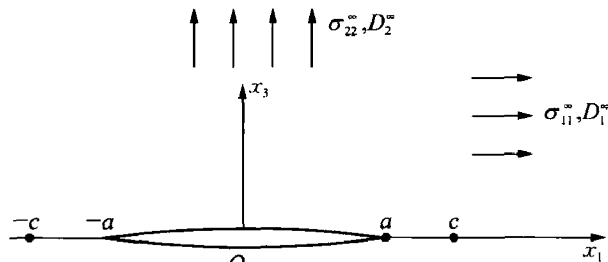


图5-10 电学条形模型

$$\sigma_{11} = \sigma_{11}^{\infty}, \quad \sigma_{22} = \sigma_{22}^{\infty}, \quad \sigma_{12} = \sigma_{12}^{\infty}, \quad \sigma_{23} = \sigma_{23}^{\infty}, \quad D_1 = D_1^{\infty}, \quad D_2 = D_2^{\infty} \tag{5-130}$$

在裂纹面上

$$\sigma_{22} = \sigma_{12} = \sigma_{23} = 0, \quad D_2 = 0, \; |x_1| \leqslant a \tag{5-131}$$

在电学饱和区

$$u_i^+ = u_i^-, \quad \sigma_{2i}^+ = \sigma_{2i}, \quad D_2 = D_s, \; a \leqslant |x_1| \leqslant c \tag{5-132}$$

本节中采用和前几节稍微不同的方法来处理。我们把此原问题叠加一负的无穷远处广义应力场 $-\boldsymbol{\Sigma}_2^{\infty} = -[\sigma_{21}^{\infty}, \sigma_{22}^{\infty}, \sigma_{23}^{\infty}, D_2^{\infty}]^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{T}$，变成一个新问题。原问题的解等于新问题的解加上一个均匀应力场，而均匀应力场不影响奇异应力场。新问题在无穷远处的广义应力为零，在裂纹面上和电学饱和区的边界条件是

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\Sigma}_2^{\mp} = -\boldsymbol{T}, \; \boldsymbol{T} = [\sigma_{21}^{\infty}, \sigma_{22}^{\infty}, \sigma_{23}^{\infty}, D_2^{\infty}]^{\mathrm{T}}, \; |x_1| \leqslant a \\ &\mathbf{U}^+ = \mathbf{U}^-, \quad \boldsymbol{\Sigma}_2^+ = \boldsymbol{\Sigma}_2^- = -\widetilde{\mathbf{T}}, \; \widetilde{\mathbf{T}} = [*, *, *, D_2^{\infty} - D_s], \; a \leqslant |x_1| \leqslant c \end{aligned} \tag{5-133}$$

式中 $\widetilde{\boldsymbol{T}}$ 中的 * 表示求解过程中并不出现的未知量。由于 $\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1)$ 在整个 x_1 轴上连续，和5.2节一样，引入函数 $\boldsymbol{h}(z) = \boldsymbol{BF}(z)$，在裂纹面上有

$$\boldsymbol{h}^+(x_1) + \boldsymbol{h}^-(x_1) = -\boldsymbol{T}, \; |x_1| < a; \quad \boldsymbol{h}(z) = \boldsymbol{BF}(z) \tag{5-134}$$

由式(5-37)知，在 x_1 轴上广义位移导数的间断值为

$$\mathrm{i}\boldsymbol{d}'(x_1) = \mathrm{i}2\mathrm{Re}\{\boldsymbol{A}[\boldsymbol{F}^+(x_1) - \boldsymbol{F}^-(x_1)]\} = \boldsymbol{H}[\boldsymbol{h}^+(x_1) + \boldsymbol{h}^-(x_1)] \tag{5-135}$$

式中 $\boldsymbol{H}$ 由式(5-36)表示,即 $\boldsymbol{H}=\mathrm{i}(\boldsymbol{AB}^{-1}-\overline{\boldsymbol{AB}}^{-1})$。

5.5.2 绝缘裂纹的电学条形模型的解[63,64]

引入新的函数 $\boldsymbol{g}(z)$

$$\boldsymbol{g}(z)=\boldsymbol{Hh}(z),\ \boldsymbol{h}(z)=\boldsymbol{Lg}(z),\ \boldsymbol{L}=\boldsymbol{H}^{-1} \tag{5-136}$$

把式(5-136)代入(5-134),用分量形式写出

$$\begin{aligned}&L_{ik}[g_k^+(x_1)+g_k^-(x_1)]+L_{i4}[g_4^+(x_1)+g_4^-(x_1)]=-T_i,\ i,\ k=1,\ 2,\ 3\\&L_{4k}[g_k^+(x_1)+g_k(x_1)]+L_{44}[g_4^+(x_1)+g_4^-(x_1)]=-T_4,\ |x_1|<a\end{aligned} \tag{5-137}$$

从上式消去 $g_4^+(x_1)+g_4^-(x_1)$,便得

$$\begin{aligned}&L_{ik}^*[g_k^+(x_1)+g_k^-(x_1)]=-T_i^*,\ i,\ k=1,\ 2,\ 3,\ |x_1|<a\\&L_{ik}^*=L_{ik}-L_{i4}L_{4k}/L_{44},\ T_i^*=T_i-T_4L_{i4}/L_{44}\end{aligned} \tag{5-138a}$$

引入三维矢量 $\boldsymbol{g}^*(z)$,$\boldsymbol{T}^*$ 等,则上式的矢量形式为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{L}^*[\boldsymbol{g}^{*+}(x_1)+\boldsymbol{g}^{*-}(x_1)]=-\boldsymbol{T}^*,\ |x_1|<a,\\&\boldsymbol{g}^*(z)=[g_1(z),\ g_2(z),\ g_3(z)]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{T}^*=[T_1^*,\ T_2^*,\ T_3^*]^{\mathrm{T}}\end{aligned} \tag{5-138b}$$

式(5-138)的解为

$$\boldsymbol{L}^*\boldsymbol{g}^*(z)=\boldsymbol{T}^*F_a(z),\ F_a(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}}-1\right) \tag{5-139}$$

现在来研究 $g_4(z)$。由式(5-137)的第二式,式(5-133)和(5-136)得

$$\begin{aligned}&g_4^+(x_1)+g_4^-(x_1)=-\{L_{4k}[g_k^+(x_1)+g_k^-(x_1)]+T_4\}/L_{44},\ |x_1|<a,\ k=1,\ 2,\ 3\\&g_4^+(x_1)+g_4^-(x_1)=-\{L_{4k}[g_k^+(x_1)+g_k^-(x_1)]+T_4-D_s\}/L_{44},\ a\leqslant|x_1|\leqslant c\end{aligned} \tag{5-140}$$

上述问题的解为

$$\begin{aligned}&g_4(z)=[-L_{4k}g_k(z)+T_4F_c(z)+D_sF_D(z)]/L_{44},\ k=1,\ 2,\ 3\\&F_c(z)=\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{z^2-c^2}}-1\right)\\&F_D(z)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\ln\frac{z\sqrt{c^2-a^2}+\mathrm{i}a\sqrt{z^2-c^2}}{z\sqrt{c^2-a^2}-\mathrm{i}a\sqrt{z^2-c^2}}-\frac{1}{\pi}\frac{z}{\sqrt{z^2-c^2}}\arccos\frac{a}{c}\end{aligned} \tag{5-141}$$

式中 $F_c(z)$,$F_D(z)$是去掉切口$(-c,\ c)$后的 z 平面上的解析函数,它具有性质

$$F_D^+(x_1)+F_D^-(x_1)=\begin{cases}0,\ |x_1|<a,\\1,\ a\leqslant|x_1|\leqslant c;\end{cases}\quad F_D(\infty)=0 \tag{5-142}$$

式(5-139)和(5-141)给出了 $\boldsymbol{g}(z)$的完全解。

5.5.3 条形区域的长度

现在讨论裂尖前方 $|x_1| \geqslant c$ 的电位移。根据

$$\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1) = \boldsymbol{B}[\boldsymbol{F}^+(x_1) + \boldsymbol{F}^-(x_1)] = \boldsymbol{L}[\boldsymbol{g}^+(x_1) + \boldsymbol{g}^-(x_1)], \ |x_1| \geqslant c$$

推出

$$D_2 = L_{4k}[g_k^+(x_1) + g_k^-(x_1)] + L_{44}[g_4^+(x_1) + g_4^-(x_1)], \ k = 1, 2, 3$$

把式(5-141)代入上式,得

$$D_2 = 2T_4F_c(x_1) + D_s[F_D^+(x_1) + F_D^-(x_1)] = \left(D_2^\infty - \frac{2}{\pi}D_s \arccos\frac{a}{c}\right)\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2 - c^2}} - D_2^\infty + D_s\left(1 - \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\ln\frac{x_1\sqrt{c^2-a^2} + \mathrm{i}a\sqrt{x_1^2-c^2}}{x_1\sqrt{c^2-a^2} - \mathrm{i}a\sqrt{x_1^2-c^2}}\right), \ |x_1| \geqslant c \tag{5-143}$$

为使 D_2 有界,必须

$$D_2^\infty - \frac{2}{\pi}D_s\arccos\frac{a}{c} = 0, \quad 或\frac{a}{c} = \cos\frac{\pi D_2^\infty}{2D_s} \tag{5-144}$$

上式便是确定条形区长度的方程。原问题的 D_2 在 x_1 轴上的解为式(5-143)的解加上 D_2^∞,即

$$(D_2)_{原问题} = D_s\left(1 - \frac{1}{\pi \mathrm{i}}\ln\frac{x_1\sqrt{c^2-a^2} + \mathrm{i}a\sqrt{x_1^2-c^2}}{x_1\sqrt{c^2-a^2} - \mathrm{i}a\sqrt{x_1^2-c^2}}\right) \tag{5-145}$$

5.5.4 应力强度因子

原问题的应力为新问题的应力加上 $\boldsymbol{T}$,即

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1)_{原问题} &= \boldsymbol{h}^+(x_1) + \boldsymbol{h}^-(x_1) + \boldsymbol{T} \\
\sigma_{2i}(x_1)_{原问题} &= L_{ik}[g_k^+(x_1) + g_k^-(x_1)] + L_{i4}[g_4^+(x_1) + g_4^-(x_1)] + T_i = \\
&L_{ik}^*(g_k^+ + g_k^-) + \frac{L_{i4}}{L_{44}}[D_2^\infty(F_c^+ + F_c^-) + D_s(F_D^+ + F_D^-)] + T_i = \\
&2T_i^* F_a(x_1) + \frac{L_{i4}}{L_{44}}(D_s - D_2^\infty) + T_i = \\
&T_i^*\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2-c^2}} + \frac{L_{i4}}{L_{44}}D_s
\end{aligned} \tag{5-146}$$

由上式推出

$$K_{\mathrm{I}} = \sqrt{\pi a}\left(\sigma_{22}^\infty - \frac{L_{24}}{L_{44}}D_2^\infty\right), \quad K_{\mathrm{II}} = \sqrt{\pi a}\left(\sigma_{21}^\infty - \frac{L_{14}}{L_{44}}D_2^\infty\right), \quad K_{\mathrm{III}} = \sqrt{\pi a}\left(\sigma_{23}^\infty - \frac{L_{34}}{L_{44}}D_2^\infty\right) \tag{5-147}$$

由于裂尖处电场饱和,所以电场是有界的。

Ru 和 Mao 讨论了传导裂纹的电学条形模型[65]。

5.6 表面电极[65~68]

5.6.1 表面电极模型

图 5-11 表示一位于下半平面 S^- 的半无限介质表面上沿 x_1 轴覆盖了共线的、无刚度的金属表面电极，电极的左右端点分别记为 a_i 和 b_i($i=1, 2, \cdots, n$)，相应的电极部分记为 L_i''，电极部分的全体记为 L''，其余部分记为 L'。规定第 i 个电极上的电荷为 q_i，或规定其上的电势为 V_i。现在讨论下述混合边值问题

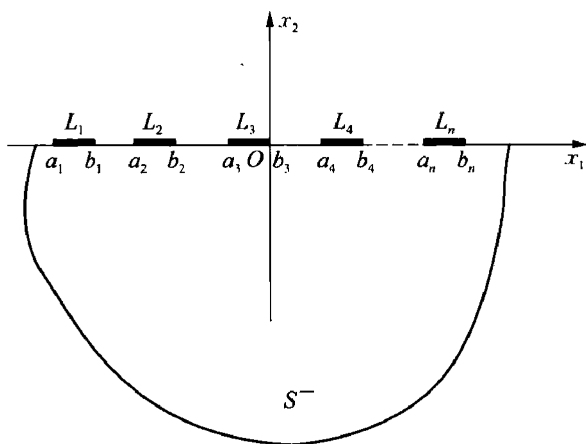


图 5-11 共线表面电极

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{2i}=0,\quad D_2=0,\ z\in L';\quad \sigma_{2i}=0,\quad E_1=0,\ z\in L'' \\
&\sigma_{ij}\to 0,\quad D_i\to 0,\ |z|\to\infty,\ i, j=1, 2, 3
\end{aligned}
\tag{5-148}
$$

同时还要满足

$$
\int_{L_i''} D_2^-(x_1)\,\mathrm{d}x_1=-q_i,\ i=1, 2, \cdots, n, \tag{5-149}
$$

或
$$
\varphi_i=V_i,\quad \int_{L''} D_2^-(x_1)\,\mathrm{d}x_1=-Q=-\sum_{i=1}^{n} q_i
$$

按照式(5-148)中的第一式知，沿电极 L'部分的广义应力 $\boldsymbol{\Sigma}_2=\mathbf{0}$，即

$$
\boldsymbol{BF}^-(x_1)+\overline{\boldsymbol{BF}^-(x_1)}=\mathbf{0},\ x_1\in L' \tag{5-150}
$$

5.6.2 求解方法

我们引入一个新的函数

$$
\boldsymbol{h}(z)=\begin{cases}-\boldsymbol{B}^{-1}\overline{\boldsymbol{BF}}(z),\ z\in S^+\\ \boldsymbol{F}(z),\ z\in S^-\end{cases} \tag{5-151}
$$

函数 $\boldsymbol{h}(z)$ 在通过 L' 解析延拓到上半平面后的整个 z 平面上除 L'' 外处处解析。在 L' 上，按式(5-151)和(5-150)，有

$$\boldsymbol{h}^-(x_1)-\boldsymbol{h}^+(x_1)=\boldsymbol{F}^-(x_1)+\boldsymbol{B}^{-1}\overline{\boldsymbol{BF}^+}(x_1)=\boldsymbol{B}^{-1}[\boldsymbol{BF}^-(x_1)+\overline{\boldsymbol{BF}^-(x_1)}]=\boldsymbol{0},\ z\in L'$$

按式(5-148)和(5-149)，在 L'' 上有

$$\boldsymbol{BF}^-(x_1)+\overline{\boldsymbol{BF}^-(x_1)}=\boldsymbol{BF}^-(x_1)+\overline{\boldsymbol{BF}^+}(x_1)=\boldsymbol{g},\ \boldsymbol{g}=[0,\ 0,\ 0,\ D_2^-(x_1)]$$

$$\boldsymbol{h}^+(x_1)-\boldsymbol{h}^-(x_1)=-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{g},\quad h_j^+-h_j^-=-B_{j4}^{-1}D_2^-(x_1),\ j=1-4,\ z\in L'' \tag{5-152}$$

式中 $D_2^-(x_1)$ 是待求的函数。上式是解耦的 Riemann-Hilbert 问题，其解为

$$\boldsymbol{h}(z)=-\boldsymbol{B}^{-1}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{L''}\frac{\boldsymbol{g}(x_1)}{x_1-z}\mathrm{d}x_1,\quad \boldsymbol{F}(z)=\boldsymbol{h}(z),\ z\in S^- \tag{5-153}$$

根据已有知识，预设

$$\begin{aligned}&D_2(z)=D_2^-(z)=P(z)/\prod_{i=1}^{n}\sqrt{(z-a_i)(z-b_i)},\ z\in S^-\\&P(z)=\mathrm{i}(\gamma_{n-1}z^{n-1}+\cdots+\gamma_1 z+\gamma_0)\end{aligned} \tag{5-154}$$

上式中的多值函数取分支：当 $z\to\infty$ 时，$\sqrt{(z-a_i)(z-b_i)}\to z$，$\gamma_i$ 是复常数，由式(5-149)确定。把式(5-154)代入(5-153)，便得

$$\begin{aligned}&F_j(z_j)=\frac{1}{2}B_{j4}^{-1}\frac{P(z_j)}{\prod\limits_{i=1}^{n}\sqrt{(z_j-a_i)(z_j-b_i)}},\ z\in S^-\\&f_j(z_j)=\frac{1}{2}B_{j4}^{-1}\int\frac{P(z_j)\mathrm{d}z_j}{\prod\limits_{i=1}^{n}\sqrt{(z_j-a_i)(z_j-b_i)}}+\frac{1}{2}\mathrm{i}CB_{j4}^{-1}\end{aligned} \tag{5-155}$$

式中 C 取常数。

按式(5-148)，在 L'' 有 $E_1=0$，因而有

$$\boldsymbol{AF}^-(x_1)+\overline{\boldsymbol{AF}^-(x_1)}=[*,\ *,\ *,\ 0],\ x_1\in L'' \tag{5-156}$$

式中 * 表示求解过程中并不出现的未知量。应用式(5-155)，在第 i 个电极，上式可以写成

$$\begin{aligned}&A_{4j}B_{j4}^{-1}\frac{\mathrm{i}P(x_1)}{\sqrt{(x_1-a_i)(b_i-x_1)}\prod\limits_{k=1,k\neq i}^{n}\sqrt{(x_1-a_k)(x_1-b_k)}}-\\&\overline{A_{4j}B_{j4}^{-1}}\frac{\mathrm{i}\,\overline{P(x_1)}}{\sqrt{(x_1-a_i)(b_i-x_1)}\prod\limits_{k=1,k\neq i}^{n}\sqrt{(x_1-a_k)(x_1-b_k)}}=0,\ x_1\in L''\end{aligned} \tag{5-157}$$

因为 $H_{44}=\mathrm{i}A_{4j}B_{j4}^{-1}$ 是实数，或 $A_{4j}B_{j4}^{-1}$ 是虚数，所以上式可以化为 $P(x_1)+\overline{P(x_1)}=0$，由此推出 $\gamma_i-\overline{\gamma_i}=0$，即 $P(z)$ 中的系数 γ_i 全是实数。

5.6.3 问题的解 待定系数的确定

广义应力为

$$\Sigma_{2k}=\mathrm{Re}\Big(\sum_{j=1}^{4}B_{kj}B_{j4}^{-1}\Big)\frac{P(z_j)}{\prod_{i=1}^{n}\sqrt{(z_j-a_i)(z_j-b_i)}} \tag{5-158}$$

广义位移为

$$u_k=2\mathrm{Re}[A_{kj}f_j(z_j)]=\mathrm{Re}\left\{A_{kj}B_{j4}^{-1}\left[\int\frac{P(z_j)\mathrm{d}z_j}{\prod_{i=1}^{n}\sqrt{(z_j-a_i)(z_j-b_i)}}+\mathrm{i}C\right]\right\} \tag{5-159}$$

如给定电极上的电荷，则把式(5－158)代入(5－149)，便得

$$\begin{gathered}\int_{a_i}^{b_i}\Sigma_{24}(x_1)\mathrm{d}x_1=\int_{a_i}^{b_i}D_2^-(x_1)\mathrm{d}x_1=\int_{a_i}^{b_i}\mathrm{Re}\frac{P(x_1)\mathrm{d}x_1}{\prod_{i=1}^{n}\sqrt{(x_1-a_i)(x_1-b_i)}}=\\ \int_{a_i}^{b_i}\frac{\mathrm{i}P(x_1)\mathrm{d}x_1}{\sqrt{(x_1-a_i)(b_i-x_1)}\prod_{k=1,\,k\neq i}^{n}\sqrt{(x_1-a_k)(x_1-b_k)}}=-q_i\end{gathered} \tag{5-160}$$

式中 n 个未知量 $\gamma_i(i=0,1,\cdots,n-1)$ 恰好由 n 个方程确定。特别当 $z\to\infty$ 时，按式(5－153)和(5－155)，分别有

$$\lim_{z\to\infty}F_4(z_4)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}z_4}B_{44}^{-1}\int_{L''}D_2(x_1)\mathrm{d}x_1,\quad \lim_{z\to\infty}F_4(z_4)=\frac{\mathrm{i}}{2z_4}B_{44}^{-1}\gamma_{n-1}$$

由此推出

$$\gamma_{n-1}=-\frac{1}{\pi}\int_{L''}D_2(x_1)\mathrm{d}x_1=-\frac{1}{\pi}(-Q)=\frac{Q}{\pi} \tag{5-161}$$

如给定电极上的电势，则把式(5－159)代入(5－149)，便得

$$\begin{gathered}(u_4)_i=\varphi_i=\mathrm{Re}\left\{\sum_{j=1}^{4}A_{4j}B_{j4}^{-1}\left[\int_{a_i}^{b_i}\frac{P(x_1)\mathrm{d}x_1}{\prod_{i=1}^{n}\sqrt{(x_1-a_i)(x_1-b_i)}}+\mathrm{i}C\right]\right\}=\\ H_{44}\mathrm{Im}\int_{a_i}^{b_i}\frac{P(x_1)\mathrm{d}x_1}{\prod_{i=1}^{n}\sqrt{(x_1-a_i)(x_1-b_i)}}+H_{44}C=V_i\\ \sum_{i=1}^{n}\int_{a_i}^{b_i}D_2(x_1)\mathrm{d}x_1=\sum_{i=1}^{n}\int_{a_i}^{b_i}\int_{a_i}^{b_i}\mathrm{Re}\frac{P(x_1)\mathrm{d}x_1}{\prod_{i=1}^{n}\sqrt{(x_1-a_i)(x_1-b_i)}}\mathrm{d}x_1=-Q\end{gathered} \tag{5-162}$$

式中 $n+1$ 个未知量 $\gamma_i(i=0,1,\cdots,n-1)$ 和 C，恰好由 $n+1$ 个方程确定。

如果给定电极上的电荷的问题已解决，则可求出全场的 E_1。如设电极 1 $(a_1\leqslant x_1\leqslant b_1,\ x_2=0)$ 上的电势 $\varphi_1=V_0$，则任一电极 $i(a_i\leqslant x_1\leqslant b_i,\ x_2=0)$ 上的电势 φ_i 为

$$\varphi_i = \varphi_{i-1} + \int_{b_{i-1}}^{a_i} E_1 \mathrm{d}x_1, \; i = 2, 3, \cdots, n \tag{5-163}$$

可见边界条件(5-149)中的两个边界条件是等价的。

5.6.4 特殊情形

1) 单个电极

坐标原点取在电极的中间,即 $a_1 = -a$, $b_1 = a$,利用式(5-161),则式(5-155)化为

$$\begin{aligned} F_j(z_j) &= \frac{1}{2} B_{j4}^{-1} \frac{P(z_j)}{\sqrt{z_j^2 - a^2}} = B_{j4}^{-1} \frac{q\mathrm{i}}{2\pi \sqrt{z_j^2 - a^2}} \\ f_j(z_j) &= \frac{q\mathrm{i}}{2\pi} B_{j4}^{-1} \left[\ln(z_j + \sqrt{z_j^2 - a^2}) + \ln \widetilde{C} \right] \end{aligned} \tag{5-164}$$

式中$\widetilde{C}$是一个实常数。令电极上的电势 $\varphi = V_0$,则有

$$\varphi = 2\mathrm{Re}[A_{4j} f_j(z_j)] = \mathrm{Re}\left\{ \frac{q\mathrm{i}}{\pi} A_{4j} B_{j4}^{-1} \left[\ln(x_1 - \mathrm{i}\sqrt{a^2 - x_1^2}) + \ln \widetilde{C} \right] \right\} = V_0$$

因为 $H_{44} = \mathrm{i} A_{4j} B_{j4}^{-1}$ 是实数,$\ln(x_1 - \mathrm{i}\sqrt{a^2 - x_1^2})$的实数部分是 $\ln a$,所以由上式推出

$$H_{44} \frac{q}{\pi} \ln a \widetilde{C} = V_0, \quad 或 \widetilde{C} = \frac{1}{a} \exp\left(\frac{\pi V_0}{q H_{44}} \right) \tag{5-165}$$

从而电势为

$$\varphi = H_{44} \frac{q}{\pi} \mathrm{Re}\left[\ln \frac{1}{a} (z_j + \sqrt{z_j^2 - a^2}) \right] + V_0 \tag{5-166}$$

相应地,广义应力为

$$\Sigma_{2k} = -\frac{q}{\pi} \mathrm{Im}\left(\sum_{j=1}^{4} B_{kj} B_{j4}^{-1} \frac{1}{\sqrt{z_j^2 - a^2}} \right), \quad \Sigma_{1k} = \frac{q}{\pi} \mathrm{Im}\left(\sum_{j=1}^{4} B_{kj} B_{j4}^{-1} \frac{\mu_j}{\sqrt{z_j^2 - a^2}} \right) \tag{5-167}$$

对于没有压电和弹性效应的电介质,此时按式(4-16),$\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{T}$ 只有下述分量

$$Q_{44} = -\epsilon_{11}, \quad R_{44} = -\epsilon_{12}, \quad T_{44} = -\epsilon_{22}$$

在这种情形下,式(4-14)和(4-15)简化为

$$(\epsilon_{11} + 2\mu_4 \epsilon_{12} + \mu_4^2 \epsilon_{22}) a_4 = 0, \; \mu_4 = (-\epsilon_{12} + \mathrm{i}\sqrt{\epsilon_{11}\epsilon_{22} - \epsilon_{12}^2}) / \epsilon_{22}$$

同时 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ 也都只有一个分量

$$A_{44} = -\mathrm{i}\sqrt{\epsilon_{11}\epsilon_{22} - \epsilon_{12}^2}, \quad B_{44} = -(\epsilon_{12} + \mu_4 \epsilon_{22})$$

从而 $H_{44} = -(\epsilon_{11}\epsilon_{22} - \epsilon_{12}^2)^{-1/2} < 0$。最终得

$$F_4(z_4) = B_{44}^{-1} \frac{q\mathrm{i}}{2\pi\sqrt{z_4^2 - a^2}}, \quad \varphi = V_0 - H_{44}\frac{q}{\pi\sqrt{\epsilon_{11}\epsilon_{22} - \epsilon_{12}^2}}\mathrm{Re}\left[\ln\frac{1}{a}\left(z_4 + \sqrt{z_4^2 - a^2}\right)\right] \tag{5-168}$$

对于各向同性电介质，$\epsilon_{ij} = \epsilon\,\delta_{ij}$，从而有

$$\varphi = V_0 - \frac{q}{\pi\epsilon}\mathrm{Re}\left[\ln\frac{1}{a}\left(z + \sqrt{z^2 - a^2}\right)\right] \tag{5-169}$$

上式和电学教科书上的结果一致。

2) **两个电极**

图 5-12 表示两个电极 1 和 2 的位置 a_1，b_1，a_2，b_2 分别位于-0.03 m，-0.01 m，0.01 m，0.03 m。

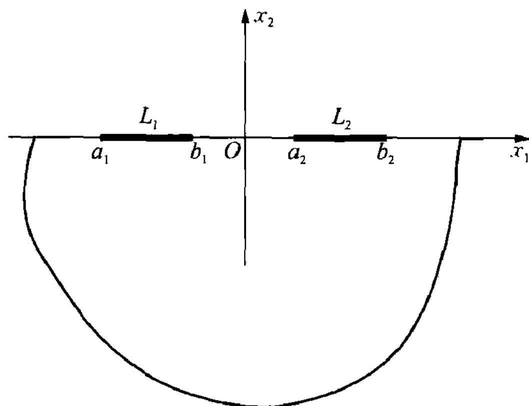
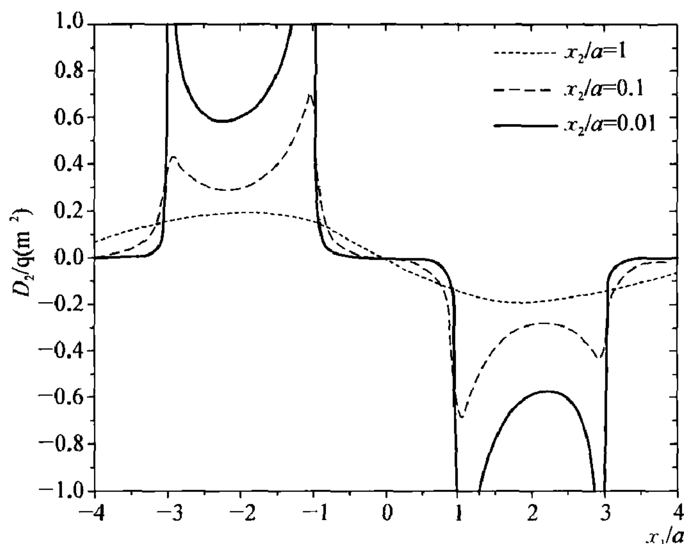


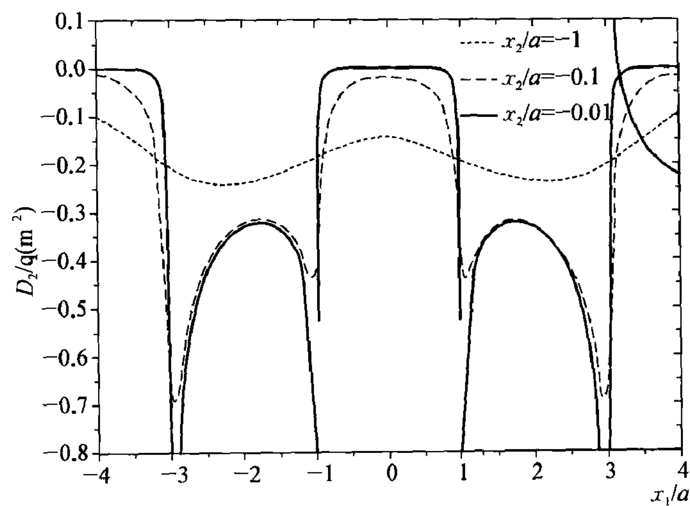
图 5-12 两个共线表面电极

情形 1：左边电极 1 上给定电量$-q$，右边电极 2 上给定电量 q。由式(5-144)知，$P(z) = \mathrm{i}(\gamma_1 z + \gamma_0)$。由式(5-161)知，$\gamma_1 = 0$，由数值方法得到 $\gamma_0 = 1.146\,9q$。若令电极 1 上 $\varphi_1 = V_0$，那么数值计算给出电极 2 上的电势为 $\varphi_2 = V_0 - \int_{-0.01}^{0.01} E_1 \mathrm{d}x_1 = V_0 + 1.070\,7q$。

情形 2：两个电极上都给定电量 q。由式(5-154)知，$P(z) = \mathrm{i}(\gamma_1 z + \gamma_0)$。由式(5-161)知，$\gamma_1 = 2q/\pi$，根据对称性知，$\gamma_0 = 0$。两种情况下的 PZT-5H 材料的 D_2/q，D_1/q，σ_{21}/q，σ_{22}/q 相对于 x_1/a，a=0.01 m 的分布分别示于图 5-13～5-16。由图可见，对于情形 1，D_2，σ_{22}相对于 x_1/a 是反对称的，D_1，σ_{12}相对于 x_1/a 是对称的；对于情形 2，D_1，σ_{12}相对于 x_1/a 是反对称的，D_2，σ_{22}相对于 x_1/a 是对称的。在电极端点出都存在 $1/\sqrt{r}$ 奇异性。



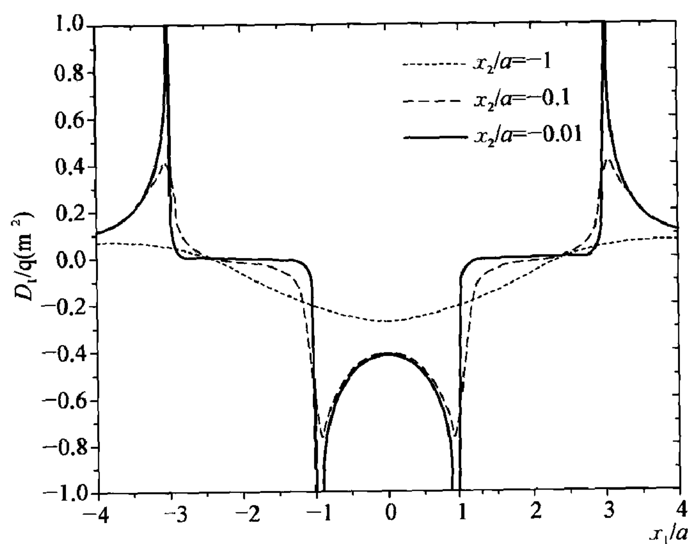
(a)



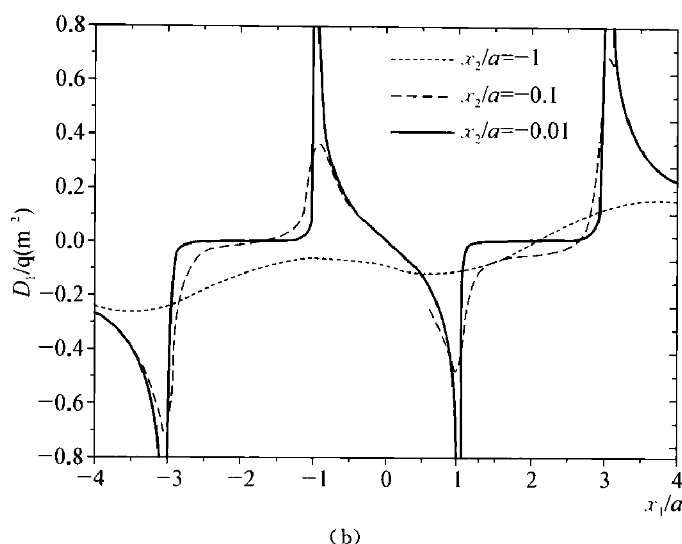
(b)

图 5－13　量纲一电位移 D_2/q 随量纲一轴向距离 x_1/a 的分布

(a) 情形 1；(b) 情形 2



(a)



(b)

图 5 - 14 量纲一电位移 D_1/q 随量纲一轴向距离 x_1/a 的分布

(a) 情形 1；(b) 情形 2

5.7 含平行边界裂纹的条形压电介质中的动态响应

5.7.1 基本公式与 Laplace 变换

图 5 - 15 表示一高 $2h$ 的条形横观各向同性压电介质，在其中央有一平行边界的长 $2a$ 的裂纹，坐标原点取在裂纹中点，x_1 轴沿裂纹方向，x_3 轴垂直裂纹，裂纹面上作用有突加广义载荷 $-\sigma_0 \mathrm{H}(t)$，$-D_0 \mathrm{H}(t)$，其中 $\mathrm{H}(t)$ 为 Heaviside 阶跃函数。极化方向沿 x_3 轴，因此在 x_1x_3 平面内存在面内广义位移(u_1，u_3，φ)和广义应力(σ_1，σ_3，σ_5，D_1，D_3)。采用 Voigt 紧缩符号，按式(3 - 31)，本构方程为

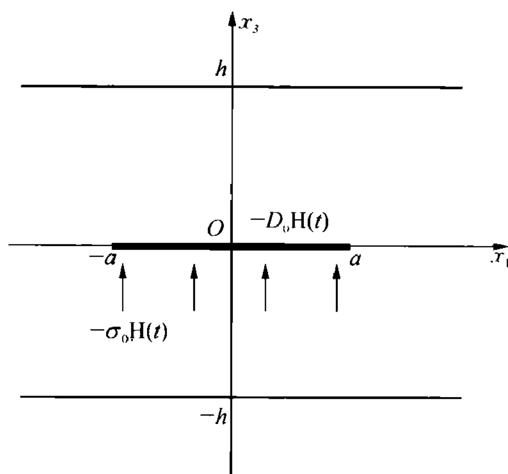


图 5 - 15 含裂纹的条形压电介质承受动态载荷

$$
\begin{aligned}
\sigma_1 &= C_{11}\varepsilon_1 + C_{13}\varepsilon_3 - e_{31}E_3 \\
\sigma_3 &= C_{13}\varepsilon_1 + C_{33}\varepsilon_3 - e_{33}E_3 \\
\sigma_5 &= C_{44}\varepsilon_5 - e_{15}E_1 \\
D_1 &= \epsilon_{11}E_1 + e_{15}\varepsilon_5 \\
D_3 &= \epsilon_{33}E_3 + e_{31}\varepsilon_1 + e_{33}\varepsilon_3
\end{aligned}
\tag{5-170}
$$

代入运动方程，利用广义应变位移关系，得用广义位移表示的运动方程为

$$
\begin{aligned}
&C_{11}u_{1,11}+C_{44}u_{1,33}+(C_{13}+C_{44})u_{3,13}+(e_{31}+e_{15})\varphi_{,13}=\rho\ddot{u}_1\\
&(C_{13}+C_{44})u_{1,13}+C_{44}u_{3,11}+C_{33}u_{3,33}+e_{15}\varphi_{,11}+e_{33}\varphi_{,33}=\rho\ddot{u}_3\\
&(e_{31}+e_{15})u_{1,13}+e_{15}u_{3,11}+e_{33}u_{3,33}-\epsilon_{11}\varphi_{,11}-\epsilon_{33}\varphi_{,33}=0
\end{aligned}
\tag{5-171}
$$

力学边界条件和电学绝缘条件是

$$
\begin{aligned}
&\sigma_3(x_1,0,t)=-\sigma_0\mathrm{H}(t),\quad D_3(x_1,0,t)=-D_0\mathrm{H}(t),\ -a<x_1<a\\
&u_3(x_1,0,t)=\varphi(x_1,0,t)=0,\ a<|x_1|<\infty,\quad \sigma_5(x_1,0,t)=0,\ -\infty<x_1<\infty\\
&\sigma_3(x_1,\pm h/2,t)=\sigma_5(x_1,\pm h/2,t)=D_2(x_1,\pm h/2,t)=0,\ -\infty<x_1<\infty
\end{aligned}
\tag{5-172}
$$

采用 Laplace 变换法[15]解上述问题。引入任一函数 $f(x_1, x_3, t)$的 Laplace 变换$\overline{f}(x_1, x_3, p)$($\overline{f}$不要和$f$的共轭函数混淆)

$$
\overline{f}(x_1,x_3,p)=\int_0^\infty f(x_1,x_3,t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t \tag{5-173a}
$$

称 $f(x_1, x_3, t)$为原函数,$\overline{f}(x_1, x_3, p)$为像函数,其中 $p=\alpha+\mathrm{i}\beta$ 为复数。数学研究表明,像函数是半平面 $\mathrm{Re}p>\alpha_0$ 上的解析函数,其中 α_0 是 $f(t)$的增长指数。它的反变换为

$$
f(x_1,x_3,t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\alpha-\mathrm{i}\infty}^{\alpha+\mathrm{i}\infty}\overline{f}(x_1,x_3,p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p \tag{5-173b}
$$

式中积分路径称为 Bromwich 积分路径。在 Laplace 变换域中有

$$
\int_0^\infty(\partial f^n/\partial t^n)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t=p^n[\overline{f}(p)-f(0)/p-f'(0)/p^2-\cdots-f^{(n)}(0)/p^n] \tag{5-173c}
$$

当各阶导数初始值均为零时,基本方程式(5-170)、(5-171)和(5-172)分别化为

$$
\begin{aligned}
&\overline{\sigma}_1=C_{11}\overline{\varepsilon}_1+C_{13}\overline{\varepsilon}_3-e_{31}\overline{E}_3,\quad \overline{\sigma}_3=C_{13}\overline{\varepsilon}_1+C_{33}\overline{\varepsilon}_3-e_{33}\overline{E}_3,\quad \overline{\sigma}_5=C_{44}\overline{\varepsilon}_5-e_{15}\overline{E}_1\\
&\overline{D}_1=\epsilon_{11}\overline{E}_1+e_{15}\overline{\varepsilon}_5,\quad \overline{D}_3=\epsilon_{33}\overline{E}_3+e_{31}\overline{\varepsilon}_1+e_{33}\overline{\varepsilon}_3
\end{aligned}
\tag{5-174}
$$

$$
\begin{aligned}
&C_{11}\overline{u}_{1,11}+C_{44}\overline{u}_{1,33}+(C_{13}+C_{44})\overline{u}_{3,13}+(e_{31}+e_{15})\overline{\varphi}_{,13}=\rho p^2\overline{u}_1\\
&(C_{13}+C_{44})\overline{u}_{1,13}+C_{44}\overline{u}_{3,11}+C_{33}\overline{u}_{3,33}+e_{15}\overline{\varphi}_{,11}+e_{33}\overline{\varphi}_{,33}=\rho p^2\overline{u}_3\\
&(e_{31}+e_{15})\overline{u}_{1,13}+e_{15}\overline{u}_{3,11}+e_{33}\overline{u}_{3,33}-\epsilon_{11}\overline{\varphi}_{,11}-\epsilon_{33}\overline{\varphi}_{,33}=0
\end{aligned}
\tag{5-175}
$$

$$
\begin{aligned}
&\overline{\sigma}_3=-\sigma_0/p,\quad \overline{D}_3=-D_0/p,\ -a<x_1<a,\ x_3=0\\
&\overline{u}_3=\overline{\varphi}=0,\ a<|x_1|<\infty,\ x_3=0;\quad \overline{\sigma}_5=0,\ -\infty<x_1<\infty,\ x_3=0\\
&\overline{\sigma}_3=\overline{\sigma}_5=\overline{D}_3=0,\ -\infty<x_1<\infty,\ x_3=\pm h/2
\end{aligned}
\tag{5-176}
$$

5.7.2 求解方法

考虑到问题对 $x_1=0$ 是对称的,对 $x_3=0$ 是反对称的,Wang 和 Yu[69]取用下列 Fourier 余弦和正弦积分作为 Laplace 变换函数的解

$$
\begin{aligned}
\overline{u}_1 &= (2/\pi)\sum_{j=1}^{6}\int_0^{\infty} p_j A_j(\xi)\mathrm{e}^{-\gamma_j x_3}\sin(\xi x_1)\mathrm{d}\xi \\
\overline{u}_3 &= (2/\pi)\sum_{j=1}^{6}\int_0^{\infty} a_j A_j(\xi)\mathrm{e}^{-\gamma_j x_3}\cos(\xi x_1)\mathrm{d}\xi \\
\overline{\varphi} &= (2/\pi)\sum_{j=1}^{6}\int_0^{\infty} b_j A_j(\xi)\mathrm{e}^{-\gamma_j x_3}\cos(\xi x_1)\mathrm{d}\xi
\end{aligned}
\tag{5-177}
$$

式中 $A_j(\xi)$ $(j=1\sim6)$为由边界条件确定的待定函数。代入运动方程(5－175)，便得

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{6}\int_0^{\infty} A_j(\xi)\mathrm{e}^{-\gamma_j x_3}\sin(\xi x_1)\,[(-C_{11}\xi^2+C_{44}\gamma_j^2-\rho p^2)\,p_j+ \\
&\quad (C_{13}+C_{44})\xi\gamma_j a_j+(e_{31}+e_{15})\gamma_j b_j\xi]\mathrm{d}\xi=0 \\
&\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{6}\int_0^{\infty} A_j(\xi)\mathrm{e}^{-\gamma_j x_3}\cos(\xi x_1)\,[-(C_{13}+C_{44})\xi\gamma_j\,p_j+ \\
&\quad (C_{33}\gamma_j^2-C_{44}\xi^2-\rho p^2)a_j+(e_{33}\gamma_j^2-e_{15}\xi^2)b_j]\mathrm{d}\xi=0 \\
&\frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{6}\int_0^{\infty} A_j(\xi)\mathrm{e}^{-\gamma_j x_3}\cos(\xi x_1)\,[-(e_{31}+e_{15})\xi\gamma_j\,p_j+ \\
&\quad (e_{33}\gamma_j^2-\xi^2 e_{15})a_j+(\varepsilon_{11}\xi^2-\varepsilon_{33}\gamma_j^2)b_j]\mathrm{d}\xi=0
\end{aligned}
\tag{5-178}
$$

要上式有解，必须

$$
\begin{aligned}
&(-C_{11}\xi^2+C_{44}\gamma_j^2-\rho p^2)\,p_j+(C_{13}+C_{44})\xi\gamma_j a_j+(e_{31}+e_{15})\gamma_j b_j\xi=0 \\
&(C_{13}+C_{44})\xi\gamma_j\,p_j+(C_{33}\gamma_j^2-C_{44}\xi^2-\rho p^2)a_j+(e_{33}\gamma_j^2-e_{15}\xi^2)b_j=0 \\
&(e_{31}+e_{15})\xi\gamma_j\,p_j+(e_{33}\gamma_j^2-\xi^2 e_{15})a_j+(\varepsilon_{11}\xi^2-\varepsilon_{33}\gamma_j^2)b_j=0
\end{aligned}
\tag{5-179}
$$

由此推出p_j，a_j，b_j 前的系数行列式必须为零，即

$$
\begin{vmatrix}
C_{44}\gamma^2-C_{11}\xi^2-\rho p^2 & (C_{13}+C_{44})\xi\gamma & (e_{31}+e_{15})\gamma\xi \\
-(C_{13}+C_{44})\xi\gamma & C_{33}\gamma^2-C_{44}\xi^2-\rho p^2 & e_{33}\gamma^2-e_{15}\xi^2 \\
-(e_{31}+e_{15})\xi\gamma & e_{33}\gamma^2-\xi^2 e_{15} & \varepsilon_{11}\xi^2-\varepsilon_{33}\gamma^2
\end{vmatrix}=0
\tag{5-180}
$$

上式是 γ 的 6 次方程，正好确定 6 个根 $\gamma_j(j=1\sim6)$，这正是式(5－177)对 $j=1\sim6$ 取和的原因。不失一般性，令 $p_j=1$，由式(5－179)便可确定 a_j，b_j，它们为

$$
\begin{aligned}
&a_j=\frac{\Delta_a(\gamma_j)}{\Delta_0(\gamma_j)},\quad b_j=\frac{\Delta_b(\gamma_j)}{\Delta_0(\gamma_j)} \\
&\Delta_a(\gamma_j)=(C_{11}\xi^2-C_{44}\gamma_j^2+\rho p^2)(e_{33}\gamma_j^2-e_{15}\xi^2)-(C_{13}+C_{44})(e_{31}+e_{15})\xi^2\gamma_j^2 \\
&\Delta_b(\gamma_j)=(C_{13}+C_{44})^2\xi^2\gamma_j^2-(C_{11}\xi^2-C_{44}\gamma_j^2+\rho p^2)(C_{33}\gamma_j^2-C_{44}\xi^2-\rho p^2) \\
&\Delta_0(\gamma_j)=[(C_{13}+C_{44})(e_{33}\gamma_j^2-e_{15}\xi^2)-(e_{31}+e_{15})(C_{33}\gamma_j^2-C_{44}\xi^2-\rho p^2)]\xi\gamma_j
\end{aligned}
\tag{5-181}
$$

再应用边界条件，便可确定待定函数 $A_j(\xi)(j=1\sim6)$。

5.7.3 奇异积分方程和解

根据反对称性，在裂纹面上，$\overline{u}_{3,1}^{-}=-\overline{u}_{3,1}^{+}$，$\Delta\overline{u}_{3,1}=\overline{u}_{3,1}^{+}-\overline{u}_{3,1}^{-}=2\overline{u}_{3,1}^{+}$，式中$\overline{u}_3^{+}=u_3(x_1,$

0^+, p)，对电势有类似的表达式。为得到问题的积分方程，引入半广义位错密度函数

$$f(x_1, p) = \begin{cases} \bar{u}^+_{3,1}, & -a < x_1 < a, \\ 0, & a \leqslant |x_1| < \infty; \end{cases} \quad g(x_1, p) = \begin{cases} \bar{\varphi}^+_{,1}, & -a < x_1 < a, \\ 0, & a \leqslant |x_1| < \infty \end{cases} \tag{5-182a}$$

以后记 $\bar{u}^+_{3,1} = \bar{u}_{3,1}$。绕裂纹一周的广义位移单值性条件要求

$$\int_a^b f(u, p)\mathrm{d}u = 0, \quad \int_a^b g(u, p)\mathrm{d}u = 0 \tag{5-182b}$$

把式(5-177)代入(5-174)，再代入边界条件式(5-176)，并应用式(5-182)，在区间 $0<x_1<a$，便得到下述积分方程[70]

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha_1}{\pi}\int_0^a \frac{f(u, p)}{u-x_1}\mathrm{d}u + \frac{\alpha_2}{\pi}\int_0^a \frac{g(u, p)}{u-x_1}\mathrm{d}u + \frac{1}{\pi}\int_0^a [Q_{11}(u, x_1)f(u, p) + Q_{12}(u, x_1)g(u, p)]\mathrm{d}u = -\frac{\sigma_0}{p} \\ &\frac{\alpha_3}{\pi}\int_0^a \frac{f(u, p)}{u-x_1}\mathrm{d}u + \frac{\alpha_4}{\pi}\int_0^a \frac{g(u, p)}{u-x_1}\mathrm{d}u + \frac{1}{\pi}\int_0^a [Q_{21}(u, x_1)f(u, p) + Q_{22}(u, x_1)g(u, p)]\mathrm{d}u = -\frac{D_0}{p} \end{aligned} \tag{5-183}$$

式中

$$Q_{ij}(u, x_1) = \int_0^\infty 2[P_{ij}(\xi, p) - \alpha_{ij}]\cos(\xi x_1)\sin(\xi u)\mathrm{d}\xi + \frac{\alpha_{ij}}{u+x_1}, \ i, j = 1, 2 \tag{5-184}$$

$$\alpha_{11} = \alpha_1, \ \alpha_{12} = \alpha_2, \ \alpha_{21} = \alpha_3, \ \alpha_{22} = \alpha_4$$

和

$$\begin{aligned} &P_{11}(\xi, p) = \sum_{j=1}^{6} \frac{C_{33}\gamma_j a_j + e_{33}\gamma_j b_j - C_{13}\xi}{\xi\Delta(\xi, p)}\Delta_{j1}(\xi, p) \\ &P_{12}(\xi, p) = \sum_{j=1}^{6} \frac{C_{33}\gamma_j a_j + e_{33}\gamma_j b_j - C_{13}\xi}{\xi\Delta(\xi, p)}\Delta_{j2}(\xi, p) \\ &P_{21}(\xi, p) = \sum_{j=1}^{6} \frac{e_{33}\gamma_j a_j + \varepsilon_{33}\gamma_j b_j - e_{13}\xi}{\xi\Delta(\xi, p)}\Delta_{j1}(\xi, p) \\ &P_{22}(\xi, p) = \sum_{j=1}^{6} \frac{e_{33}\gamma_j a_j + \varepsilon_{33}\gamma_j b_j - e_{13}\xi}{\xi\Delta(\xi, p)}\Delta_{j2}(\xi, p) \\ &\Delta(\xi, p) = \det[M_{ij}], \ M_{1j} = a_j, \ M_{2j} = b_j \\ &M_{3j} = -[C_{44}(\gamma_j + a_j\xi) + e_{15}b_j\xi], \ M_{4j} = -[C_{44}(\gamma_j + a_j\xi) + e_{15}b_j\xi]\mathrm{e}^{-\gamma_j h} \\ &M_{5j} = [C_{31}\xi - C_{33}\gamma_j a_j - e_{33}\gamma_j b_j]\mathrm{e}^{-\gamma_j h}, \ M_{6j} = [e_{31}\xi - e_{33}\gamma_j a_j + \varepsilon_{33}\gamma_j b_j]\mathrm{e}^{-\gamma_j h} \end{aligned} \tag{5-185}$$

式中 $\Delta_{jn}(j = 1 \sim 6, n = 1, 2)$ 是行列式 $|M_{ij}|$ 的元素 M_{nj} 的余子式。

为了可以应用一些标准的数值解法，引入量纲为一的变量

$$\frac{u}{a} = \frac{\rho+1}{2}, \quad \frac{x_1}{a} = \frac{r+1}{2} \tag{5-186}$$

从而式(5-183)可以改写为

$$\frac{\alpha_1}{\pi}\int_{-1}^1 \frac{F(\rho, p)}{\rho - r}\mathrm{d}\rho + \frac{\alpha_2}{\pi}\int_1^1 \frac{V(\rho, p)}{\rho - r}\mathrm{d}\rho + \frac{1}{\pi}\int_0^a [\hat{Q}_{11}(\rho, r)F(\rho, p) + \hat{Q}_{12}(\rho, r)V(\rho, p)]\mathrm{d}\rho = -\frac{\sigma_0}{p}$$

$$\frac{\alpha_3}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{F(\rho,\ p)}{\rho-r}\mathrm{d}\rho+\frac{\alpha_4}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{V(\rho,\ p)}{\rho-r}\mathrm{d}\rho+\frac{1}{\pi}\int_0^a[\hat{Q}_{21}(\rho,\ r)F(\rho,\ p)+\hat{Q}_{22}(\rho,\ r)V(\rho,\ p)]\mathrm{d}\rho=-\frac{D_0}{p} \tag{5-187}$$

式中$-1<r<1$和

$$F(\rho,\ p)=f\left(\frac{\rho+1}{2}a,\ p\right),\ V(\rho,\ p)=g\left(\frac{\rho+1}{2}a,\ p\right),\ \hat{Q}_{ij}(\rho,\ r)=\frac{a}{2}Q_{ij}\left(\frac{\rho+1}{2}a,\frac{r+1}{2}a\right) \tag{5-188}$$

为应用数值解法[70],再令

$$F(\rho,\ p)=\frac{R(\rho,\ p)}{\sqrt{1-\rho^2}},\quad V(\rho,\ p)=\frac{T(\rho,\ p)}{\sqrt{1-\rho^2}} \tag{5-189}$$

把$R(\rho,\ p)$,$T(\rho,\ p)$展成 Chebyshev 多项式

$$R(\rho,\ p)=\sum_{i=0}^{\infty}C_iT_i(\rho),\quad T(\rho,\ p)=\sum_{i=0}^{\infty}D_iT_i(\rho) \tag{5-190}$$

利用 Gauss - Chebyshev 公式,可得一组线性代数方程组

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\left\{\left[\frac{\alpha_1}{\rho_k-r_m}+\hat{Q}_{11}(\rho_k,\ r_m)\right]\frac{R(\rho_1,\ p)}{n}+\left[\frac{\alpha_2}{\rho_k-r_m}+\hat{Q}_{12}(\rho_k,\ r_m)\right]\frac{T(\rho_1,\ p)}{n}\right\}=-\frac{\sigma_0}{p}\\&\sum_{k=1}^{n}\left\{\left[\frac{\alpha_3}{\rho_k-r_m}+\hat{Q}_{21}(\rho_k,\ r_m)\right]\frac{R(\rho_1,\ p)}{n}+\left[\frac{\alpha_4}{\rho_k-r_m}+\hat{Q}_{22}(\rho_k,\ r_m)\right]\frac{T(\rho_1,\ p)}{n}\right\}=-\frac{D_0}{p}\end{aligned} \tag{5-191}$$

式中

$$\begin{aligned}&T_n(\rho_k)=0,\ \rho_k=\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right)\\&U_n(r_k)=0,\ r_k=\cos\left(\frac{k}{n+1}\pi\right),\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n\end{aligned} \tag{5-192}$$

因为$f(x_1,\ p)$,$g(x_1,\ p)$是x_1的奇函数,故$f(0,\ p)=g(0,\ p)=0$,或$R(-1,\ p)=T(-1,\ p)=0$,进而推出$R(\rho_n,\ p)=T(\rho_n,\ p)=0$,因为在$n\to\infty$的极限的意义上,$\rho_n$是$\rho_1$中最接近$-1$的量[70,71]。从而式(5-191)构成$2(n-1)\times2(n-1)$个变量$R(\rho_k,\ p)$,$T(\rho_k,\ p)$的$2(n-1)\times2(n-1)$个方程,故可解。

在 Laplace 变换域中,动应力和电位移强度因子为

$$\overline{K}_{\mathrm{I}}(p)=\lim_{x\to a^+}\sqrt{2\pi(x_1-a)}\,\bar{\sigma}_3(x_1,\ 0,\ p),\quad \overline{K}_{\mathrm{D}}(p)=\lim_{x\to a^+}\sqrt{2\pi(x_1-a)}\,\overline{D}_3(x_1,\ 0,\ p) \tag{5-193}$$

利用 Chebyshev 多项式的下列性质

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(u)\mathrm{d}u}{(u-x_1)\sqrt{1-u^2}}=-\frac{|x_1|}{x_1\sqrt{x_1^2-1}}\left(x_1-\frac{|x_1|\sqrt{x_1^2-1}}{x_1}\right)^n,\ |x_1|>1,\ n=0,\ 1,\ \cdots \tag{5-194}$$

得到

$$\overline{K}_{\mathrm{I}}(p)=-\sqrt{\frac{\pi a}{2}}[\alpha_1 R(1,\ p)+\alpha_2 T(1,\ p)],\quad \overline{K}_{\mathrm{D}}(p)=-\sqrt{\frac{\pi a}{2}}[\alpha_3 R(1,\ p)+\alpha_4 T(1,\ p)] \tag{5-195}$$

Laplace 变换的反演用数值方法进行。求出 $K_{\mathrm{I}}(t)$，$K_{\mathrm{D}}(t)$后，裂尖广义应力和位移场可写成

$$\sigma_3(x_1,\ 0,\ t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(x_1-a)}}K_{\mathrm{I}}(t),\quad D_3(x_1,\ 0,\ t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(x_1-a)}}K_{\mathrm{D}}(t)$$

$$\begin{Bmatrix} u_3(x_1,\ 0,\ t) \\ \varphi(x_1,\ 0,\ t) \end{Bmatrix}=\frac{\sqrt{2\pi(a-x_1)}}{\alpha_2\alpha_3-\alpha_1\alpha_4}\begin{bmatrix} -\alpha_4 & \alpha_2 \\ \alpha_3 & -\alpha_1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} K_{\mathrm{I}}(t) \\ K_{\mathrm{D}}(t) \end{Bmatrix} \tag{5-196}$$

能量释放率 G 为

$$G\mathrm{d}a=2\int_a^{a+\mathrm{d}a}\frac{1}{2}[\sigma_3(x_1,\ 0,\ t),\ D_3(x_1,\ 0,\ t)]\begin{Bmatrix} u_3(x_1-\mathrm{d}a,\ 0,\ t) \\ \varphi(x_1-\mathrm{d}a,\ 0,\ t) \end{Bmatrix}\mathrm{d}x_1= \tag{5-197}$$

$$[\pi/2(\alpha_2\alpha_3-\alpha_1\alpha_4)][-\alpha_4 K_{\mathrm{I}}^2(t)+2\alpha_2\alpha_3 K_{\mathrm{I}}(t)K_{\mathrm{D}}(t)-\alpha_1 K_{\mathrm{D}}^2(t)]$$

5.7.4 数值例题

取用 PZT－5H,其材料性质如下

$$C_{11}=12.6\times10^{10},\ C_{13}=5.3\times10^{10},\ C_{33}=11.7\times10^{10},\ C_{44}=3.53\times10^{10}(\mathrm{N/m^2})$$

$$e_{31}=-6.5,\ e_{33}=23.3,\ e_{21}=17.0(\mathrm{C/m^2})$$

$$\epsilon_{11}=15.1\times10^{-9},\ \epsilon_{33}=13.0\times10^{-9}(\mathrm{C/Vm}),\quad \rho=7\,500\ (\mathrm{kg/m^3})$$

解出的 α_j 值为

$$\alpha_1=5.094\times10^{10},\quad \alpha_2=14.216,\quad \alpha_3=14.216,\quad \alpha_4=-178.769\times10^{10}$$

图 5－16 和 5－17 分别表示 $h/a=1.25$、载荷组合参数 $\lambda=-D_0\alpha_2/\sigma_0\alpha_4$ 取不同值时的量纲一

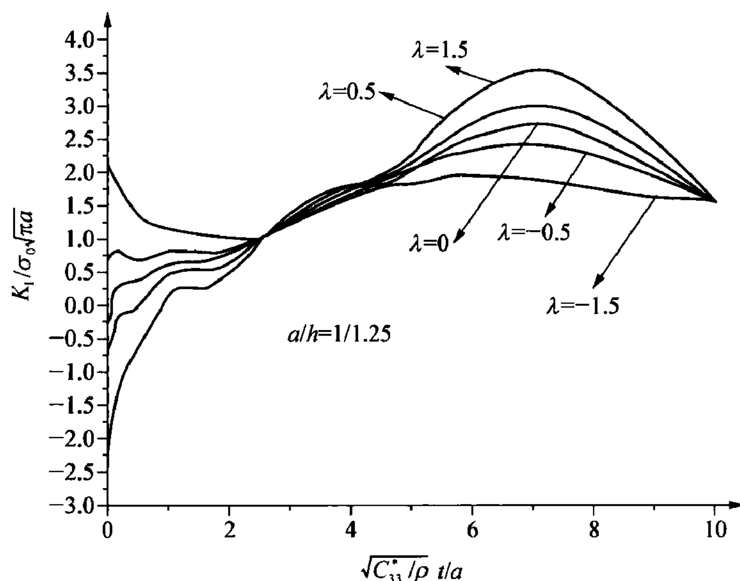


图 5－16　量纲一动态应力强度因子随量纲一时间的变化

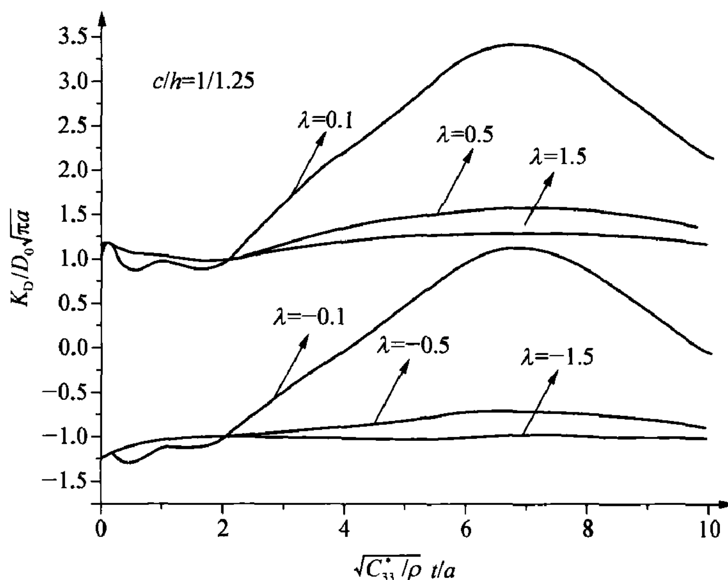


图 5-17 量纲一动态电位移强度因子随量纲一时间的变化

的动态应力强度因子 $K_{\mathrm{I}}/\sigma_0\sqrt{a}$ 和动态电位移强度因子 $K_{\mathrm{D}}/D_0\sqrt{a}$ 随量纲一的时间 $\sqrt{C_{33}^*/\rho}\,t/a$ 的变化，其中 $C_{33}^*=C_{33}+e_{33}^2/\epsilon_{33}$。由图可见，广义动态应力强度因子先随时间增加，达到峰值后下降，经过很长时间后回到静态值。

5.8 用 Chebyshev 多项式数值求解一类奇异积分方程[15, 72, 73]

5.8.1 Chebyshev 多项式

1）基本性质

Chebyshev 多项式是带权的正交多项式，分为两类，第一类的权为 $\rho(x)=(1-x^2)^{-1/2}$，记为 $T_n(x)$；第二类的权为 $\rho(x)=(1-x^2)^{1/2}$，记为 $U_n(x)$。

$$T_n(x)=\cos n\theta,\quad U_n(x)=\sin(n+1)\theta/\sin\theta,\quad \theta=\arccos x \tag{5-198}$$

$T_n(x)$ 和 $U_n(x)$ 在区间 $[-1,\ 1]$ 都有 n 个零点，它们分别为

$$T_n(x):x_k=\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right),\quad U_n(x):x_k=\cos\left(\frac{k}{n+1}\pi\right),\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n \tag{5-199}$$

递推关系为

$$\begin{aligned}&T_0(x)=1,\ T_1(x)=x,\ T_{n+1}(x)=2xT_n(x)-T_{n-1}(x)\\&U_0(x)=1,\ U_1(x)=2x,\ U_{n+1}(x)=2xU_n(x)-U_{n-1}(x)\\&U_{n-i-1}(x)=T_i(x)U_{n-1}(x)-T_n(x)U_{i-1}(x)\end{aligned} \tag{5-200}$$

2）两类积分

工程中常常遇到下述两类奇异积分

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}(t-x)},\quad \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}f(t)\mathrm{d}t}{t-x},\ |x|\leqslant 1 \tag{5-201}$$

式中 $f(t)$ 满足 HÖlder 条件,积分为 Cauchy 主值积分。利用围线积分和留数定理,可以证明对上述两种积分存在下列关系[73]

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}(t-x)}=U_{n-1}(x)\\&\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}U_n(t)\mathrm{d}t}{t-x}=-T_{n+1}(x),\quad U_{-1}(x)=0,\ |x|<1\end{aligned} \tag{5-202a}$$

5.8.2 奇异积分 $\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}(t-x)}$, $-1<x<1$ 的数值求积公式

首先应用 Gauss - Chebyshev 求积公式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}\approx\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(x_k),\ x_k=\cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right),\ k=1,2,\cdots,n \tag{5-203}$$

即 x_k 为 $T_n(x)$ 的零点。这一求积公式的精度为 $2n-1$,即对不超过 $2n-1$ 的多项式是精确成立的。设 $f(t)$ 在 $[-1,1]$ 至少一次可微,令

$$F(t,x)=\frac{f(t)-f(x)}{t-x},\ t\neq x;\quad F(t,x)=f'(x),\ t=x \tag{5-204}$$

显然 $F(t,x)$ 在 $[-1,1]$ 是连续的,再利用 $U_{-1}(x)=0$,便得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}(t-x)}=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{[f(t)-f(x)]\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}(t-x)}+\frac{f(x)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}(t-x)}=$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{F(t,x)\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}+f(x)U_{-1}(x)\approx\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}F(x_k,x)$$

1) 设 $x\neq x_k$

则

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}(t-x)}\approx\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}F(x_k,x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{x_k-x}+\frac{f(x)}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-x_k}$$

另一方面,由于$\frac{T_n(t)-T_n(x)}{t-x}$是关于 t 的 $n-1$ 阶多项式,故有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{[T_n(t)-T_n(x)]\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}(t-x)}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{T_n(x_k)-T_n(x)}{x_k-x}=\frac{T_n(x)}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-x_k}$$

同时根据式(5 - 202a)的第一式,有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{[T_n(t)-T_n(x)]\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}(t-x)}=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{T_n(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}(t-x)}=U_{n-1}(x)$$

由上二式推出 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x-x_k}=\frac{U_{n-1}(x)}{T_n(x)}$,所以当 $x\neq x_k$ 时,有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}(t-x)}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{f(x_k)}{x_k-x}+\frac{U_{n-1}(x)}{T_n(x)}f(x) \tag{5-205a}$$

特别当 x 取值 x_r，且 $U_{n-1}(x_r)=0$ 时，上式特别简单，在形式上和 Gauss - Chebyshev 求积公式相同。对于这种情形，式(5-202a)第一式的离散化形式为

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{T_j(x_k)}{(x_k-x_r)}=U_{j-1}(x_r),\quad U_{n-1}(x_r)=0,\ 0<j<n \tag{5-202b}$$

2) 设 $x=x_k$

则进行 $x\rightarrow x_k$ 的极限处理，由此可得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}(t-x)}=\frac{1}{n}\sum_{j=1,\,j\neq k}^{n}\frac{f(x_j)}{x_j-x_k}+\frac{1}{n}\sum_{j=1,\,j\neq k}^{n}\frac{1}{x_k-x_j}f(x_k)+\frac{1}{n}f'(x_k)=$$
$$\frac{1}{n}\sum_{j=1,\,j\neq k}^{n}\frac{f(x_j)}{x_j-x_k}+\frac{x_kf(x_k)}{2n(1-x_k^2)}+\frac{1}{n}f'(x_k) \tag{5-205b}$$

5.8.3 奇异积分 $\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}f(t)\mathrm{d}t}{(t-x)}$，$-1<x<1$ 的数值求积公式

首先采用求积公式

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}f(t)\mathrm{d}t\approx\frac{1}{n+1}\sum_{r=1}^{n}f(x_r)(1-x_r^2),\ x_r=\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right),\ k=1,2,\cdots,n \tag{5-206}$$

即 x_r 为 $U_{m-1}(x)$ 的零点。设 $f(t)$ 在$[-1,1]$至少一次可微，令

$$F(t,x)=\frac{f(t)-f(x)}{t-x},\ t\neq x;\quad F(t,x)=f'(x),\ t=x \tag{5-207}$$

显然 $F(t,x)$ 在$[-1,1]$是连续的。按式(5-202a)，有 $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t/(t-x)=-\pi x$，从而

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}f(t)}{t-x}\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}[f(t)-f(x)]\mathrm{d}t}{(t-x)}+\frac{f(x)}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t}{(t-x)}=$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}F(t,x)\mathrm{d}t-xf(x)$$

1) 设 $x\neq x_r$

则
$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}f(t)\mathrm{d}t}{(t-x)}\approx\frac{1}{n+1}\sum_{r=1}^{n}\frac{f(x_r)(1-x_r^2)}{x_r-x}+\frac{f(x)}{n+1}\sum_{r=1}^{n}\frac{1-x_r^2}{x-x_r}-xf(x)$$

注意到

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}[U_n(t)-U_n(x)]\mathrm{d}t}{(t-x)}=\frac{1}{n+1}\sum_{r=1}^{n}\frac{U_n(x_r)-U_n(x)}{x_r-x}(1-x_r^2)=$$
$$\frac{1}{n+1}\sum_{r=1}^{n}\frac{U_n(x)}{x-x_r}(1-x_r^2)$$

同时根据式(5-202a)的第二式，有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}[U_n(t)-U_n(x)]\mathrm{d}t}{(t-x)}=-T_{n+1}(x)+xU_n(x)$$

由上二式推出 $-\dfrac{T_{n+1}(x)}{U_n(x)}+x=\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{r=1}^{n}\dfrac{1}{x-x_r}(1-x_r^2)$，所以当 $x\neq x_k$ 时，有

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}f(t)\mathrm{d}t}{(t-x)}\approx\frac{1}{n+1}\sum_{r=1}^{n}\frac{f(x_r)(1-x_r^2)}{x_r-x}=\frac{1}{n+1}\sum_{r=1}^{n}\frac{f(x_r)(1-x_r^2)}{x_r-x}-\frac{f(x)T_{n+1}(x)}{U_n(x)}\tag{5-208a}$$

特别当 x 取值 x_k，且 $T_{n+1}(x_k)=0$ 时，上式特别简单，此时式(5-202a)中第二式的离散化形式为

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{(1-x_r^2)U_j(x_r)}{(n+1)(x_r-x_k)}=-T_{j+1}(x_k),\quad U_n(x_r)=0,\quad T_{n+1}(x_r)=0,\ n>j\tag{5-202c}$$

2) 设 $x=x_r$

则进行 $x\to x_r$ 的极限处理，由此可得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}f(t)\mathrm{d}t}{t-x}=\frac{1}{n+1}\sum_{j=1,\,j\neq r}^{n}\frac{f(x_j)(1-x_j^2)}{x_j-x_r}+\frac{1}{n+1}f'(x_r)(1-x_j^2)-\frac{3}{2(n+1)}x_rf(x_r)\tag{5-208b}$$

5.8.4 奇异积分方程的解

工程上出现的积分方程，如式(5-183)类型，即

$$\frac{1}{\pi}\int_0^a\frac{F(t)}{t-x}\mathrm{d}t+\int_0^aK(x,\,t)F(t)\mathrm{d}t=Q(x)$$

式中核函数 $K(x,\,t)$和右端项 $Q(x)$是已知的，有些问题中 $F(t)$在两个端点具有 $1\sqrt{r}$ 的奇异性，即 $F(t)=f(t)/\sqrt{1-t^2}$，其中 $f(t)$是有界函数，通过变量置换，常常可以化成如下的积分方程

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{f(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}(t-x)}+\int_{-1}^{1}K(x,\,t)\frac{f(t)\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=g(x),\ -1<x<1\tag{5-209}$$

同时 $F(t)$需要满足一定的定解条件，如位移单值性条件等

$$\int_{-1}^{1}f(t)\mathrm{d}t/\sqrt{1-t^2}=C\tag{5-210}$$

由于难于得到闭合解，通常采用 Gauss - Chebyshev 求积公式(5-205)和(5-203)，在定解条件(5-210)下，求数值解积分方程(5-209)，即离散化为

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f(t_k)\left[\frac{1}{t_k-x_r}+\pi K(x_r,\,t_k)\right]=g(x_r),\ r=1,\,2,\,\cdots,\,n-1\\&\sum_{k=1}^{n}\frac{\pi}{n}f(t_k)=C,\ t_k=\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n},\ x_r=\cos\frac{r\pi}{n}\end{aligned}\tag{5-211}$$

上式是 n 个未知量 $f(t_1)$，…，$f(t_n)$的 n 个线性代数方程，易于求解。

有些问题中 $f(t)$在两个端点没有奇异性，且具结构 $F(t)=f(t)\sqrt{1-t^2}$，其中 $f(t)$是有界函数，通过变量置换，常常可以化成如下的积分方程

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\sqrt{1-t^2}f(t)\mathrm{d}t}{t-x}+\int_{-1}^{1}K(x,t)\sqrt{1-t^2}f(t)\mathrm{d}t=g(x),\ -1<x<1 \tag{5-212}$$

和上面一样，利用 Gauss - Chebyshev 求积公式(5 - 208)和(5 - 206)，在定解条件(5 - 210)下，来数值解积分方程(5 - 212)，得到

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1-t_k^2}{n+1}f(t_k)\left[\frac{1}{t_k-x_r}+\pi K(x_r,t_k)\right]=g(x_r),\ r=1,2,\cdots,n+1$$

$$t_k=\cos\frac{k\pi}{n+1},\ x_r=\cos\frac{(2r-1)\pi}{2(n+1)} \tag{5-213}$$

上式共有 $n+1$ 个配置点，而待定量只有 n 个未知量 $f(t_1)$，…，$f(t_n)$，为简单计，通常抛弃其中的一个点，例如最接近端点的点，因端点处函数为零，故接近端点处的函数值已经很小。

Chen 和 Liu[74]讨论了含垂直边界周期裂纹的条形梯度压电介质的动态响应，Chen，Liu 和 Zou[75]讨论了双压电梯度材料中的动态问题。

第6章

双压电介质中的线性夹杂

6.1 双压电体中的共线界面绝缘裂纹[9, 39, 40]

6.1.1 一般讨论

讨论在无穷远处没有广义载荷作用的双材料问题。材料Ⅰ位于上半平面 S^{+}，$x_2>0$；材料Ⅱ位于下半平面 S^{-}，$x_2<0$；$x_1=0$ 为界面，全体界面的集合记为 L，界面上存在共线裂纹，其左端点记为 a_k，右端点记为 b_k 其集合记为 L_c。为方便计，其余的部分 $L-L_c$ 称结合面(图 6-1)。令 $\boldsymbol{d}(x_1)$ 是 x_1 轴上的上面和下面广义位移的间断值，注意到对任何 j 有 $x_{1j}=x_1$，故

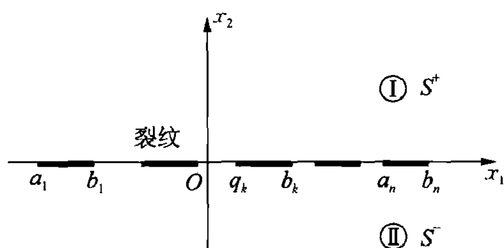


图 6-1 双压电体中的共线界面裂纹

$$\boldsymbol{d}(x_1)=\boldsymbol{U}_{\mathrm{I}}(x_1)-\boldsymbol{U}_{\mathrm{II}}(x_1)=2\mathrm{Re}[\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{f}_{\mathrm{I}}(x_1)-\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{f}_{\mathrm{II}}(x_1)] \tag{6-1}$$

在结合面上的位移、电势和面力连续的条件要求

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{d}(x_1)=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{\Sigma}_2(x_1)=\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{I}2}(x_1)=\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{II}2}(x_1),\ x_1\in L-L_c\\&\boldsymbol{\Sigma}_{\beta 2}(x_1)=2\mathrm{Re}[\boldsymbol{B}_\beta\boldsymbol{F}_\beta(x_1)],\ \beta=\mathrm{I},\mathrm{II}\end{aligned} \tag{6-2}$$

设裂纹面上的作用力是自平衡的，电位移是相等的，即作用相同的 $\boldsymbol{\Sigma}_0(x_1)=[t_1^*,t_2^*,t_3^*,-\sigma^*]^{\mathrm{T}}$

$$\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1)=\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{I}2}(x_1)=\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{II}2}(x_1)=\boldsymbol{\Sigma}_0(x_1),\ x_1\in L_c \tag{6-3}$$

由以上叙述知，在整个 x_1 轴上外载荷连续，即有 $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{I}2}(x_1)=\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{II}2}(x_1)$，则按式(6-2)有

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)+\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)}=\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)+\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)},\ -\infty<x_1<\infty \tag{6-4}$$

由于

$$\overline{\boldsymbol{F}^{+}(x_1)}=\overline{\boldsymbol{F}}^{-}(x_1),\quad \overline{\boldsymbol{F}^{-}(x_1)}=\overline{\boldsymbol{F}}^{+}(x_1) \tag{6-5}$$

故式(6-4)可改写为

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)-\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{II}}(x_1)=\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)-\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{I}}(x_1),\ -\infty<x_1<\infty \tag{6-6}$$

按第1章所述，作为第一步，在 z 平面上讨论问题。易于见到，上面等式的左边为在 $x_2>0$ 解析的函数的边值，右边为在 $x_2<0$ 解析的函数的边值，而在 $x_1=0$ 上是连续的，因而在全平面

解析，它只能是常数；又设在无穷远处没有外力和电位移作用，$\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(z)$ 和 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(z)$ 是任意函数，故可令该常数为零。从而有

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(z)=\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\ \overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{II}}(z),\ x_2>0;\quad \boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(z)=\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\ \overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{I}}(z),\ x_2<0 \tag{6-7}$$

利用式(6-6)，由式(6-1)可推出

$$\begin{aligned}\mathrm{i}\boldsymbol{d}'(x_1)=&[\mathrm{i}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)+\mathrm{i}\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}\ \overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)}]-[\mathrm{i}\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)+\mathrm{i}\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{II}}\ \overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)}]=\\&[\mathrm{i}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}^{-1}-\mathrm{i}\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{II}}\ \overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}^{-1}]\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)-[\mathrm{i}\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}^{-1}-\mathrm{i}\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}\ \overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}^{-1}]\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)=\\&\boldsymbol{H}\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)-\overline{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)\end{aligned} \tag{6-8}$$

式中

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}+\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}},\quad \boldsymbol{Y}_{\alpha}=\mathrm{i}\boldsymbol{A}_{\alpha}\boldsymbol{B}_{\alpha}^{-1},\quad \boldsymbol{Y}_{\alpha}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{Y}_{\alpha 11} & \boldsymbol{Y}_{\alpha 14}\\ \boldsymbol{Y}_{\alpha 41} & \boldsymbol{Y}_{\alpha 44}\end{bmatrix},\ \alpha=\mathrm{I},\ \mathrm{II} \tag{6-9}$$

直接验证可知，$\boldsymbol{Y}_{\alpha}$ 是 Hermite 矩阵，因而 $\boldsymbol{H}$ 也是 Hermite 矩阵，且 $\boldsymbol{Y}_{\alpha 11}$ 是 3×3 的正定的弹性矩阵，$\boldsymbol{Y}_{\alpha 14}=\overline{\boldsymbol{Y}}_{\alpha 41}^{\mathrm{T}}$ 是 3×1 的压电系数矩阵，$Y_{\alpha 44}$ 是介电系数元素。对稳定材料，$Y_{\alpha 44}<0$。

按式(6-8)，此时可通过对实轴进行解析延拓，构造一个除裂纹外在全平面 z 上解析的函数 $\boldsymbol{h}(z)$

$$\boldsymbol{h}(z)=\begin{cases}\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(z),\ x_2\geqslant 0,\\ \boldsymbol{H}^{-1}\overline{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(z),\ x_2\leqslant 0,\end{cases}\ z\notin L_c \tag{6-10}$$

显然，当 $x_1\notin L_c$ 的 x_1 轴上，有 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)=\boldsymbol{H}^{-1}\overline{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)$。

6.1.2 裂纹面自由时的齐次方程的基本解[39]

按式(6-4)、(6-7)和(6-10)，裂纹面自由的边界条件 $\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1,0)=\boldsymbol{0}$ 可写成

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)+\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\ \overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)}=\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)+\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)=\boldsymbol{h}_0^{+}(x_1)+\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{h}_0^{-}(x_1)\\=\boldsymbol{0},\ x_1\in L_c\end{aligned} \tag{6-11}$$

上式是矢量型的 Riemann-Hilbert 问题，和第 1 章 1.6 节中的式(1-74)类似，只是式(1-74)中的 $\boldsymbol{g}$ 换成了 $-\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H}$，因而可采用相同的方法处理。在 z 平面上的基本解可设为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{X}_0(z)=[X_{01}(z),\ X_{02}(z),\ X_{04}(z)]^{\mathrm{T}},\ X_{0j}(z_j)=\omega_j Y_0(z)\\&Y_0(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{-\gamma}(z-b_k)^{\gamma-1},\quad \boldsymbol{X}_0^{+}(t)=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma}\boldsymbol{X}_0^{-}(t)\end{aligned} \tag{6-12a}$$

应当注意，双介质中的 $Y_0(z)$ 和均匀介质中的 $Y_0(z)$ 的表达式不同。把式(6-12a)代入(6-11)，得

$$(\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma}\boldsymbol{I}+\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H})\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{0},\quad |\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma}\boldsymbol{I}+\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H}|=0 \tag{6-13}$$

令 $\gamma=1/2+\mathrm{i}\varepsilon$，利用 $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}(1/2+\mathrm{i}\varepsilon)}=-\mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon}$，式(6-13)和其共轭方程可分别化成

$$(e^{-2\pi\varepsilon}\boldsymbol{I}-\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H})\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{0},\quad (e^{-2\pi\varepsilon}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}^{-1}\overline{\boldsymbol{H}})\overline{\boldsymbol{\omega}}=\boldsymbol{0}$$
$$|\overline{\boldsymbol{H}}-e^{2\pi\varepsilon}\boldsymbol{H}|=0,\quad |\overline{\boldsymbol{H}}-e^{-2\pi\varepsilon}\boldsymbol{H}|=0 \tag{6-14}$$

由上式知，若 ε 满足方程，则 $-\varepsilon$ 满足其共轭方程，两个都是解。由于 $\boldsymbol{H}$ 是 4×4 的矩阵，故 ε 有四个根。因为 $\boldsymbol{H}$ 是 Hermite 矩阵，所以可以分解为

$$\boldsymbol{H}=\boldsymbol{\Lambda}_1+i\boldsymbol{\Lambda}_2,\quad \overline{\boldsymbol{H}}=\boldsymbol{\Lambda}_1-i\boldsymbol{\Lambda}_2 \tag{6-15}$$

式中 $\boldsymbol{\Lambda}_1$ 是实对称矩阵，$\boldsymbol{\Lambda}_2$ 是实反对称矩阵。令

$$\beta=\tan h(\pi\varepsilon)=\frac{e^{\pi\varepsilon}-e^{-\pi\varepsilon}}{e^{\pi\varepsilon}+e^{-\pi\varepsilon}}=\frac{e^{2\pi\varepsilon}-1}{e^{2\pi\varepsilon}+1},\quad 或\ \varepsilon=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1+\beta}{1-\beta} \tag{6-16}$$

把式(6－15)和(6－16)代入式(6－14)，得

$$|\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_2+i\beta\boldsymbol{I}|=0,\quad |\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_2-i\beta\boldsymbol{I}|=0 \tag{6-17}$$

由上式知，β 和 $-\beta$ 都是根。展开上式，得

$$\beta^4+2b\beta^2+c=0,\ b=\frac{1}{4}\mathrm{tr}[(\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_2)^2],\ c=|\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_2| \tag{6-18a}$$

由于 $\boldsymbol{\Lambda}_2$ 是偶次的反对称矩阵，故有 $|\boldsymbol{\Lambda}_2|\geqslant0$，又因 Y_{a11} 是正定矩阵，$Y_{a44}<0$，所以 $|\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}|<0$，因而推出 $c<0$，故有

$$\beta_{1,2}=\pm\sqrt{(b^2-c)^{1/2}-b},\quad \beta_{3,4}=\pm i\sqrt{(b^2-c)^{1/2}+b} \tag{6-18b}$$

与之对应的 ε 记为

$$\varepsilon=\varepsilon_1=-\varepsilon_2=\frac{1}{\pi}\mathrm{artanh}\sqrt{(b^2-c)^{1/2}-b}$$
$$\varepsilon_4=-\varepsilon_3=i\kappa,\ \kappa=\frac{1}{\pi}\arctan\sqrt{(b^2-c)^{1/2}+b} \tag{6-19}$$

由上式知，存在 4 个 ε 值，且 ε，κ 是实数，相应地有 4 个本征矢量 $\boldsymbol{\omega}^{(i)}$ 和 4 组基本解

$$\boldsymbol{X}_0^{(i)}(z):\ X_{0j}^{(i)}(z)=\omega_j^{(i)}Y_0^{(i)}(z),\ Y_0^{(i)}(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{\gamma_i}(z-b_k)^{\gamma_i-1},\ i,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4 \tag{6-12b}$$

式(6－12b)的基本解又可以写成矩阵形式

$$\boldsymbol{P}(z)=[\boldsymbol{X}_0^{(1)}(z),\ \boldsymbol{X}_0^{(2)}(z),\ \boldsymbol{X}_0^{(3)}(z),\ \boldsymbol{X}_0^{(4)}(z)]=\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{Q}(z)$$
$$\boldsymbol{X}_0^{(i)}(z)=\boldsymbol{\omega}^{(i)}Y_0^{(i)}(z),\ \boldsymbol{Q}(z)=\langle Y_0^{(*)}(z)\rangle,\ \boldsymbol{\Omega}=[\boldsymbol{\omega}^{(1)},\ \boldsymbol{\omega}^{(2)},\ \boldsymbol{\omega}^{(3)},\ \boldsymbol{\omega}^{(4)}]$$
$$\boldsymbol{\omega}^{(i)}=[\omega_1^{(i)},\ \cdots,\ \omega_4^{(i)}]^{\mathrm{T}},\ Y_0^{(i)}(z)=\prod_{k-1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(z-a_k)(z-b_k)}}\left(\frac{z-b_k}{z-a_k}\right)^{i\varepsilon_i},\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4 \tag{6-20}$$

对于单个裂纹，如把坐标原点取在裂纹的中心，裂纹的左、右端点分别为 $-a$ 和 a。此时把基本解式(6－12b)推广到 z_j 平面上，便有

$$X_{0j}^{(i)}(z_j)=\omega_j^{(i)}\frac{1}{\sqrt{(z_j^2-a^2)}}\left(\frac{z_j-a}{z_j+a}\right)^{i\varepsilon_i},\ i,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4 \tag{6-12c}$$

由式(6-14),又可知

对 ε_1 有 $(\mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon}\boldsymbol{I}-\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H})\boldsymbol{\omega}^{(1)}=\boldsymbol{0}$, $(\mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}^{-1}\overline{\boldsymbol{H}})\overline{\boldsymbol{\omega}}^{(1)}=\boldsymbol{0}\Rightarrow(\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon}\boldsymbol{I}-\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H})\overline{\boldsymbol{\omega}}^{(1)}=\boldsymbol{0}$

对 ε_2 有 $(\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon}\boldsymbol{I}-\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H})\boldsymbol{\omega}^{(2)}=\boldsymbol{0}$, $(\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}^{-1}\overline{\boldsymbol{H}})\overline{\boldsymbol{\omega}}^{(2)}=\boldsymbol{0}\Rightarrow(\mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon}\boldsymbol{I}-\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H})\overline{\boldsymbol{\omega}}^{(2)}=\boldsymbol{0}$

对 ε_3 有 $(\mathrm{e}^{2\pi i\kappa}\boldsymbol{I}-\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H})\boldsymbol{\omega}^{(3)}=\boldsymbol{0}$, $(\mathrm{e}^{-2\pi i\kappa}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}^{-1}\overline{\boldsymbol{H}})\overline{\boldsymbol{\omega}}^{(3)}=\boldsymbol{0}\Rightarrow(\mathrm{e}^{2\pi i\kappa}\boldsymbol{I}-\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H})\overline{\boldsymbol{\omega}}^{(3)}=\boldsymbol{0}$

对 ε_4 有 $(\mathrm{e}^{-2\pi i\kappa}\boldsymbol{I}-\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H})\boldsymbol{\omega}^{(4)}=\boldsymbol{0}$, $(\mathrm{e}^{2\pi i\kappa}\boldsymbol{I}-\boldsymbol{H}^{-1}\overline{\boldsymbol{H}})\overline{\boldsymbol{\omega}}^{(4)}=\boldsymbol{0}\Rightarrow(\mathrm{e}^{2\pi i\kappa}\boldsymbol{I}-\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H})\overline{\boldsymbol{\omega}}^{(4)}=\boldsymbol{0}$

(6-21)

由上式可知,$\boldsymbol{\omega}^{(1)}$和$\overline{\boldsymbol{\omega}}^{(2)}$,$\boldsymbol{\omega}^{(3)}$和$\overline{\boldsymbol{\omega}}^{(3)}$,$\boldsymbol{\omega}^{(4)}$和$\overline{\boldsymbol{\omega}}^{(4)}$满足同一个方程,所以$\boldsymbol{\omega}^{(1)}=c\overline{\boldsymbol{\omega}}^{(2)}$,其中$c$为实常数,$\boldsymbol{\omega}^{(3)}$和$\boldsymbol{\omega}^{(4)}$是实矢量。

6.1.3 第一种解法

设在裂纹面上作用有广义载荷$\boldsymbol{\Sigma}_0(x_1)$,此时式(6-11)应换为非齐次方程

$$\boldsymbol{h}^+(x)+\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{h}^-(x)=\boldsymbol{\Sigma}_0(x_1),\ x_1\in L \tag{6-22a}$$

按照第1章中1.6节有关 Riemann-Hilbert 问题的研究,首先在z平面上讨论。类似于式(1-79)~(1-85)的讨论,按照基本解的性质,现在有

$$\boldsymbol{P}^+(t)+\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{P}^-(t)=\boldsymbol{0},\quad 或\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H}=-\boldsymbol{P}^+(t)[\boldsymbol{P}^-(t)]^{-1}$$

故式(6-22)又可写成

$$[\boldsymbol{P}^+(t)]^{-1}\boldsymbol{h}^+(x)-[\boldsymbol{P}^-(t)]^{-1}\boldsymbol{h}^-(x)=[\boldsymbol{P}^+(t)]^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_0(x_1),\ x_1\in L \tag{6-22b}$$

从而式(6-22)的解为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}(z)&=\boldsymbol{h}_{通}(z)+\boldsymbol{h}_{特}(z)=\boldsymbol{P}(z)\left\{\boldsymbol{C}(z)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{[\boldsymbol{P}^+(x_1)]^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_0(x_1)\mathrm{d}x_1}{(x_1-z)}\right\}\\ h_l(z)&=\sum_{i=1}^4X_{0l}^{(i)}(z)\left(C^{(i)}(z)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\{[\boldsymbol{P}^+(x_1)]^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_0(x_1)\}_l\mathrm{d}x_1}{(x_1-z)}\right)\end{aligned} \tag{6-23}$$

求出$\boldsymbol{h}(z)$后,便可按1.6.3节的方法,对于沿x_1轴直线排列的裂纹,按式(6-10)建立$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{z}_*)$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{z}_*)=\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{z}_*),\quad F_{\mathrm{I}j}(z_j)=B_{\mathrm{I}jl}^{-1}h_l(z_j),\ x_2\geqslant 0\\ &\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{z}_*)=\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}^{-1}\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{z}_*),\quad F_{\mathrm{II}j}(z_j)=B_{\mathrm{II}jm}^{-1}\overline{H}_{mn}^{-1}H_{nl}h_l(z_j),\ x_2\leqslant 0\end{aligned} \tag{6-24}$$

所以应力为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{I}1}=2\mathrm{Re}\{\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\langle\boldsymbol{\mu}\rangle[\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{z}_*)]\},\quad \boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{I}2}=2\mathrm{Re}\{\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}[\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{z}_*)]\},\ x_2\geqslant 0\\ &\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{II}1}=2\mathrm{Re}\{\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\langle\boldsymbol{\mu}\rangle[\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}^{-1}\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{z}_*)]\},\quad \boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{II}2}=2\mathrm{Re}\{\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}[\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}^{-1}\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{h}(\boldsymbol{z}_*)]\},\ x_2\leqslant 0\end{aligned} \tag{6-25a}$$

或

$$\Sigma_{\mathrm{I}1i}=2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^4\mu_jB_{\mathrm{I}ij}B_{\mathrm{I}jl}^{-1}h_l(z_j),\quad \Sigma_{\mathrm{I}2i}=2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^4B_{\mathrm{I}ij}B_{\mathrm{I}jl}^{-1}h_l(z_j),\ x_2\geqslant 0$$

$$\Sigma_{\mathrm{II}1i} = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4}\mu_j B_{\mathrm{II}ij} B_{\mathrm{II}jm}^{-1}\overline{H}_{mn}^{-1} H_{nl} h_l(z_j),\ x_2 \leqslant 0 \tag{6-25b}$$

$$\Sigma_{\mathrm{II}2i} = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4} B_{\mathrm{II}ij} B_{\mathrm{II}jm}^{-1}\overline{H}_{mn}^{-1} H_{nl} h_l(z_j),\ x_2 \leqslant 0$$

6.1.4 第二种解法

上述问题式(6-22)还可通过解耦的方法来求解。按照式(1-88),现在组成本征矢量 $\boldsymbol{\omega}^{(i)}$ 的方阵 $\boldsymbol{\Omega}$

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\Omega} = [\boldsymbol{\omega}^{(1)}, \boldsymbol{\omega}^{(2)}, \boldsymbol{\omega}^{(3)}, \boldsymbol{\omega}^{(4)}],\quad \overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\Lambda},\ \boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}[\Lambda_1^2, \Lambda_2^2, \cdots, \Lambda_4^2] \\ \overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Omega} = -\boldsymbol{M},\ \boldsymbol{M} = \mathrm{diag}[\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma_1}\Lambda_1^2, \cdots \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma_4}\Lambda_4^2],\ \Lambda_i^2 = \overline{\omega}_1^{(i)}\omega_1^{(i)} + \cdots + \overline{\omega}_4^{(i)}\omega_4^{(i)}\end{gathered} \tag{6-26}$$

仿式(1-89),以 $\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}$ 左乘式(6-22),并令 $\boldsymbol{\Psi}(z) = \overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}(z)$,则式(6-22)化为

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\Psi}^{+}(x_1) - \boldsymbol{M}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\Psi}^{-}(x_1) = \boldsymbol{\Sigma}^{*}(x_1),\quad \Psi_i^{+}(x_1) - \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma_i}\Psi_i^{-}(x_1) = \Sigma_i^{*}(x_1) \\ \boldsymbol{\Psi}(z) = \overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}(z),\quad \boldsymbol{\Sigma}^{*}(x_1) = \overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_0(x_1),\quad \boldsymbol{M}\boldsymbol{\Lambda}^{-1} = \langle \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma_*}\rangle\end{gathered} \tag{6-27}$$

上式是 $\boldsymbol{\Psi}(z)$ 解耦的边值问题,按照式(1-91),并把其中的 $\boldsymbol{\Lambda}$ 并入 $\boldsymbol{C}$,其解为

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\Psi}(z) = \boldsymbol{Q}(z)\left[\boldsymbol{C}(z) + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{*}(x_1)\mathrm{d}t}{\boldsymbol{Q}^{+}(x_1)(x_1 - z)}\right] \\ \Psi_i(z) = Y_0^{(i)}(z)\left[C^{(i)}(z) + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{\Sigma_i^{*}(x_1)\mathrm{d}t}{Y_0^{(i)+}(x_1)(x_1 - z)}\right]\end{gathered} \tag{6-28}$$

如设当 $t \to \infty$ 时,$\Sigma_i^{*}(t)/Y_0^{(i)+}(t) \to \alpha_q t^q + \cdots + \alpha_0 + \alpha_{-1}/t + \cdots$,其中 α_i 和外力相关。按照第 1 章的式(1-131),则式(6-28)中的积分可积出为

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{\Sigma_i^{*}(x_1)\mathrm{d}t}{Y_0^{(i)+}(x_1)(x_1 - z)} = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma_i}}\left[\frac{\Sigma_i^{*}(z)}{Y_0^{(i)}(z)} - \alpha_q^{(i)}z^q - \cdots - \alpha_0^{(i)}\right]$$

从而式(6-28)可写成更明显的形式

$$\begin{gathered}\boldsymbol{\Psi}(z) = \boldsymbol{Q}(z)\boldsymbol{C}(z) + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}\boldsymbol{\Lambda}^{-1})^{-1}\{\boldsymbol{\Sigma}^{*}(z) - \boldsymbol{Q}(z)[\boldsymbol{\alpha}_q^{(i)}z^q + \cdots + \boldsymbol{\alpha}_0^{(i)}]\} \\ \Psi_i(z) = Y_0^{(i)}(z)C^{(i)}(z) + \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma_i}}\{\Sigma_i^{*}(z) - Y_0^{(i)}(z)[\alpha_q^{(i)}z^q + \cdots + \alpha_0^{(i)}]\}\end{gathered} \tag{6-29a}$$

式中 $\omega^{(i)}$ 中只有一个是任意常数。如把式(6-29a)中的同类项合并,可更简单地写成

$$\boldsymbol{\Psi}(z) = \boldsymbol{Q}(z)\boldsymbol{C}(z) + (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{M}\boldsymbol{\Lambda}^{-1})^{-1}\boldsymbol{\Sigma}^{*}(z) \tag{6-29b}$$

求出 $\boldsymbol{\Psi}(z)$后,可按下式求 $\boldsymbol{F}(z_*)$

$$\boldsymbol{F}(z_*) = \begin{cases}\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{h}(z_*),\ x_2 \geqslant 0, \\ \boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}^{-1}\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{h}(z_*),\ x_2 \leqslant 0\end{cases} \tag{6-30}$$

进而可确定应力和位移,通常用数字方法求解,但应力强度因子可以解析地表示。

6.1.5 裂尖渐近场和应力强度因子

按式(6-12)和(6-23)，有

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{h}(z)=\boldsymbol{\Omega}\left\langle\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(z-a_k)(z-b_k)}}\left(\frac{z-b_k}{z-a_k}\right)^{\mathrm{i}\varepsilon_*}\right\rangle\tilde{\boldsymbol{C}}'(z)\\
&\tilde{\boldsymbol{C}}'(z)=\boldsymbol{C}(z)+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{[\boldsymbol{P}^+(x_1)]^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_0(x_1)\mathrm{d}x_1}{(x_1-z)}
\end{aligned}
\tag{6-31}
$$

在紧邻裂尖 b_j 的前方 $b_j+0(z)$，$\boldsymbol{h}(z)$的渐近形式为

$$
\begin{aligned}
&\lim_{z\to b_j}\boldsymbol{h}(z)=\boldsymbol{\Omega}\langle(z-b_j)^{-(1/2)+\mathrm{i}\varepsilon_*}\rangle\tilde{\boldsymbol{C}}(b_j)\\
&\tilde{\boldsymbol{C}}(b_j)=\langle(z-a_j)^{-(1/2)-\mathrm{i}\varepsilon_*}\prod_{k=1,\,k\neq j}^{n}(z-a_k)^{-(1/2)-\mathrm{i}\varepsilon_*}(z-b_k)^{-(1/2)+\mathrm{i}\varepsilon_*}\rangle\tilde{\boldsymbol{C}}'(b_j)
\end{aligned}
\tag{6-32}
$$

结合式(6-25)和(6-32)，便得裂尖渐近场的表达式

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{I}1}=2\mathrm{Re}\{\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\langle\mu_*\rangle[\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{\Omega}\langle(z_*-b_j)^{-(1/2)+\mathrm{i}\varepsilon_*}\rangle\tilde{\boldsymbol{C}}(b_j)]\}\\
&\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{I}2}=2\mathrm{Re}\{\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}[\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{\Omega}\langle(z_*-b_j)^{-(1/2)+\mathrm{i}\varepsilon_*}\rangle\tilde{\boldsymbol{C}}(b_j)]\}\\
&\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{II}1}=2\mathrm{Re}\{\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\langle\mu_*\rangle[\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}^{-1}\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Omega}\langle(z_*-b_j)^{-(1/2)+\mathrm{i}\varepsilon_*}\rangle\tilde{\boldsymbol{C}}(b_j)]\}\\
&\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{II}2}=2\mathrm{Re}\{\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}[\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}^{-1}\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Omega}\langle(z_*-b_j)^{-(1/2)+\mathrm{i}\varepsilon_*}\rangle\tilde{\boldsymbol{C}}(b_j)]\}
\end{aligned}
\tag{6-33}
$$

讨论刻画裂尖应力场的应力强度因子时，无需求出应力的复杂的一般表达式，因为在 x_1 轴上，有 $\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1)=\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{I}2}(x_1)=\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{II}2}(x_1)=\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)+\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)}$，且按式(6-8)，在结合面上有 $\boldsymbol{H}\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)=\overline{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)$，即有 $\boldsymbol{h}^+(x_1)=\boldsymbol{h}^-(x_1)=\boldsymbol{h}(x_1)$，所以利用式(6-14)后有

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1)=\boldsymbol{h}^+(x_1)+\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{h}^-(x_1)=(\boldsymbol{I}+\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H})\boldsymbol{h}(x_1)=\\
&\qquad\boldsymbol{\Omega}\left\langle(1+\mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon_*})\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(z-a_k)(z-b_k)}}\left(\frac{z-b_k}{z-a_k}\right)^{\mathrm{i}\varepsilon_*}\right\rangle\tilde{\boldsymbol{C}}(z)
\end{aligned}
\tag{6-34}
$$

按式(6-23)，在紧邻裂尖 b_j 的前方结合面上，对于所有的 x_{1j} 都有 $x_{1j}=x_1$，从而得到应力的渐近形式为

$$
\begin{aligned}
&\lim_{x_1\to b_j}\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1)=(\boldsymbol{I}+\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H})\boldsymbol{P}(x_1)\tilde{\boldsymbol{C}}(b_j)=(\boldsymbol{I}+\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H})\boldsymbol{\Omega}\left\langle\frac{1}{\sqrt{(x_1-b_j)}}(x_1-b_j)^{\mathrm{i}\varepsilon_*}\right\rangle\tilde{\boldsymbol{C}}(b_j)=\\
&\qquad\frac{1}{\sqrt{(x_1-b_j)}}\boldsymbol{\Omega}\langle(1+\mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon_*})(x_1-b_j)^{\mathrm{i}\varepsilon_*}\rangle\tilde{\boldsymbol{C}}(b_j)\\
&\lim_{x_1\to b_j}\Sigma_{2k}(x_1)=\frac{1}{\sqrt{x_1-b_j}}\sum_{i=1}^{4}\omega_k^{(i)}[(1+\mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon_i})(x_1-b_j)^{\mathrm{i}\varepsilon_i}]\tilde{C}_i(b_j)
\end{aligned}
\tag{6-35}
$$

式中$\tilde{C}_i(b_j)$是在 b_j 点算得的某个常数。计及在 x_1 轴上

$$
\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\left[\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{\Omega}\left\langle\frac{1}{\sqrt{(z_*-b_j)}}(z_*-b_j)^{\mathrm{i}\varepsilon_*}\right\rangle\tilde{\boldsymbol{C}}(b_j)\right]=\boldsymbol{\Omega}\left\langle\frac{1}{\sqrt{(z_*-b_j)}}(z_*-b_j)^{\mathrm{i}\varepsilon_*}\right\rangle\tilde{\boldsymbol{C}}(b_j)
$$

上式也可直接由式(6-33)得到。当 $\boldsymbol{H}$ 为复值时，如式(6-35)所表明的，裂尖应力场存在振荡奇异性。通常定义应力强度因子时，希望在均匀介质中能退化到均匀介质中应力强度因子的定义。按第一种解法，应力强度因子可定义为

$$\boldsymbol{K}=\sqrt{2\pi}\boldsymbol{\Omega}\langle 1+\mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon_*}\rangle\tilde{\boldsymbol{C}},\ \tilde{\boldsymbol{C}}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\langle 1+\mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon_*}\rangle^{-1}\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{K} \tag{6-36}$$

上式定义的 $\boldsymbol{K}$ 是实数，从而裂尖渐近场可用应力强度因子表示为

$$\lim_{x_1\to b_j}\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(x_1-b_j)}}\boldsymbol{\Omega}\langle(x_1-b_j)^{\mathrm{i}\varepsilon_*}\rangle\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{K} \tag{6-37}$$

应力强度因子又可用应力表示为

$$\boldsymbol{K}=[K_{\mathrm{II}},K_{\mathrm{I}},K_{\mathrm{III}},K_{\mathrm{D}}]^{\mathrm{T}}=\lim_{x_1\to b_j}\sqrt{2\pi(x_1-b_j)}\boldsymbol{\Omega}\langle(x_1-b_j)^{-\mathrm{i}\varepsilon_*}\rangle\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1) \tag{6-38}$$

这样定义的应力强度因子，不受 $\boldsymbol{\Omega}$ 中任意常数的影响。在均匀介质中，$\langle(x_1-b_j)^{-\mathrm{i}\varepsilon_*}\rangle=\boldsymbol{I}$ 为单位阵，所以由式(6-38)，得 $\boldsymbol{K}=\lim\limits_{x_1\to b_j}\sqrt{2\pi(x_1-b_j)}\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1)$，这和5.1节中式(5-12)一致。采用第二种方法时，可以得到和上面相同的结果。还可以定义如下的应力强度因子

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{K}=[K_{\mathrm{II}},K_{\mathrm{I}},K_{\mathrm{III}},K_{\mathrm{D}}]^{\mathrm{T}}=\lim_{x_1\to b_j}\sqrt{2\pi(x_1-b_j)}\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1)\langle(x_1-b_j)^{-\mathrm{i}\varepsilon_*}\rangle\\&\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1)=\frac{1}{\sqrt{2\pi(x_1-b_j)}}\langle(x_1-b_j)^{\mathrm{i}\varepsilon_*}\rangle\boldsymbol{K}\end{aligned} \tag{6-39}$$

Beom 和 Atluri[76]，Shen、Chen 和 Chen[77]等许多文献对共线裂纹做过大量工作，Shen 和 Kuang[78]讨论了多层层合板中存在裂纹的问题。

6.2 双压电体中的共线刚性夹杂

6.2.1 一般讨论

讨论在无穷远处有广义载荷作用的双材料问题。设材料Ⅰ占据上半平面 S^+，材料Ⅱ占据下半平面 S^-，以 $x=0$ 为界面，界面的全体记为 L，界面上存在一些刚性夹杂（一般是非传导性的），刚性夹杂的左端点为 a_j，右端点为 b_j，其集合记为 L_c（图6-2）。和裂纹问题一样，结合面 $L-L_c$ 上的位移和电势、面力和电位移连续的条件要求

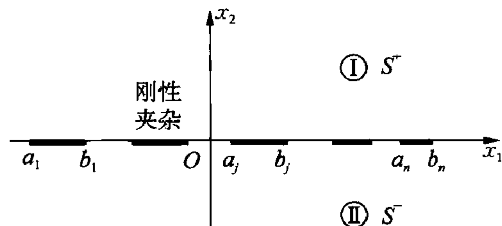


图6-2 双压电体中的共线界面刚性夹杂

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{I}}(x_1)=\boldsymbol{U}_{\mathrm{II}}(x_1),\quad \boldsymbol{\Sigma}_2(x_1)=\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{I}2}(x_1)=\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{II}2}(x_1),\ x\in L-L_c \tag{6-40}$$

但在刚性夹杂和裂纹面上的边界条件是不同的。在第 r 个刚性夹杂上有

$$u_j = u_{\mathrm{I}j} = u_{\mathrm{II}j} = u_{j0} + \omega_r(x_1 - x_{10}^r)\delta_{j2},\ r = 1 \sim n$$
$$E_{\mathrm{I}1} = E_{\mathrm{II}1},\quad D_{\mathrm{I}2} = D_{\mathrm{II}2},\ x_1 \in L_c \tag{6-41}$$

式中 ω_r 为第 r 个夹杂绕 x_3 轴的转角，x_{10}^r 是某个参照点。计及式(6-40)后，上式还可写成

$$u_{j,1} = \omega_r\delta_{j2},\quad E_{\mathrm{I}1} = E_{\mathrm{II}1},\ x_1 \in L_c$$
$$D_{\mathrm{I}2} = D_{\mathrm{II}2},\ -\infty < x_1 < \infty \tag{6-42}$$

按 Stroh 公式，有

$$\boldsymbol{U}_{\alpha,1} = \boldsymbol{A}_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha(z) + \overline{\boldsymbol{A}_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha(z)}$$
$$\boldsymbol{\Phi}_{\alpha,1} = \boldsymbol{B}_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha(z) + \overline{\boldsymbol{B}_\alpha \boldsymbol{F}_\alpha(z)},\ \boldsymbol{F}_\alpha(z) = \boldsymbol{f}'_\alpha(z),\ \alpha = \mathrm{I},\ \mathrm{II} \tag{6-43}$$

由式(6-40)，(6-41)和(6-42)，可得

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1) + \overline{\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1) + \overline{\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)},\ -\infty < x_1 < \infty \tag{6-44}$$

上式可改写成

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1) - \overline{\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}}(x_1) = \boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1) - \overline{\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}}(x_1),\ -\infty,\ x_1 < \infty \tag{6-45}$$

上式左边是上半平面解析函数的边值，右边是下半平面解析函数的边值，因此可解析延拓到全平面，和前面的讨论不同，现在设无穷远处外力和电位移不为零，且取值 $\boldsymbol{\Delta}^\infty$，即有

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(z) - \overline{\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}}(z) = \boldsymbol{\Delta}^\infty,\ z \in S^+$$
$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(z) - \overline{\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}}(z) = \boldsymbol{\Delta}^\infty,\ z \in S^- \tag{6-46}$$

$$\boldsymbol{\Delta}^\infty = \boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(\infty) - \overline{\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}}(\infty) = \boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(\infty) - \overline{\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}}(\infty) =$$
$$\frac{1}{2}[(\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}^\infty + \boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}^\infty) - (\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}\ \overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{I}}^\infty + \overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{II}}\ \overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{II}}^\infty)],\quad \boldsymbol{F}_\alpha^\infty = \boldsymbol{F}_\alpha(\infty),\ \alpha = \mathrm{I},\ \mathrm{II} \tag{6-47}$$

故 $\boldsymbol{\Delta}^\infty$ 为纯虚数。类似于式(6-9)，引入符号

$$\boldsymbol{Y}_\alpha^{-1} = -\mathrm{i}\boldsymbol{B}_\alpha\boldsymbol{A}_\alpha^{-1},\quad \overline{\boldsymbol{Y}}_\alpha^{-1} = \mathrm{i}\,\overline{\boldsymbol{B}}_\alpha\,\overline{\boldsymbol{A}}_\alpha^{-1},\quad \boldsymbol{Y}_\alpha = \mathrm{i}\boldsymbol{A}_\alpha\boldsymbol{B}_\alpha^{-1},\quad \overline{\boldsymbol{Y}}_\alpha = -\mathrm{i}\,\overline{\boldsymbol{A}}_\alpha\overline{\boldsymbol{B}}_\alpha^{-1}$$
$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}^{-1} + \overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}^{-1} = -\mathrm{i}\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{-1} + \mathrm{i}\,\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\ \overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{II}}^{-1},\quad \overline{\boldsymbol{R}} = -\mathrm{i}\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}^{-1} + \mathrm{i}\,\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\ \overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}^{1} \tag{6-48}$$

当 $x_1 \in L$ 时，有

$$\Delta\boldsymbol{\Phi}_{,1}(x_1) = \boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{I},1}(x_1) - \boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{II},1}(x_1) = [\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1) + \overline{\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)}] - [\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1) + \overline{\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)}] =$$
$$\mathrm{i}\boldsymbol{R}[\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1) - \boldsymbol{R}^{-1}\overline{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1) - \boldsymbol{R}^{-1}(\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}^{-1} - \overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}}^{-1})\boldsymbol{\Delta}^\infty] \tag{6-49}$$

作为例子，上式可证明如下

$$\mathrm{i}[\boldsymbol{R}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1) - \overline{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1) - (\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}^{-1} - \overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}}^{-1})\boldsymbol{\Delta}^\infty] =$$
$$\mathrm{i}[(-\mathrm{i}\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{-1} + \mathrm{i}\,\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\ \overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{II}}^{-1})\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1) - (-\mathrm{i}\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}^{-1} + \mathrm{i}\,\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\ \overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}^{-1})\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1) -$$
$$(\mathrm{i}\,\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\ \overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{II}}^{-1} - \mathrm{i}\,\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\ \overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}^{-1})\boldsymbol{\Delta}^\infty] =$$

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)-\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{II}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)-\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)+\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)+$$
$$\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{II}}^{-1}[\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)-\overline{\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)}]-\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}^{-1}[\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)-\overline{\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)}]=$$
$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1^+)-\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{II}}^{-1}\overline{\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}}(x_1^+)-\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1^-)+\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}^{-1}\overline{\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}}(x_1^-)=$$
$$[\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}^+(x_1)+\overline{\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}^-(x_1)}]-[\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}^-(x_1)+\overline{\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}^-(x_1)}]$$

6.2.2 一般双压电体中的共线界面刚性夹杂

在结合面上，式(6-49)为零，所以可以通过结合面进行解析延拓，构造一个除刚性夹杂外在全平面解析的矢量函数 $\boldsymbol{h}(z)$：

$$\boldsymbol{h}(z)=\begin{cases}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(z),\ z\in S^+\\ \boldsymbol{R}^{-1}\overline{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(z)+\boldsymbol{R}^{-1}(\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}^{-1}-\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}}^{-1})\boldsymbol{\Delta}^{\infty},\ z\in S^-\end{cases}\tag{6-50}$$

显然当 $x_1\notin L_c$ 时，$\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)=\boldsymbol{R}^{-1}\overline{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)+\boldsymbol{R}^{-1}(\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}^{-1}-\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}}^{-1})\boldsymbol{\Delta}^{\infty}$。在无穷远处，有 $\boldsymbol{h}^{\infty}=\boldsymbol{h}(\infty)$。由上式推出

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(z)=\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{h}(z),\quad \boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(z)=\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}^{-1}\overline{\boldsymbol{R}}^{-1}\boldsymbol{R}[\boldsymbol{h}(z)-\boldsymbol{R}^{-1}(\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}^{-1}-\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}^{-1})\boldsymbol{\Delta}^{\infty}]\tag{6-51}$$

从而当 $x_1\in L_c$ 时，式(6-49)又可写成

$$\Delta\boldsymbol{\Phi}_{,1}(x_1)=\mathrm{i}\boldsymbol{R}[\boldsymbol{h}^+(x_1)-\boldsymbol{h}^-(x_1)]\tag{6-52}$$

而当 $x_1\notin L_c$ 时，有 $\Delta\boldsymbol{\Phi}_{,1}(x_1)=\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{h}(z)$是除 L_c 外 z 平面上的解析函数。又由式(6-42)知，$D_2(x_1)$在整个 $x_1=0$ 上连续，所以有 $\Delta\Phi_{4,1}(x_1)=0$，或

$$\boldsymbol{R}_4[\boldsymbol{h}^+(x_1)-\boldsymbol{h}^-(x_1)]=\boldsymbol{0},\ -\infty<x_1<\infty,\ \boldsymbol{R}_4=[R_{41},\ R_{42},\ R_{43},\ R_{44}]\tag{6-53}$$

式中 $\boldsymbol{R}_4$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的第 4 行，$\boldsymbol{R}_4^{\mathrm{T}}$ 可以看成矢量。上式的解为

$$\boldsymbol{R}_4\boldsymbol{h}(z)=\boldsymbol{R}_4\boldsymbol{h}^{\infty},\ \boldsymbol{h}^{\infty}=\boldsymbol{h}(\infty)\tag{6-54}$$

利用式(6-46)，易于得到

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{U}_{\mathrm{I},1}(x_1)=\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)+\overline{\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)}=\boldsymbol{h}^+(x_1)+\overline{\boldsymbol{R}}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{h}\ \ (x_1)-\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{I}}^{\infty}\\&\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{I}}^{\infty}=\overline{\boldsymbol{R}}^{-1}(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}^{-1}+\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}^{-1})\boldsymbol{\Delta}^{\infty}\end{aligned}\tag{6-55}$$

在夹杂表面，由式(6-42)知

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{U}_{\mathrm{I},1}(x_1)=\omega(x_1)\boldsymbol{i}_2-E_1(x_1)\boldsymbol{i}_4,\ \omega(x_1)=\omega_r,\ x_1\in L_{\sigma}\\&\boldsymbol{i}_2=[0,\ 1,\ 0,\ 0]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{i}_4=[0,\ 0,\ 0,\ 1]^{\mathrm{T}}\end{aligned}\tag{6-56}$$

式中 $E_1(x_1)$为 $E_1(z)$在夹杂上的边值，是待求的函数。因此式(6-55)可化为

$$\boldsymbol{h}^+(x_1)+\overline{\boldsymbol{R}}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{h}^-(x_1)=\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{I}}^{\infty}+\omega(x_1)\boldsymbol{i}_2-E_1(x_1)\boldsymbol{i}_4,\ x_1\in L_c\tag{6-57}$$

上式是一个矢量方程。现在来求 Riemann - Hilbert 问题式(6-57)的解。

1) ***齐次方程的解***

式(6-57)的齐次方程为

$$\boldsymbol{h}^+(x_1)+\overline{\boldsymbol{R}}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{h}^-(x_1)=\boldsymbol{0},\ x_1\in L_c\tag{6-58}$$

上式和式(6-11)是相同的,只是那里的$\boldsymbol{H}$现在变成了$\boldsymbol{R}$,其基本解可以写成

$$\boldsymbol{X}_0(z_*)=\prod_{j=1}^{n}(z-a_j)^{-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\varepsilon}(z-b_j)^{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\varepsilon}\boldsymbol{\omega}\tag{6-59}$$

上式中的单值分支割线取为刚性夹杂线,ε是待定指数。当$x_1\to+\infty$时,幅角取为0,式中$\boldsymbol{\omega}$是常矢量,不要和转角混淆。刚性夹杂上、下两面的值不同。把式(6-59)代入(6-58),得

$$(\mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon}\boldsymbol{I}-\overline{\boldsymbol{R}}^{-1}\boldsymbol{R})\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{0},\quad(\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon}\boldsymbol{I}-\overline{\boldsymbol{R}}^{-1}\boldsymbol{R})\overline{\boldsymbol{\omega}}=\boldsymbol{0},\quad|\overline{\boldsymbol{R}}-\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon}\boldsymbol{R}|=0,\quad|\overline{\boldsymbol{R}}-\mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon}\boldsymbol{R}|=0\tag{6-60}$$

所以$\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon}$是材料系数组成的本征行列式的本征值,和裂纹问题一样,其解为

$$\varepsilon=\varepsilon_1=-\varepsilon_2=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctanh}(\sqrt{b^2-c}-b)^{1/2},\quad \mathrm{i}\kappa=-\varepsilon_3=\varepsilon_4=\frac{\mathrm{i}}{\pi}\arctan(\sqrt{b^2-c}+b)^{1/2}$$

$$b=\frac{1}{4}\operatorname{tr}[(\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_2)^2],\ c=|\boldsymbol{\Lambda}_1^{-1}\boldsymbol{\Lambda}_2|,\quad \boldsymbol{R}=\boldsymbol{\Lambda}_1+\mathrm{i}\boldsymbol{\Lambda}_2$$

$$\overline{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{\omega}^{(1)}=\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{\omega}^{(1)},\quad \overline{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{\omega}^{(2)}=\mathrm{e}^{-2\pi\varepsilon_1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{\omega}^{(2)},\quad \overline{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{\omega}^{(3)}=\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}\kappa}\boldsymbol{R}\boldsymbol{\omega}^{(3)},\quad \overline{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{\omega}^{(4)}=\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\kappa}\boldsymbol{R}\boldsymbol{\omega}^{(4)}\tag{6-61}$$

式中$\boldsymbol{\omega}^{(i)}$为相应的本征矢量,且$\boldsymbol{\omega}^{(2)}=c\overline{\boldsymbol{\omega}}^{(1)}$。本节取$\boldsymbol{\Omega}$为归一化的本征矢量矩阵,即

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Omega}=[\boldsymbol{\omega}^{(1)},\boldsymbol{\omega}^{(2)},\boldsymbol{\omega}^{(3)},\boldsymbol{\omega}^{(4)}],\quad \overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{I}\\&\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}(\overline{\boldsymbol{R}}^{-1}\boldsymbol{R})\boldsymbol{\Omega}=-\boldsymbol{M},\quad \boldsymbol{M}^{-1}=\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{R}^{-1}\overline{\boldsymbol{R}})\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{-\mathrm{T}}\\&\boldsymbol{M}=\langle\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma_1},\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma_2},\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma_3},\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma_4}\rangle=-\langle\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_1},\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_2},\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_3},\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_4}\rangle\end{aligned}\tag{6-62}$$

式中$\gamma=(1/2)+\mathrm{i}\varepsilon$。基本解组成的矩阵为

$$\boldsymbol{P}(z)=[\boldsymbol{X}_0^{(1)}(z),\boldsymbol{X}_0^{(2)}(z),\boldsymbol{X}_0^{(3)}(z),\boldsymbol{X}_0^{(4)}(z)]=\boldsymbol{\Omega}\left\langle\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(z-a_k)(z-b_k)}}\left(\frac{z-b_k}{z-a_k}\right)^{\mathrm{i}\varepsilon_*}\right\rangle\tag{6-63}$$

2) 非齐次方程的解

采用第二种解法。把式(6-57)两边同乘以$\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}$,得

$$\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}^+(x_1)-\boldsymbol{M}\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}^-(x_1)=\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\Delta}_1^\infty+\omega(x_1)\boldsymbol{i}_2-E_1(x_1)\boldsymbol{i}_4],\ x_1\in L_c\tag{6-64}$$

由于$\boldsymbol{M}$是对角阵,所以上式是解耦的。上式齐次方程的解为

$$\boldsymbol{Q}(z)==\langle Y_0^{(j)}(z)\rangle,\ Y_0^{(j)}(z)=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(z-a_k)(z-b_k)}}\left(\frac{z-b_k}{z-a_k}\right)^{\mathrm{i}\varepsilon_j}\tag{6-65}$$

非齐次方程的解为

$$\begin{aligned}&\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}(z)=\frac{\boldsymbol{Q}(z)}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\Delta}_1^\infty+\omega(x_1)\boldsymbol{i}_2-E_1(x_1)\boldsymbol{i}_4\}}{\boldsymbol{Q}^+(x_1)(x_1-z)}\mathrm{d}x_1+\boldsymbol{Q}(z)\boldsymbol{C}(z)\\&C^{(i)}(z)=C_n^{(i)}z^n+C_{n-1}^{(i)}z^{n-1}+\cdots+C_1^{(i)}z+C_0^{(i)}\end{aligned}\tag{6-66}$$

注意到上式中E_1在无穷远处有界,转角$\omega(x_1)$在L_r上可以是不同的常数,按式(1-131)可以在每个L_r上积出,整个积分积出后共含n个常数ω_r,由下式中分段为常数的$\omega(z)$表示。利用

$$\frac{Y_0^{(i)}(z)}{2\pi \mathrm{i}}\int_L \frac{\{\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\Delta}_1^{\infty}+\omega(x_1)\boldsymbol{i}_2-E_1(x_1)\boldsymbol{i}_4]\}_i}{Y_0^{(i)+}(x_1)(x_1-z)}\mathrm{d}x_1=\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_i}}\{\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\Delta}_1^{\infty}+\omega(z)\boldsymbol{i}_2-E_1(z)\boldsymbol{i}_4]\}_i$$

由式(6－66)积分后，最终可得

$$\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}(z)=\left\langle\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_i}}\right\rangle\{\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\Delta}_1^{\infty}+\omega(z)\boldsymbol{i}_2-E_1(z)\boldsymbol{i}_4]\}+\boldsymbol{Q}(z)\boldsymbol{C}(z) \tag{6－67}$$

由上式可以得到

$$\boldsymbol{h}(z)=\boldsymbol{\Omega}\left\langle\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_i}}\right\rangle\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\Delta}_1^{\infty}+\omega(z)\boldsymbol{i}_2-E_1(z)\boldsymbol{i}_4]+\boldsymbol{\Omega}\langle Y_0^{(*)}(z)\rangle\boldsymbol{C}(z) \tag{6－68}$$

式中利用了 $\boldsymbol{\Omega}=\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{-\mathrm{T}}$。令 $x_1\to\infty$，由式(6－68)中可得

$$\boldsymbol{h}^{\infty}=\boldsymbol{\Omega}\left\langle\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_i}}\right\rangle\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Delta}_1^{\infty}+\omega^{\infty}\boldsymbol{i}_2-E_1^{\infty}\boldsymbol{i}_4)+\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{C}_n \tag{6－69}$$

另一方面，由式(6－55)，在无穷远处有

$$\begin{gathered}\boldsymbol{h}^{+}(\infty)+\overline{\boldsymbol{R}}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{h}^{-}(\infty)-\boldsymbol{\Delta}_1^{\infty}=(\boldsymbol{I}+\overline{\boldsymbol{R}}^{-1}\boldsymbol{R})\boldsymbol{h}^{\infty}-\boldsymbol{\Delta}_1^{\infty}=\boldsymbol{\varepsilon}^{\infty}\\ \boldsymbol{h}^{\infty}=(\boldsymbol{I}+\overline{\boldsymbol{R}}^{-1}\boldsymbol{R})^{-1}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\infty}+\boldsymbol{\Delta}_1^{\infty})=\boldsymbol{\Omega}\left\langle\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_i}}\right\rangle\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\infty}+\boldsymbol{\Delta}_1^{\infty})\end{gathered} \tag{6－70}$$

式中已利用了 $1-\mathrm{e}^{2\pi\gamma_i}=1+\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_i}$。按式(6－55)，在无穷远处的边界条件是

$$\boldsymbol{U}_{\mathrm{I},1}(\infty)=\boldsymbol{\varepsilon}^{\infty}=[\varepsilon_{11}^{\infty},\ \varepsilon_{12}^{\infty}+\omega^{\infty},\ 2\varepsilon_{13}^{\infty},\ -E_1^{\infty}]^{\mathrm{T}} \tag{6－71}$$

式中 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\infty}$ 表示 $\boldsymbol{U}_{\mathrm{I},1}$ 在无穷远处的值，并已设 $u_{3,1}^{\infty}=u_{1,3}^{\infty}$，即在无穷远处没有绕 x_2 轴的转动。比较式(6－70)和(6－69)，可得

$$\boldsymbol{C}_n=\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\left\langle\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_i}}\right\rangle(\boldsymbol{\varepsilon}^{\infty}-\omega^{\infty}\boldsymbol{i}_2+E_1^{\infty}\boldsymbol{i}_4)=\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\left\langle\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_i}}\right\rangle[\varepsilon_{11}^{\infty},\ \varepsilon_{12}^{\infty},\ \varepsilon_{13}^{\infty},\ 0]^{\mathrm{T}} \tag{6－72}$$

确定待定系数 $\boldsymbol{C}_0,\ \boldsymbol{C}_1,\ \cdots,\ \boldsymbol{C}_{n-1},\ \omega_r$ 需要应用力学平衡条件和电场无旋条件

$$\int_{L_j}\boldsymbol{\Delta\Phi}_{,1}\mathrm{d}x_1=\int_{a_j}^{b_j}\boldsymbol{\Delta\Phi}_{,1}\mathrm{d}x_1=\boldsymbol{0},\quad \int_{a_j}^{b_j}\boldsymbol{\Delta}\Phi_{2,1}(x_1-x_0)\mathrm{d}x_1=M_r \tag{6－73}$$

式中 M_r 是作用在 L_r 上的力矩。利用式(6－52)，上式可化为

$$\int_{a_j}^{b_j}\boldsymbol{R}[\boldsymbol{h}^{+}(x_1)-\boldsymbol{h}^{-}(x_1)]\mathrm{d}x_1=\boldsymbol{0},\quad \int_{a_j}^{b_j}\boldsymbol{R}_2[\boldsymbol{h}^{+}(x_1)-\boldsymbol{h}^{-}(x_1)](x_1-x_0)\mathrm{d}x_1=M_r \tag{6－74}$$

式中 $\boldsymbol{R}_2=[R_{21},\ R_{22},\ R_{23},\ R_{24}]$，$\boldsymbol{R}_2^{\mathrm{T}}$ 可以看成矢量。上式还可写成另一形式

$$\oint_{\Gamma_j}\boldsymbol{R}\boldsymbol{h}(z)\mathrm{d}z=\boldsymbol{0},\ [\oint_{\Gamma_\lambda}\boldsymbol{h}(z)\mathrm{d}z=\boldsymbol{0}],\quad \mathrm{Im}\int_{a_j}^{b_j}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{h}(z)z\mathrm{d}z=M_r \tag{6－75}$$

上式已考虑到一般 $\boldsymbol{R}$ 和 $[\boldsymbol{h}^{+}(x_1)-\boldsymbol{h}^{-}(x_1)]$ 不正交，式中 Γ_j 是沿夹杂 L_{cj} 表面的任一条闭围线。利用式(6－54)、(6－68)、(6－71)和(6－72)，可求 $E_1(z)$

$$\boldsymbol{R}_4\boldsymbol{\Omega}\left\langle\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_i}}\right\rangle\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{i}_4E_1(z)=\boldsymbol{R}_4\left\{\boldsymbol{\Omega}\left\langle\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_i}}\right\rangle\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}[-\boldsymbol{\varepsilon}^{\infty}+\boldsymbol{i}_2\omega(z)]+\boldsymbol{\Omega}\langle Y_0^{(*)}(z)\rangle\boldsymbol{C}(z)\right\} \tag{6-76}$$

或

$$(\boldsymbol{R}_4\boldsymbol{R}^{-1}\overline{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{i}_4)E_1(z)=\boldsymbol{R}_4\{\boldsymbol{R}^{-1}\overline{\boldsymbol{R}}[-\boldsymbol{\varepsilon}^{\infty}+\omega(z)\boldsymbol{i}_2]+\boldsymbol{\Omega}\langle Y_0^{(*)}(z)\rangle\boldsymbol{C}(z)\} \tag{6-77}$$

据式(6-43)中的第二式和式(6-50),有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma}_2(z)&=2\mathrm{Re}[\boldsymbol{B}_\alpha\boldsymbol{F}_\alpha(z)]=2\mathrm{Re}\{\mathrm{i}[-\mathrm{i}\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}]\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(z)\}=2\mathrm{Re}[\mathrm{i}(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}})\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(z)]\\&=-2\mathrm{Im}[\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(z)]=-2\mathrm{Im}[\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{h}(z)],\ z\in S^+\\\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1)&=-2\mathrm{Im}[\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{h}^+(x_1)],\ x_1\notin L_c\end{aligned} \tag{6-78}$$

应力强度因子定义为

$$\boldsymbol{K}=\lim_{x_1\to b_j}\sqrt{2\pi(x_1-b_j)}\langle(x_1-b_j)^{-\mathrm{i}\varepsilon}\rangle\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1) \tag{6-79}$$

6.2.3 均匀介质中的刚性夹杂

对于均匀介质,有

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}=\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}=\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}=\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}=\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}^{-1}=\boldsymbol{Y}_{\mathrm{II}}^{-1}=\boldsymbol{Y}^{-1}=-\mathrm{i}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}$$
$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}^{-1}+\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}}^{-1}=-\mathrm{i}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}+\mathrm{i}\overline{\boldsymbol{B}}\overline{\boldsymbol{A}}^{-1}=\overline{\boldsymbol{R}},\quad \boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{I}}^{\infty}=\boldsymbol{\Delta}^{\infty}$$

式(6-46)和(6-47)化为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}^+(z)-\overline{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{F}}^+(z)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}^-(z)-\overline{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{F}}^-(z)=\boldsymbol{\Delta}^{\infty}\\&\boldsymbol{\Delta}^{\infty}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}(z)-\overline{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{F}}(z)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}(\infty)-\overline{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{F}}(\infty)\end{aligned} \tag{6-80}$$

根据式(6-80),引入新的矢量函数

$$\boldsymbol{h}(z)=\begin{cases}\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}(z),\ z\in S^+\\\overline{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{F}}(z)+\boldsymbol{\Delta}^{\infty},\ z\in S^-\end{cases} \tag{6-81}$$

则

$$\boldsymbol{U}_{,1}(x_1)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{F}(x_1)+\overline{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{F}(x_1)}=\boldsymbol{h}^+(x_1)+\boldsymbol{h}^-(x_1)-\boldsymbol{\Delta}^{\infty} \tag{6-82}$$

此时式(6-57)化为

$$\boldsymbol{h}^+(x_1)+\boldsymbol{h}^-(x_1)=\boldsymbol{\Delta}^{\infty}+\omega(x_1)\boldsymbol{i}_2-E_1(x_1)\boldsymbol{i}_4 \tag{6-83}$$

上式是各分量之间解耦的 $\boldsymbol{h}(z)$ 的边值问题。和上式对应的齐次方程的解

$$\boldsymbol{h}_0(z)=X_0(z)\boldsymbol{\omega},\ X_0(z)=\prod_{j=1}^{n}(z-a_j)^{-1/2}(z-b_j)^{-1/2} \tag{6-84}$$

和双材料界面刚性夹杂不同,均匀介质中所有的振荡指数 $\varepsilon_i\equiv0$,从而式(6-83)的解

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}(z) &= \frac{1}{2}[\boldsymbol{\Delta}^{\infty} + \omega(z)\boldsymbol{i}_2 - E_1(z)\boldsymbol{i}_4] + \frac{1}{2}X_0(z)\boldsymbol{C}(z) \\ \boldsymbol{C}(z) &= \boldsymbol{C}_n z^n + \boldsymbol{C}_{n-1}z^{n-1} + \cdots + \boldsymbol{C}_1 z + \boldsymbol{C}_0\end{aligned} \tag{6-85}$$

由式(6-85)知

$$\boldsymbol{h}(\infty) = \frac{1}{2}[\boldsymbol{\Delta}^{\infty} + \omega^{\infty}\boldsymbol{i}_2 - E_1^{\infty}\boldsymbol{i}_4] + \frac{1}{2}\boldsymbol{C}_n \tag{6-86}$$

结合式(6-82)和(6-71),有

$$\boldsymbol{U}_{,1}(\infty) = \boldsymbol{h}^+(\infty) + \boldsymbol{h}^-(\infty) - \boldsymbol{\Delta}^{\infty} = \boldsymbol{\varepsilon}^{\infty}, \quad 或\ \boldsymbol{h}(\infty) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\Delta}^{\infty} + \boldsymbol{\varepsilon}^{\infty}) \tag{6-87}$$

比较式(6-86)和(6-87),可得

$$\boldsymbol{C}_n = \boldsymbol{\varepsilon}^{\infty} - \omega^{\infty}\boldsymbol{i}_2 + E_1^{\infty}\boldsymbol{i}_4 = [\varepsilon_{11}^{\infty},\ \varepsilon_{12}^{\infty},\ 2\varepsilon_{13}^{\infty},\ 0]^{\mathrm{T}} \tag{6-88}$$

按式(6-52),有

$$\Delta\boldsymbol{\Phi}_{,1}(x_1) = \mathrm{i}\boldsymbol{R}[\boldsymbol{h}^+(x_1) - \boldsymbol{h}^-(x_1)] \tag{6-89}$$

确定待定系数 $\boldsymbol{C}_0$, $\boldsymbol{C}_1$, $\cdots$, $\boldsymbol{C}_{n-1}$, ω_r 需要应用力学平衡条件和电场无旋条件,即式(6-73)~(6-75)

$$\begin{aligned}&\int_{L_j}\Delta\boldsymbol{\Phi}_{,1}\mathrm{d}x_1 = \int_{a_j}^{b_j}\Delta\boldsymbol{\Phi}_{,1}\mathrm{d}x_1 = \boldsymbol{0}, \quad \int_{a_j}^{b_j}\Delta\Phi_{2,1}(x_1 - x_0)\mathrm{d}x_1 = M_r \\ &\int_{a_j}^{b_j}\boldsymbol{R}[\boldsymbol{h}^+(x_1) - \boldsymbol{h}^-(x_1)]\mathrm{d}x_1 = \boldsymbol{0}, \quad \int_{a_j}^{b_j}\boldsymbol{R}_2[\boldsymbol{h}^+(x_1) - \boldsymbol{h}^-(x_1)](x_1 - x_0)\mathrm{d}x_1 = M_r\end{aligned} \tag{6-90}$$

上式还可写成另一形式

$$\oint_{\Gamma_j}\boldsymbol{R}\boldsymbol{h}(z)\mathrm{d}z = \boldsymbol{0}\ [\oint_{\Gamma_j}\boldsymbol{h}(z)\mathrm{d}z = \boldsymbol{0}], \quad \mathrm{Im}\int_{a_j}^{b_j}\boldsymbol{R}_2\boldsymbol{h}(z)z\mathrm{d}z = \boldsymbol{0} \tag{6-91}$$

上式括号中的项已考虑到一般 $\boldsymbol{R}$ 和$[\boldsymbol{h}^+(x_1) - \boldsymbol{h}^-(x_1)]$不正交。式中 Γ_j 是沿夹杂 L_j 表面的任一条闭围线。利用式(6-54)、(6-85)和(6-87),可求 $E_1(z)$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{R}_4[\omega(z)\boldsymbol{i}_2 - E_1(z)\boldsymbol{i}_4] + X_0(z)\boldsymbol{C}(z) = \boldsymbol{R}_4(\boldsymbol{\varepsilon}^{\infty}) \Rightarrow R_{44}^{-1}E_1(z) = \\ &R_{42}^{-1}\omega(z) - \boldsymbol{R}_4\boldsymbol{\varepsilon}^{\infty} + X_0(z)C_4(z)\end{aligned} \tag{6-92}$$

应力强度因子为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K} &= \lim_{x_1 \to b_i}\sqrt{2\pi(x_1 - b_j)}\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1) = \\ &-\lim_{x_1 \to b_i}\sqrt{2\pi(x_1 - b_j)}\mathrm{Im}[X_0(x_1)\boldsymbol{C}(x_1)]\end{aligned} \tag{6-93}$$

由式(6-84)可见,对于 $\boldsymbol{R} = \overline{\boldsymbol{R}}$ 的双材料,裂端具有 $1/\sqrt{r}$的奇异性,渐近解没有振荡。

对于均匀介质,可用更简单的方法,此时可直接引入新的矢量函数

$$\boldsymbol{h}(z) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{F}(z),\ z \in S = S^+ + S^- \tag{6-94}$$

则

$$\boldsymbol{U}_{,1}(x_1) = \boldsymbol{AF}(x_1) + \overline{\boldsymbol{AF}(x_1)} = \boldsymbol{h}^+(x_1) + \overline{\boldsymbol{h}}^-(x_1) = \boldsymbol{h}^-(x_1) + \overline{\boldsymbol{h}}^+(x_1) \quad (6-95)$$

由此推出

$$\boldsymbol{h}^+(x_1) - \overline{\boldsymbol{h}}^+(x_1) = \boldsymbol{h}^-(x_1) - \overline{\boldsymbol{h}}^-(x_1)$$

由上式知，$\boldsymbol{h}^+(x_1)-\overline{\boldsymbol{h}}^+(x_1)$是上半平面解析的函数的边值，$\boldsymbol{h}^-(x_1)-\overline{\boldsymbol{h}}^-(x_1)$是下半平面解析的函数的边值，因而有

$$\boldsymbol{h}^+(z) - \overline{\boldsymbol{h}}^+(z) = \boldsymbol{h}^-(z) - \overline{\boldsymbol{h}}^-(z) = \boldsymbol{h}(z) - \overline{\boldsymbol{h}}(z) = \boldsymbol{\Delta}^\infty$$

$$\boldsymbol{\Delta}^\infty = \boldsymbol{h}^+(\infty) - \overline{\boldsymbol{h}}^+(\infty) = \boldsymbol{h}^-(\infty) - \overline{\boldsymbol{h}}^-(\infty) = \boldsymbol{h}(\infty) - \overline{\boldsymbol{h}}(\infty)$$

类似于式(6-83)，可得

$$\boldsymbol{h}^+(x_1) + \boldsymbol{h}^-(x_1) = \boldsymbol{\Delta}^\infty + \omega \boldsymbol{i}_2 - E_1(x_1)\boldsymbol{i}_4 \quad (6-96)$$

以后的解法和前面相同。

文献[79, 80, 81]等许多论文讨论了压电体中的线性刚性夹杂问题。

6.3 双压电体中的开路裂纹

6.3.1 一般讨论

开路裂纹和上面讨论的刚性夹杂的主要区别在于界面上的边界条件不同。对于开路裂纹，裂纹面上的边界条件为

$$\begin{aligned} &\Sigma_{2i}(x_1) = \Sigma_{\mathrm{I}2i}(x_1) = \Sigma_{\mathrm{II}2i}(x_1) = \Sigma_{0i}(x_1),\ i = 1,\ 2,\ 3 \\ &E_{\mathrm{I}1} = E_{\mathrm{II}1},\quad D_{\mathrm{I}2} = D_{\mathrm{II}2},\ x \in L_c \end{aligned} \quad (6-97)$$

对比式(6-41)，刚性夹杂界面上给定的是位移边界条件，而式(6-97)给定的是应力边界条件；但电学边界条件是一样的。开路裂纹问题也属于混合边值问题。由于在裂纹面上广义应力是连续的，所以在整个x_1轴上连续，即有

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1) + \overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\,\overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)} = \boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1) + \overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\,\overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)} = \boldsymbol{\Sigma}_2(x_1),\ -\infty < x_1 < \infty \quad (6-98)$$

从而式(6-4)～(6-6)仍然成立，不过和那里不同的是，现在设在无穷远处有外力和电位移作用，因而式(6-6)不为零，而等于常数Δ^∞。类似于式(6-46)、(6-47)，有

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1) - \overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\,\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{II}}(x_1) = \boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1) - \overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\,\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{I}}(x_1) = \boldsymbol{\Delta}^\infty \\ &\boldsymbol{\Delta}^\infty = \frac{1}{2}[(\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}^\infty + \boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}^\infty) - (\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\,\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{I}}^\infty + \overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\,\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{II}}^\infty)],\ \boldsymbol{F}_\alpha(z) = \boldsymbol{F}_\alpha^\infty + \boldsymbol{F}_{\alpha 0}(z),\ \alpha = \mathrm{I},\ \mathrm{II} \end{aligned} \quad (6-99)$$

由于引入了Δ^∞，此时式(6-8)相应地改为

$$\mathrm{i}\boldsymbol{d}'(x_1)=\boldsymbol{H}\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)-\overline{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)-(\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}-\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}})\boldsymbol{\Delta}^{\infty} \tag{6-100}$$

式(6-10)相应地改为

$$\boldsymbol{h}(z)=\begin{cases}\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(z),\ x_2\geqslant 0,\\ \boldsymbol{H}^{-1}\overline{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(z)+\boldsymbol{H}^{-1}(\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}-\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}})\boldsymbol{\Delta}^{\infty},\ x_2\leqslant 0,\end{cases}\ z\notin L_c \tag{6-101}$$

把式(6-101)代入(6-98),并利用式(6-99),便得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1)&=\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)+\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)}=\boldsymbol{h}^{+}(x_1)+\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)-\boldsymbol{\Delta}^{\infty}=\\&\boldsymbol{h}^{+}(x_1)+\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{h}^{-}(x_1)-\boldsymbol{\Delta}_1^{\infty}\\\boldsymbol{\Delta}_1^{\infty}&=\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{II}}+\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}})\boldsymbol{\Delta}^{\infty}\end{aligned} \tag{6-102}$$

在裂纹面上 $\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1)=\boldsymbol{\Sigma}_{02}(x_1)$,$\boldsymbol{\Sigma}_{02}(x_1)$ 是给定值。不失一般性,设裂纹面上 $\sigma_{2j}=0$,但 D_2 是未知的,不能设为零。所以在裂纹面上,上式化为

$$\boldsymbol{h}^{+}(x_1)+\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{h}^{-}(x_1)=\boldsymbol{\Delta}_1^{\infty}+\boldsymbol{i}_4D_2(x_1) \tag{6-103}$$

另一方面,利用式(6-101),式(6-100)可以写成

$$\mathrm{i}\boldsymbol{d}'(x_1)=\boldsymbol{H}[\boldsymbol{h}^{+}(x_1)-\boldsymbol{h}^{-}(x_1)] \tag{6-104}$$

按式(6-98)可以推出 E_1 沿整个 x_1 连续,所以有

$$\boldsymbol{H}_4[\boldsymbol{h}^{+}(x_1)-\boldsymbol{h}^{-}(x_1)]=0,\quad \boldsymbol{H}_4=[H_{41},H_{42},H_{43},H_{44}],\ |x_1|<\infty \tag{6-105}$$

其解为

$$\boldsymbol{H}_4\boldsymbol{h}(z)=\boldsymbol{H}_4\boldsymbol{h}(\infty),\quad h_4(z)=-\frac{1}{H_{44}}\sum_{j=1}^{3}H_{4j}h_j(z)+\frac{1}{H_{44}}\boldsymbol{H}_4\boldsymbol{h}(\infty) \tag{6-106}$$

这样,问题便化成求解式(6-103)和(6-106)。

6.3.2 问题的解

与式(6-103)对应的齐次方程和式(6-11)具有相同的形式,其解也相同,因而解仍由式(6-20)表示,即

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{P}(z)=[\boldsymbol{X}_0^{(1)}(z),\boldsymbol{X}_0^{(2)}(z),\boldsymbol{X}_0^{(3)}(z),\boldsymbol{X}_0^{(4)}(z)],\ \boldsymbol{X}_0^{(i)}(z)=\boldsymbol{\omega}^{(i)}Y_0^{(i)}(z)\\&Y_0^{(i)}(z)=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(z-a_k)(z-b_k)}}\left(\frac{z-b_k}{z-a_k}\right)^{\mathrm{i}\varepsilon_i},\ \boldsymbol{\omega}^{(i)}=[\omega_1^{(i)},\cdots,\omega_4^{(i)}]^{\mathrm{T}},\ i=1,2,3,4\end{aligned} \tag{6-107}$$

采用第二种解法解(6-103)。按式(6-26),取归一化矩阵 $\boldsymbol{\Omega}=[\boldsymbol{\omega}^{(1)},\boldsymbol{\omega}^{(2)},\boldsymbol{\omega}^{(3)},\boldsymbol{\omega}^{(4)}]$,$\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}=\boldsymbol{I}$。把式(6-103)两边同乘以 $\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}$,并令 $\boldsymbol{\Psi}(z)=\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}(z)$,则式(6-103)化为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Psi}^{+}(t)-\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Psi}^{-}(t)=\boldsymbol{f}^{*}(t),\quad \Psi_i^{+}(t)-\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma_i}\Psi_i^{-}(t)=f_i^{*}(t)\\&\boldsymbol{\Psi}(z)=\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}(z),\ \boldsymbol{M}=\langle\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma_1},\cdots,\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\gamma_4}\rangle,\ \boldsymbol{f}^{*}(t)=\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\Delta}_1^{\infty}+\boldsymbol{i}_4D_2(x_1)]\end{aligned} \tag{6-108}$$

类似于式(6-68)上式的解为

$$\boldsymbol{h}(z)=\boldsymbol{\Omega}\left\langle\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_i}}\right\rangle\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\Delta}_1^{\infty}+\boldsymbol{i}_4 D_2(z)]+\boldsymbol{\Omega}\langle Y_0^{(i)}(z)\rangle\boldsymbol{C}(z) \tag{6-109}$$

式中 $\boldsymbol{C}'(z)$仍由式(6-66)表示。在无穷远处,上式取值为

$$\boldsymbol{h}(\infty)=\boldsymbol{\Omega}\left\langle\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_i}}\right\rangle\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\Delta}_1^{\infty}+\boldsymbol{i}_4 D_2(x_1)]+\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{C}_n \tag{6-110}$$

把式(6-109)代入(6-106),可得确定 $D_2(z)$的方程:

$$\boldsymbol{H}_4\left\{\boldsymbol{\Omega}\left\langle\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_i}}\right\rangle\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\Delta}_1^{\infty}+\boldsymbol{i}_4 D_2(z)]+\boldsymbol{\Omega}\langle Y_0^{(i)}(z)\rangle\boldsymbol{C}(z)\right\}=\boldsymbol{H}_4\boldsymbol{h}(\infty) \tag{6-111}$$

式中 $\boldsymbol{h}(\infty)$可以用无穷远处的广义应力表示。计及在结合区 $\boldsymbol{h}^+(x_1)=\boldsymbol{h}^-(x_1)$,由式(6-102)得 $\boldsymbol{\Sigma}_2(\infty)=(\boldsymbol{I}+\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H})\boldsymbol{h}(\infty)-\boldsymbol{\Delta}_1^{\infty}$,两边同乘以$\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}$ 后可得

$$\boldsymbol{h}(\infty)=\boldsymbol{\Omega}\left\langle\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_i}}\right\rangle\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Delta}_1^{\infty}+\boldsymbol{\Sigma}_2^{\infty}) \tag{6-112}$$

比较式(6-110)和(6-112)可得

$$\boldsymbol{C}_n=\left\langle\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_i}}\right\rangle\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Delta}_1^{\infty}+\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_2^{\infty}),\ \widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_2^{\infty}=[\boldsymbol{\sigma}_2^{\infty},0]^{\mathrm{T}} \tag{6-113}$$

其余的系数由单值性条件确定。x_1 轴上的应力为

$$\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1)=(\boldsymbol{I}+\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H})\boldsymbol{h}(x_1)-\boldsymbol{\Delta}_1^{\infty} \tag{6-114}$$

进一步的分析已无困难,文献[82]有较详细的分析。

6.4 双压电介质中的共线界面电极

6.4.1 一般讨论

讨论在无穷远处没有广义载荷作用的双材料问题。材料Ⅰ位于上半平面 S^+,$x_2>0$;材料Ⅱ位于下半平面 S^-,$x_2<0$;$x_1=0$ 为界面,界面的全体记为 L,界面上存在无刚度的薄柔性电极,其左端点记为$-a$,右端点记为 a,电极的全体记为 L_c,其余的部分 $L-L_c$ 称结合面(图 6-3)。设在结合面上的位移、电势和面力连续,电极面上的作用力自平衡,位移相等,电势相等,即

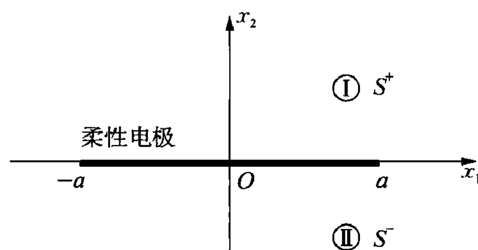


图 6-3 双压电体中的共线界面电极

$$\begin{aligned}&\sigma_{2i}^+=\sigma_{2i}^-,\quad u_i^+=u_i^-,\quad E_1^+=E_1^-,\quad D_2^+=D_2^-,\ x_1\notin L_c\\&\sigma_{2i}^+=\sigma_{2i}^-,\quad u_i^+=u_i^-,\quad E_1^+=E_1^-=0,\ x_1\in L_c\\&\sigma_{ij}\to 0,\quad D_j\to 0,\quad z\to\infty\end{aligned} \tag{6-115}$$

在电极上给定电荷 q:

$$\int_L \delta(x_1)\mathrm{d}x_1 = q,\ \delta(x_1) = D_2^+(x_1) - D_2^-(x_1) \tag{6-116}$$

由以上叙述知，在整个 x_1 轴上广义位移连续，按式(4－19)有 $\boldsymbol{U}_{\mathrm{I}}(x_1) = \boldsymbol{U}_{\mathrm{II}}(x_1)$ 或 $\boldsymbol{U}_{\mathrm{I},1}(x_1) = \boldsymbol{U}_{\mathrm{II},1}(x_1)$ 所以有

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1) + \overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}\ \overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1) + \overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{II}}\ \overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)},\ -\infty < x_1 < \infty \tag{6-117}$$

类似于式(6－6)，(6－7)，因已设无穷远处没有应力，故由上式推出

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(z) = \overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{II}}\ \overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{II}}(z),\quad \text{或}\ \boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(z) = -\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}\ \overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\ \overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{II}}(z),\ x_2 > 0 \\ &\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(z) = \overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}\ \overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{I}}(z),\quad \text{或}\ \boldsymbol{Y}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(z) = -\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}}\ \overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\ \overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{I}}(z),\ x_2 < 0 \end{aligned} \tag{6-118}$$

式中 $\boldsymbol{Y} = \mathrm{i}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}$。按式(6－115)和(4－24)有

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{I}2} - \boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{II}2} = \boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{I},1} - \boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{II},1} = \begin{cases} \boldsymbol{0},\ z \notin L_c \\ [0,\ 0,\ 0,\ -\delta(x_1)]^{\mathrm{T}},\ z \in L_c \end{cases} \tag{6-119a}$$

参照式(6－6)，上式可改写为

$$[\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1) - \overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\ \overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}}(x_1)] - [\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1) - \overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\ \overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}}(x_1)] = \begin{cases} \boldsymbol{0},\ z \notin L_c \\ [0,\ 0,\ 0, \delta(x_1)]^{\mathrm{T}},\ z \in L_c \end{cases} \tag{6-119b}$$

上式等式的左边第一项在 $x_2 < 0$ 是解析的，左边第二项在 $x_2 > 0$ 是解析的，而在 $x_1 = 0$ 上，除 $x_1 \in L$ 外是连续的。所以上面的边值问题的解为

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(z) - \overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\ \overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}}(z) = [0,\ 0,\ 0,\ \overline{\omega}(z)]^{\mathrm{T}},\ z \in S^+,\ \overline{\omega}(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{\delta(x_1)}{x_1 - z}\mathrm{d}x_1 \\ &\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(z) - \overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\ \overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}}(z) = [0,\ 0,\ 0,\ \overline{\omega}(z)]^{\mathrm{T}},\ z \in S^- \end{aligned} \tag{6-120}$$

利用式(6－118)，上式可化为

$$\begin{aligned} &(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}} + \overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}})\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(z) = \overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}[0,\ 0,\ 0,\ \overline{\omega}(z)]^{\mathrm{T}},\ z \in S^+ \\ &(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{II}} + \overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}})\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(z) = \overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}}[0,\ 0,\ 0,\ \overline{\omega}(z)]^{\mathrm{T}},\ z \in S^- \end{aligned} \tag{6-121}$$

因此只要求出 $\overline{\omega}(z)$，便可求出问题的解。

6.4.2 求解

利用式(6－115)中 L_c 上的 $E_1^- = 0$ 的条件来确定 $\overline{\omega}(z)$。按式(6－1)，这一条件可以写成 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1) + \overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}\ \overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)} = [*,\ *,\ *,\ 0]^{\mathrm{T}}$，式中 $*$ 是本次求解中无需确定的量。式中 $\overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)}$ 是 z 从上半平面 S^+ 趋近的 $\overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(z)}$ 值，它等于 z 从下半平面 S^- 趋近时的 $\overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}}(z)$ 值。利用式(6－118)，上式可以写成

$$[\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)]^+ + [\boldsymbol{Y}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)]^- = [*,\ *,\ *,\ 0]^{\mathrm{T}},\ z \in L_c \tag{6-122}$$

把式(6－121)代入上式便得

$$\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}+\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}})^{-1}\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}[0,0,0,\overline{\omega}^{+}(z)]^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{Y}_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{II}}+\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}})^{-1}\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}}[0,0,0,\overline{\omega}^{-}(z)]^{\mathrm{T}}=[*,*,*,0]^{\mathrm{T}},\ z\in L_c \tag{6-123}$$

上式中的第四个分量是

$$[\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}+\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}})^{-1}\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}]_{44}\overline{\omega}^{+}(x_1)+[\boldsymbol{Y}_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{II}}+\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}})^{-1}\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}}]_{44}\overline{\omega}^{-}(x_1)=0 \tag{6-124}$$

其解为

$$\overline{\omega}(z)=c(z+a)^{-\gamma}(z-a)^{\gamma-1},\ \gamma=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\ln\frac{-[\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}+\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}})^{-1}\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}]_{44}}{[\boldsymbol{Y}_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{II}}+\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}})^{-1}\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}}]_{44}} \tag{6-125}$$

特别是对于单一材料，$\gamma=1/2$；可以证明，对于同样材料，但极化方向相反的情形，也有 $\gamma=1/2$。对于这两种情形，裂尖前方的应力没有振荡性，且具 $1/\sqrt{r}$ 的奇异性。比较式(6－120)和(6－125)在无穷远处的值可得

$$c=-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\delta(x_1)\mathrm{d}x_1=\frac{1}{2\pi}\mathrm{i}q \tag{6-126}$$

求出 $\overline{\omega}(z)$后，把它代入式(6－121)，便可求出 $\boldsymbol{h}_{\mathrm{I}}(z)=\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(z)$，$\boldsymbol{h}_{\mathrm{II}}(z)=\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(z)$，然后可求 $F_{\mathrm{I}i}(z_*)=\sum_j \boldsymbol{B}_{\mathrm{I}ij}^{-1}\boldsymbol{h}_{\mathrm{I}j}(z_j)$，$F_{\mathrm{II}i}(z_*)=\sum_j \boldsymbol{B}_{\mathrm{II}ij}^{-1}\boldsymbol{h}_{\mathrm{II}j}(z_j)$。

对于多个共线电极可类似处理，文献[83]有较为详细的讨论。

6.5 双压电介质中裂纹的接触区域模型

6.5.1 开路裂纹的一般讨论

讨论在无穷远处有广义载荷作用的双材料问题，本节中将用分量形式讨论，取用 x_1x_3 平面。材料Ⅰ位于上半平面 S^+，$x_3>0$；材料Ⅱ位于下半平面 S^-，$x_3<0$；$x_1=0$ 为界面，界面的全体记为 L，界面上存在一个开路裂纹，记为 L_c，其左端点记为 c，右端点记为 b。Herrmann 和 Loboda[84]研究了裂纹的接触区域模型，他们设在裂纹右端点附近存在一接触区域 ab，设在 ab 仅作用接触压力，没有摩擦力，其余的部分称结合面(图 6－4)。无穷远处的边界条件设为

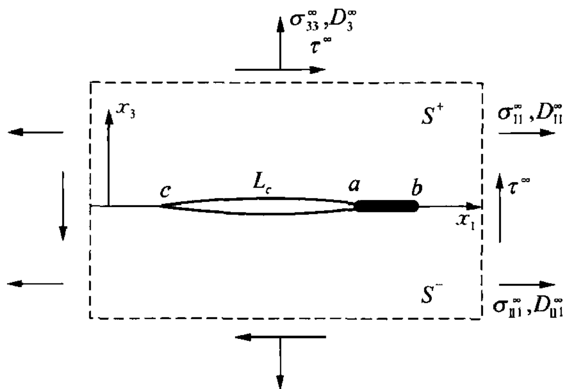


图 6－4 双压电体中的接触区域模型

$$\begin{aligned}&\sigma_{\mathrm{I}33}^{\infty}=\sigma_{\mathrm{II}33}^{\infty}=\sigma_{33}^{\infty},\quad \sigma_{\mathrm{I}13}^{\infty}=\sigma_{\mathrm{II}13}^{\infty}=\tau^{\infty},\quad \sigma_{\mathrm{I}11}^{\infty}=\sigma_{\mathrm{II}11}^{\infty}=\sigma_{11}^{\infty}\\&D_{\mathrm{I}3}^{\infty}=D_{\mathrm{II}3}^{\infty}=D_3^{\infty},\quad D_{\mathrm{I}1}^{\infty}=D_{\mathrm{II}1}^{\infty}=D_1^{\infty}\end{aligned} \tag{6-127}$$

在结合面上的位移、电势和面力连续的条件要求

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{d}(x_1)=[\![\boldsymbol{U}(x_1)]\!]=\boldsymbol{U}_{\mathrm{I}}(x_1)-\boldsymbol{U}_{\mathrm{II}}(x_1)=\boldsymbol{0},\qquad \boldsymbol{U}_\alpha(x_1)=2\mathrm{Re}[\boldsymbol{A}_\alpha\boldsymbol{f}_\alpha(x_1)],\ x_1\notin(c,\ b)\\
&[\![\boldsymbol{\Sigma}_3]\!]=\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{I}3}(x_1)-\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{II}3}(x_1)=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{\Sigma}_{\alpha3}(x_1)=2\mathrm{Re}[\boldsymbol{B}_\alpha\boldsymbol{F}_\alpha(x_1)],\ \alpha=\mathrm{I},\ \mathrm{II}
\end{aligned}
\tag{6-128}
$$

在裂纹面上有

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{13}^{\pm}=0,\quad \sigma_{33}^{\pm}=0,\quad [\![\varphi]\!]=0,\quad [\![D_3]\!]=0,\ x_1\in(c,\ a)\\
&\sigma_{13}^{\pm}=0,\quad [\![\sigma_{33}]\!]=0,\quad [\![u_3]\!]=0,\quad [\![\varphi]\!]=0,\quad [\![D_3]\!]=0,\ x_1\in(a,\ b)
\end{aligned}
\tag{6-129}
$$

上式已假设在接触区域只有法向应力，没有摩擦力。由以上叙述知，在整个 x_1 轴上外载荷连续，即有 $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{I}3}(x_1)=\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{II}3}(x_1)$。从而有关式(6-4)～(6-6)的叙述仍然成立，所以有

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)+\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\ \overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)}=\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)+\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\ \overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)},\ -\infty<x_1<\infty\\
&\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)-\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\ \overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{II}}(x_1)=\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)-\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\ \overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{I}}(x_1),\ -\infty<x_1<\infty
\end{aligned}
\tag{6-130}
$$

由于现在无穷远处广义应力不为零，所以由上式推出

$$
\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{II}}(z)=\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}^{-1}(\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(z)-\boldsymbol{\Delta}^{\infty}),\ x_3>0;\quad \overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{I}}(z)=\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}^{-1}(\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(z)-\boldsymbol{\Delta}^{\infty}),\ x_3<0
$$

因为 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(z)$，$\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(z)$ 为待定函数，和前几节不同，这里把 $\boldsymbol{\Delta}^{\infty}$ 并入其中，从而有

$$
\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(z)=\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\ \overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{II}}(z),\ x_3>0;\quad \boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(z)=\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\ \overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{I}}(z),\ x_3<0 \tag{6-131}
$$

利用式(6-130)，由式(6-128)推出

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{d}'(x_1)&=\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)-\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}^{-1}\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\ \overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{I}}(x_1)+\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}\ \overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{I}}(x_1)-\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{II}}\ \overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}^{-1}B_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)=\\
&\boldsymbol{M}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)+\overline{\boldsymbol{M}}\,\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{I}}(x_1)
\end{aligned}
\tag{6-132}
$$

$$
\boldsymbol{M}=\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}-\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{II}}\,\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}=(\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}^{-1}-\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{II}}\,\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}^{-1})\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}=-\mathrm{i}\boldsymbol{H}\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}
$$

本处取用的符号和式(6-8)不同，取用 $\boldsymbol{M}$ 代替那里的 $-\mathrm{i}\boldsymbol{H}\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}$，$\boldsymbol{H}$ 仍由式(6-9)表示。首先在 z 平面上讨论问题。按式(6-131)，此时可通过 $x_1\notin L_c$ 的实轴进行解析延拓，构造一个除裂纹外在全平面 $z=x_1+\mathrm{i}x_3$ 上解析的函数 $\boldsymbol{W}(z)$

$$
\boldsymbol{W}(z)=\begin{cases}\boldsymbol{M}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(z),\ x_2\geqslant 0\\ -\overline{\boldsymbol{M}}\,\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{I}}(z),\ x_2\leqslant 0\end{cases} \tag{6-133}
$$

从而在裂纹面上有

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{d}'(x_1)=\boldsymbol{W}^{+}(x_1)-\boldsymbol{W}^{-}(x_1),\quad \boldsymbol{\Sigma}_0(x_1)=\boldsymbol{G}\boldsymbol{W}^{+}(x_1)-\overline{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{W}^{-}(x_1)\\
&\boldsymbol{G}=\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{M}^{-1}=\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}[(\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\ \overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}^{-1}-\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{II}}\ \overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}^{-1})\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}]^{-1}=(\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\ \overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}^{-1}-\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{II}}\ \overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}^{-1})^{-1}=\mathrm{i}\boldsymbol{H}^{-1}
\end{aligned}
\tag{6-134}
$$

由于 $\boldsymbol{H}$ 是厄米特矩阵，所以有 $\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}}=-\overline{\boldsymbol{G}}$。

6.5.2 具有 6 mm 对称性的压电陶瓷

现在讨论具有 6 mm 对称性的沿 x_3 轴极化的压电陶瓷的机电性质，此时 x_1x_2 为各向同

性平面。对于和 x_2 方向无关的广义平面问题，u_2 和(u_1, u_3, φ)解耦，下面讨论平面问题(u_1, u_3, φ)。采用 Voigt 紧缩的材料系数记号，此时用到的材料常数为 C_{11}，C_{33}，C_{13}，C_{44}，e_{31}，e_{33}，e_{15} 和 ϵ_{11}，ϵ_{33}，经过仔细分析和 $\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} = -\overline{\boldsymbol{G}}$ 的性质推知，以及数字结果显示，$\boldsymbol{G}$ 具有下列结构

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{13} & G_{14} \\ G_{31} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathrm{i}g_{11} & g_{13} & g_{14} \\ g_{31} & \mathrm{i}g_{33} & \mathrm{i}g_{34} \\ g_{41} & \mathrm{i}g_{43} & \mathrm{i}g_{44} \end{bmatrix} \tag{6-135}$$

且对一类材料成立下述关系：式中 g_{ij} 均为实数，且矩阵$\begin{bmatrix} g_{11} & g_{13} \\ g_{31} & g_{33} \end{bmatrix}$是正定矩阵和 $g_{44} < 0$，$g_{13} = -g_{31}$，$g_{14} = -g_{41}$，$g_{34} = g_{43}$。此时确定 $z = x_1 + \mu_j x_3$ 的本征方程式(4-14)化为

$$\begin{bmatrix} C_{11} + C_{44}\mu^2 & (C_{13} + C_{44})\mu & (e_{31} + e_{15})\mu \\ (C_{13} + C_{44})\mu & C_{44} + C_{33}\mu^2 & e_{15} + e_{33}\mu^2 \\ (e_{31} + e_{15})\mu & e_{15} + e_{33}\mu^2 & -\epsilon_{11} - \epsilon_{33}\mu^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_3 \\ a_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{6-136}$$

具有正虚部的本征根为

$$\mu_1 = \alpha_1 + \mathrm{i}\beta_1, \quad \mu_3 = -\alpha_1 + \mathrm{i}\beta_1, \quad \mu_4 = \mathrm{i}\beta_4 \tag{6-137}$$

其中 α_1，β_1，β_4 均为实数。从而 $\boldsymbol{B}$ 矩阵为

$$\begin{aligned} &B_{1j} = C_{44}(\mu_j A_{1j} + A_{3j}) + e_{15}A_{4j}, \quad B_{3j} = C_{13}A_{1j} + C_{33}\mu_j A_{3j} + e_{33}\mu_j A_{4j} \\ &B_{4j} = e_{31}A_{1j} + e_{33}\mu_j A_{3j} - \epsilon_{33}\mu_j A_{4j}, \ j = 1,\ 3,\ 4 \end{aligned} \tag{6-138}$$

6.5.3 开路裂纹的接触区域模型

式(6-128)和(6-129)表明在整个 x_1 轴上 $[\![\varphi]\!] = 0$，结合式(6-133)知，在整个 x_1 轴上有 $W_4^+(x_1) - W_4^-(x_1) = 0$，因而 $W_4(z)$在整个平面解析；计及无穷远处应力和电位移为常值，推出 $W_4(z) = W_4^0 =$ 常值。采用式(6-135)中 $\boldsymbol{G}$ 的形式，则式(6-134)中的第二式化为

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathrm{I}13}(x_1, 0) &= \mathrm{i}g_{11}W_1^+(x_1) + g_{13}W_3^+(x_1) + \mathrm{i}g_{11}W_1^-(x_1) - g_{13}W_3^-(x_1) \\ \sigma_{\mathrm{I}33}(x_1, 0) &= g_{31}W_1^+(x_1) + \mathrm{i}g_{33}W_3^+(x_1) - g_{31}W_1^-(x_1) + \mathrm{i}g_{33}W_3^-(x_1) + 2\mathrm{i}g_{34}W_4^0 \\ D_{\mathrm{I}3}(x_1, 0) &= g_{41}W_1^+(x_1) + \mathrm{i}g_{43}W_3^+(x_1) - g_{41}W_1^-(x_1) + \mathrm{i}g_{43}W_3^-(x_1) + 2\mathrm{i}g_{44}W_4^0 \end{aligned} \tag{6-139}$$

计及 $x_1 \in L - L_c$ 时有 $W_1^+(x_1) = W_1^-(x_1)$，$W_3^+(x_1) = W_3^-(x_1)$，由式(6-139)可得

$$\left.\begin{aligned} \sigma_{\mathrm{I}33}(x_1, 0) &= 2\mathrm{i}g_{33}W_3^+(x_1) + 2\mathrm{i}g_{34}W_4^0, \\ D_{\mathrm{I}3}(x_1, 0) &= 2\mathrm{i}g_{43}W_3^+(x_1) + 2\mathrm{i}g_{44}W_4^0, \end{aligned}\right. \quad x_1 \notin (c, b) \tag{6-140}$$

由上式推出

$$g_{43}\sigma_{\mathrm{I}33}(x_1, 0) - g_{33}D_{\mathrm{I}3}(x_1, 0) = -2\mathrm{i}\Delta W_4^0, \ \Delta = g_{33}g_{44} - g_{34}g_{43} \tag{6-141}$$

因为 W_4^0 是常数，可由无穷远处的值求得，即

$$W_4^0 = \frac{1}{2}\Delta^{-1}(g_{43}\sigma_3^\infty - g_{33}D_3^\infty) \tag{6-142}$$

利用式(6-139),再经过一些组合,式(6-139)的头两式可以改写成

$$\begin{aligned}
&\sigma_{\text{I}33}(x_1,0)+\mathrm{i}m_j\sigma_{\text{I}13}(x_1,0)=t_j[K_j^+(x_1)+\gamma_jK_j^-(x_1)]+\sigma_0,\ j=1,2\\
&\sigma_0=-g_{34}\Delta^{-1}(g_{43}\sigma_{33}^\infty-g_{33}D_3^\infty),\quad d_0=-g_{44}\Delta^{-1}(g_{43}\sigma_{33}^\infty-g_{33}D_3^\infty)\\
&K_j(z)=W_1(z)+\mathrm{i}s_jW_3(z),\quad t_j=g_{31}-m_jg_{11}\\
&\gamma_j=-\frac{g_{31}+m_jg_{11}}{t_j},\ s_j=\frac{g_{33}+m_jg_{13}}{t_j},\ m_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{g_{31}g_{33}}{g_{11}g_{13}}}=\pm\sqrt{\frac{g_{33}}{g_{11}}}
\end{aligned}\tag{6-143}$$

由式(6-143)和(6-133)可得位移导数间断值的表达式

$$[\![u_1'(x_1,0)]\!]+\mathrm{i}s_j[\![u_3'(x_1,0)]\!]=K_j^+(x_1)-K_j^-(x_1)\tag{6-144}$$

由式(6-128)和(6-129)知,$K_j(z)$式是除去切口(c,b)外,在整个平面上解析的函数。

引入函数

$$\widetilde{K}_j(z)=K_j(z)+\sigma_0/[t_j(1+\gamma_j)],\ j=1,2\tag{6-145}$$

则式(6-143)中的第一个和式(6-144)化为

$$\begin{aligned}
&\sigma_{\text{I}33}(x_1,0)+\mathrm{i}m_j\sigma_{\text{I}13}(x_1,0)=t_j[\widetilde{K}_j^+(x_1)+\gamma_j\widetilde{K}_j^-(x_1)],\ j=1,2\\
&[\![u_1'(x_1,0)]\!]+\mathrm{i}s_j[\![u_3'(x_1,0)]\!]=\widetilde{K}_j^+(x_1)-\widetilde{K}_j^-(x_1)
\end{aligned}\tag{6-146}$$

由式(6-129)第一行的两个应力边界条件和式(6-146)中的第一式,可得

$$\widetilde{K}_j^+(x_1)+\gamma_j\widetilde{K}_j^-(x_1)=0,\ j=1,2,\ x_1\in(c,a)\tag{6-147}$$

由式(6-129)第二行的位移和应力边界条件和式(6-146),得

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{Im}[\![\widetilde{K}_j^+(x_1)-\widetilde{K}_j^-(x_1)]\!]=0,\\
&\mathrm{Im}[\![\widetilde{K}_j^+(x_1)+\gamma_j\widetilde{K}_j^-(x_1)]\!]=0,\ j=1,2,
\end{aligned}\right.\ x_1\in(a,b)\tag{6-148}$$

从而推出

$$\mathrm{Im}\,\widetilde{K}_j^+(x_1)=\mathrm{Im}\,\widetilde{K}_j^-(x_1)=0,\ j=1,2,\ x_1\in(a,b)\tag{6-149}$$

计及 $x_1\notin(c,b)$时,$\widetilde{K}_j^+(x_1)=\widetilde{K}_j^-(x_1)$,由式(6-146)中的第一式和无穷远处的边界条件,得

$$t_j(1+\gamma_j)\widetilde{K}_j^+(x_1)=\sigma_{\text{I}33}(x_1,0)+\mathrm{i}m_j\sigma_{\text{I}13}(x_1,0)=\sigma_{33}^\infty+\mathrm{i}m_j\tau^\infty,\ x_1\to\infty\tag{6-150}$$

由于$\widetilde{K}_j(z)$在无穷远处解析,所以有

$$\widetilde{K}_j(z)=\frac{\sigma_3^\infty}{\rho_j}+\frac{\mathrm{i}m_j\tau^\infty}{\rho_j},\ \rho_j=t_j(1+\gamma_j),\ j=1,2,\ z\to\infty\tag{6-151}$$

对于每个 j,方程(6-147)和(6-149)都代表一个分段解析函数$\widetilde{K}_j(z)$的组合的 Riemann 边值问题。由于 $\gamma_1=1/\gamma_2$, $\rho_2=-\rho_1$,所以 $j=2$ 时的解可由 $j=1$ 的解得到,同时界面上所需要的量都可从 $j=1$ 的解得到,因此下面只讨论 $j=1$ 的问题,为方便计,且略去下标 1。

6.5.4 方程(6－147)和(6－149)的求解

按 Loboda[85]的方法,设方程(6－147)和(6－149)的解为(略去下标 1)

$$\widetilde{K}(z)=X_1(z)(C_1z+C_2)+X_2(z)(D_1z+D_2)$$
$$X_1(z)=\frac{\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\varphi(z)}}{\sqrt{(z-c)(z-b)}},\ X_2(z)=\frac{e^{\mathrm{i}\varphi(z)}}{\sqrt{(z-c)(z-a)}} \tag{6-152}$$
$$\varphi(z)=2\varepsilon\ln\frac{\sqrt{(b-a)(z-c)}}{\sqrt{l(z-a)}+\sqrt{(a-c)(z-b)}},\ \varepsilon=\frac{1}{2\pi}\ln\gamma,\ l=b-c$$

在无穷远处 $X_1(z)$, $X_2(z)$具有下列性质

$$X_1(z)=\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\beta}\left(\frac{1}{z}+\frac{\mathrm{i}\beta_1}{z^2}+\frac{c+b}{2z^2}\right),\quad X_2(z)=e^{\mathrm{i}\beta}\left(\frac{1}{z}+\frac{\mathrm{i}\beta_1}{z^2}+\frac{c+a}{2z^2}\right),\ z\to\infty$$
$$\beta=\varepsilon\ln\frac{1-\sqrt{1-\lambda}}{1+\sqrt{1-\lambda}},\ \beta_1=\varepsilon\sqrt{(a-c)(b-c)},\ \lambda=\frac{b-a}{l} \tag{6-153}$$

利用无穷远处的边界条件式(6－151),可求得解式(6－152)中的系数

$$\begin{aligned}C_1&=(m_1\tau^{\infty}/\rho)\cos\beta-(\sigma_{33}^{\infty}/\rho)\sin\beta,\quad C_2=-(c+b)C_1/2-\beta_1D_1\\D_1&=(\sigma_{33}^{\infty}/\rho)\cos\beta+(m_1\tau^{\infty}/\rho)\sin\beta,\quad D_2=\beta_1C_1-(c+a)D_1/2\end{aligned} \tag{6-154}$$

式中 $\rho=\rho_1$。由式(6－146)、(6－152)和(6－154),可得

$$\sigma_{\mathrm{I}33}(x_1,0)+\mathrm{i}m\sigma_{\mathrm{I}13}(x_1,0)=\left[\frac{D_1x_1+D_2}{\sqrt{(x_1-a)}}+\mathrm{i}\frac{C_1x_1+C_2}{\sqrt{(x_1-b)}}\right]\frac{\rho\exp[\mathrm{i}\varphi(x_1)]}{\sqrt{x_1-c}},\ x_1>b$$
$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{I}33}(x_1,0)=&\frac{\rho(C_1x_1+C_2)}{\sqrt{(b-x_1)(x_1-c)}}\left[\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\cosh\varphi_0(x_1)+\sinh\varphi_0(x_1)\right]+\\&\frac{\rho(D_1x_1+D_2)}{\sqrt{(x_1-a)(x_1-c)}}\left[\cosh\varphi_0(x_1)+\frac{1-\gamma}{1+\gamma}\sinh\varphi_0(x_1)\right],\ x_1\in(a,b)\end{aligned}$$
$$\varphi_0(x_1)=2\varepsilon\arctan\sqrt{\frac{(b-x_1)(a-c)}{(x_1-a)(b-c)}} \tag{6-155a}$$

$$[\![u_1'(x_1,0)]\!]+\mathrm{i}s[\![u_3'(x_1,0)]\!]=2\sqrt{\alpha}\left[\frac{C_1x_1+C_2}{\sqrt{b-x_1}}-\mathrm{i}\frac{D_1x_1+D_2}{\sqrt{a-x_1}}\right]\frac{\exp[\mathrm{i}\varphi^*(x_1)]}{\sqrt{x_1-c}},\ x_1\in(c,a)$$
$$[\![u_1'(x_1,0)]\!]=\frac{2}{\sqrt{x_1-c}}\left[\frac{C_1x_1+C_2}{\sqrt{b-x_1}}\cosh\varphi_0(x_1)+\frac{D_1x_1+D_2}{\sqrt{x_1-a}}\sinh\varphi_0(x_1)\right],\ x_1\in(a,b)$$
$$\varphi^*(x_1)=2\varepsilon\ln\frac{\sqrt{(b-a)(x_1-c)}}{\sqrt{l(a-x_1)}+\sqrt{(a-c)(b-x_1)}},\quad\alpha=(\gamma+1)^2/(4\gamma) \tag{6-155b}$$

由式(6－139)的第三式和(6－143),可求得

$$D_{\mathrm{I}3}(x_1,0)=g_{33}^{-1}[g_{43}\sigma_{\mathrm{I}33}(x_1,0)-g_{43}\sigma_3^{\infty}+g_{33}D_3^{\infty}],\ x_1\notin(c,b) \tag{6-156a}$$

利用式$[\![u_1'(x_1,0)]\!]=W_1^+(x_1)-W_1^-(x_1)$，并从式(6-139)中消去$W_3^+(x_1)+W_3^-(x_1)$，可得

$$D_{I3}(x_1,0)=g_{33}^{-1}[g_{43}\sigma_{I33}(x_1,0)-g_{43}\sigma_{33}^{\infty}+g_{33}D_3^{\infty}-(g_{31}g_{43}-g_{41}g_{33})[\![u_1'(x_1,0)]\!]],\ x_1\notin(c,b) \tag{6-156b}$$

式(6-155)和(6-156)给出了界面上所有的需求的物理量。

6.5.5 接触区域长度和应力强度因子

根据上面得到的解，很容易讨论应力强度因子和接触区域长度。

$$\begin{aligned}
K_{\mathrm{I}}&=\lim_{x\to a+0}\sqrt{2\pi(x_1-a)}\sigma_{33}(x_1,0)=\\
&\sqrt{\frac{\pi l}{2a}}[\sqrt{1-\lambda}(\sigma_{33}^{\infty}\cos\beta+m\tau^{\infty}\sin\beta)-2\varepsilon(\sigma_{33}^{\infty}\sin\beta-m\tau^{\infty}\cos\beta)]\\
K_{\mathrm{II}}&=\lim_{x\to b+0}\sqrt{2\pi(x_1-b)}\sigma_{13}(x_1,0)=\\
&-\frac{1}{m}\sqrt{\frac{\pi l}{2}}[(\sigma_{33}^{\infty}\sin\beta-m\tau^{\infty}\cos\beta)+2\varepsilon\sqrt{1-\lambda}(\sigma_{33}^{\infty}\cos\beta+m\tau^{\infty}\sin\beta)]\\
K_{\mathrm{D}}&=\lim_{x\to a+0}\sqrt{2\pi(x_1-a)}D_3(x_1,0)=g_{33}^{-1}\left[g_{43}-(g_{31}g_{43}-g_{41}g_{33})\frac{\gamma^2-1}{2\lambda\rho}\right]K_{\mathrm{I}}\\
u_1'(x_1,0)_{x_1\to a+0}&=(1/\sqrt{2\pi(x_1-a)})[(\gamma^2-1)/2\gamma\rho]K_{\mathrm{I}}
\end{aligned} \tag{6-157}$$

a 和 b 点的能量释放率分别为

$$\begin{aligned}
G_{1a}&=\lim_{\Delta l\to 0}\left[\frac{1}{2\Delta l}\int_a^{a+\Delta l}\sigma_{I33}(x_1,0)[\![u_3'(x_1-\Delta l,0)]\!]\mathrm{d}x_1\right]=\frac{a}{2\rho s}K_{\mathrm{I}}^2\\
G_{2b}&=\lim_{\Delta l\to 0}\left[\frac{1}{2\Delta l}\int_b^{b+\Delta l}\sigma_{I31}(x_1,0)[\![u_1'(x_1-\Delta l,0)]\!]\mathrm{d}x_1\right]=-\frac{m}{2\rho}K_{\mathrm{II}}^2
\end{aligned} \tag{6-158}$$

接触点 a 的位置(或参数 λ)由 $K_{\mathrm{I}}=0$ 确定，确定参数 λ 的方程为

$$\tan\beta=(\sqrt{1-\lambda}\sigma_{33}^{\infty}+2\varepsilon m\tau^{\infty})/(2\varepsilon\sigma_{33}^{\infty}-\sqrt{1-\lambda}m\tau^{\infty}) \tag{6-159a}$$

然后选取由上式得到的使下式成立的最大的 λ_0

$$\sigma_{I33}(x_1,0)\leqslant 0,\ x_1\in(a,b);\quad [\![u_3(x_1,0)]\!]\geqslant 0,\ x_1\in(c,a) \tag{6-159b}$$

数值计算表明，对双材料$(S^+)/(S^-)$CTS－19/PZT－4 和镉的硫化物/钡钠铌酸盐，当 $\tau^{\infty}/\sigma_{33}^{\infty}\to\infty$时，$\lambda_0$ 约在 0.3 左右；当 $\tau^{\infty}/\sigma_{33}^{\infty}\to 0,1$ 时，λ_0 分别约为 $1/e^{100}$，$1/e^{50}$左右。

6.5.6 无接触区域的双材料界面开路裂纹

通常的无接触区域的双材料界面裂纹可由本节上面的公式令 $a=b(\lambda=0)$ 和适当的极限过渡得到。注意到

$$\beta-\varphi(x_1)=\varepsilon\ln\frac{x_1-b}{x_1-c},\quad \beta-\varphi^*(x_1)=\varepsilon\ln\frac{b-x_1}{x_1-c} \tag{6-160}$$

由式(6-155a)中的第一式和(6-155b)中的第一式，分别得

$$\sigma_{\text{Ⅱ}3}(x_1, 0) + \mathrm{i}m\sigma_{\text{Ⅱ}3}(x_1, 0) = \frac{1+\mathrm{i}\varepsilon}{2}\sqrt{\frac{l}{x_1-b}}(\sigma_{33}^{\infty} - \mathrm{i}m\tau^{\infty})\left(\frac{x_1-b}{l}\right)^{\mathrm{i}\varepsilon}, \ x_1 \to b+0$$

$$[\![u_1'(x_1, 0)]\!] + \mathrm{i}s[\![u_3'(x_1, 0)]\!] = -\frac{(1-2\mathrm{i}\varepsilon)\sqrt{\alpha l}}{\rho\sqrt{b-x_1}}(\mathrm{i}\sigma_{33}^{\infty} - m\tau^{\infty})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon\ln\frac{b-x_1}{l}}, \ x_1 \to b-0$$

对应力强度因子,则有

$$K_{\text{Ⅰ}} - \mathrm{i}mK_{\text{Ⅱ}} = \lim_{x\to a+0}\sqrt{2\pi(x_1-a)}(x_1-b)^{-\mathrm{i}\varepsilon}[\sigma_{33}(x_1, 0) - \mathrm{i}m\sigma_{13}(x_1, 0)] = \sqrt{\frac{\pi l}{2}}(1+2\mathrm{i}\varepsilon)(\sigma_3^{\infty} - \mathrm{i}m\tau^{\infty})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon\ln l}$$

$$[\![u_1'(x_1, 0)]\!] + \mathrm{i}s[\![u_3'(x_1, 0)]\!] = \frac{2\mathrm{i}}{\rho(1-2\mathrm{i}\varepsilon)}\sqrt{\frac{2\alpha(b-x_1)}{\pi}}(K_{\text{Ⅰ}} + \mathrm{i}mK_{\text{Ⅱ}})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon\ln(b-x_1)} \tag{6-161}$$

6.5.7 绝缘裂纹的接触区域模型

对于绝缘裂纹,Herrmann 和 Loboda[86]也作了讨论。一般讨论中的公式(6-127)～(6-138)仍然成立。绝缘裂纹和开路裂纹的差别在于在裂纹面上的条件,此时需把式(6-129)中在 $x_1 \in (c, a)$ 的边界条件 $\sigma_{13}^{\pm} = 0$, $\sigma_{33}^{\pm} = 0$, $[\![\varphi]\!] = 0$, $[\![D_3]\!] = 0$ 改为 $\boldsymbol{\Sigma}_3 = \mathbf{0}$,从而在裂纹面上有

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\Sigma}_3 = \mathbf{0}, \ x_1 \in (c, a) \\ &[\![u_3]\!] = 0, \quad [\![\varphi]\!] = 0, \quad \sigma_{13}^{+} = 0, \quad [\![\sigma_{33}]\!] = 0, \quad [\![D_3]\!] = 0, \ x_1 \in (a, b) \end{aligned} \tag{6-162}$$

对式(6-134)进行变换,把式(6-134)的第二式左乘一单行的矩阵 $\boldsymbol{S} = [s_1, s_3, s_4]$,得

$$\boldsymbol{SGW}^+(x_1) - \boldsymbol{S}\overline{\boldsymbol{G}}\boldsymbol{W}^-(x_1) = \boldsymbol{S\Sigma}_0(x_1), \ x_1 \in L_c \tag{6-163}$$

进一步寻求方程 $\boldsymbol{S}\overline{\boldsymbol{G}} = -\gamma\boldsymbol{SG}$ 存在时的 γ,这等价于寻找使下列方程成立的 γ:

$$(-\gamma\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} + \overline{\boldsymbol{G}}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}} = \mathbf{0}, \quad |-\gamma\boldsymbol{G}^{\mathrm{T}} + \overline{\boldsymbol{G}}^{\mathrm{T}}| = 0 \tag{6-164}$$

即 γ 为上述方程的本征值,$\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}$ 为上述方程的右本征矢量。具有 $6mm$ 对称性的压电陶瓷,式中的 $\boldsymbol{G}$ 由式(6-135)表示。把式(6-135)代入上式,得三个本征值和三个本征矢量

$$\gamma_1 = \frac{1+\delta}{1-\delta}, \quad \gamma_3 = \frac{1-\delta}{1+\delta} = \frac{1}{\gamma_1}, \quad \gamma_4 = 1, \quad \delta^2 = \frac{g_{14}^2 g_{33} + g_{13}^2 g_{44} - 2g_{13}g_{14}g_{34}}{g_{11}(g_{33}g_{44} - g_{34}^2)} \tag{6-165}$$

本节讨论 $\delta^2 > 0$ 的一类材料。三个本征矢量组成一本征矩阵 $\hat{\boldsymbol{S}} = [\boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_3, \boldsymbol{S}_4]^{\mathrm{T}}$,从而式(6-163)可以写成

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{K}^+(x_1) + \gamma\boldsymbol{K}^-(x_1) = \hat{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{\Sigma}_0(x_1), \ x_1 \in L_c \\ &\boldsymbol{K}(z) = \boldsymbol{NW}(z), \quad \hat{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{G} = \boldsymbol{N}, \quad \hat{\boldsymbol{S}}\overline{\boldsymbol{G}} = -\gamma\boldsymbol{N} \end{aligned} \tag{6-166}$$

由于本征矢量中有一个是任意的,令 $S_{j3} = 1$,上式的分量形式是

$$\sigma_{33}(x_1, 0) + \mathrm{i}m_{j1}\sigma_{13}(x_1, 0) + m_{j4}D_3(x_1, 0) = K_j^+(x_1) + \gamma_j K_j^-(x_1), \ j = 1, 3, 4$$
$$K_j(z) = n_{j1}W_1(z) + \mathrm{i}n_{j3}W_3(z) + \mathrm{i}n_{j4}W_4(z) \tag{6-167}$$
$$m_{j4} = S_{j4}, \ m_{j1} = -\mathrm{i}S_{j1}, \ n_{j1} = N_{j1}, \ n_{j3} = -\mathrm{i}N_{j3}, \ n_{j4} = -\mathrm{i}N_{j4}$$

上式中的 m_{ij}，$n_{ij}(i, j = 1, 3, 4)$ 全为实数。显然，$K_j(z)$和 $W_j(z)$具有相同的解析性质。当 $|x_1| > c$ 时，$K_j^+(x_1) = K_j^-(x_1)$，结合无穷远的边界条件，由式(6-167)可得

$$K_j(z)_{z\to\infty} = (\sigma_3^\infty + m_{j4}D_3^\infty + \mathrm{i}m_{j1}\tau^\infty)/(1+\gamma_1) \tag{6-168}$$

在裂纹面上，由边界条件式(6-162)中的第二式和式(6-167)，可得

$$K_j^+(x_1) + \gamma_1 K_j^-(x_1) = 0, \ x_1 \in (c, a), \ j = 1, 3, 4 \tag{6-169}$$

由边界条件式(6-162)中第三式的和式(6-167)可得

$$\begin{aligned} &\mathrm{Im}[K_j^-(x_1) + \gamma_1 K_j^-(x_1)] = 0, \quad \mathrm{Im}[K_j^+(x_1) - K_j(x_1)] = 0, \ j = 1, 3 \\ &K_4^+(x_1) - K_4^-(x_1) = 0, \ x_1 \in (a, b) \end{aligned} \tag{6-170}$$

式(6-169)和(6-170)，还可写成

$$\begin{aligned} &K_j^+(x_1) + \gamma_1 K_j^-(x_1) = 0, \ x_1 \in (c, a), \ j = 1, 3 \\ &\mathrm{Im}\, K_j^\pm(x_1) = 0, \ x_1 \in (a, b), \ j = 1, 3 \\ &K_4^+(x_1) + K_4^-(x_1) = 0, \ x_1 \in (c, a) \end{aligned} \tag{6-171}$$

而 $K_4(z)$除 $x_1 \in (c, a)$外处处解析，在 $x_1 \in (c, a)$是间断的，这和开路裂纹不同。对具有 $6mm$ 对称性的材料，仔细分析表明，$m_{41} = 0$，$m_{14} = m_{34}$，$m_{11} = -m_{31}$，$n_{41} = 0$，$\gamma_3 = 1/\gamma_1$。利用这些关系，在式(6-167)中，$j = 3$ 时的解可由 $j = 1$ 时的解推出，因而不需研究。只需讨论 $j = 1, 4$ 的情形。对于 $j = 1$ 的情形，式(6-171)中的 $K_1(z)$和式(6-147)，(6-149)中的$\widetilde{K}_1(z)$满足相同的方程，因而其解也相同；此时式(6-154)中的待定系数改为

$$\begin{aligned} &C_1 = \frac{m_j\tau^\infty}{\rho_j}\cos\beta - \frac{\sigma_3^\infty + m_{j4}D_3^\infty}{\rho_j}\sin\beta, \quad C_2 = -\frac{c+b}{2}C_1 - \beta_1 D_1 \\ &D_1 = \frac{\sigma_3^\infty + m_{j4}D_3^\infty}{\rho_j}\cos\beta + \frac{m_j\tau^\infty}{\rho_j}\sin\beta, \quad D_2 = \beta_1 C_1 - \frac{c+a}{2}D_1 \end{aligned} \tag{6-172}$$

对于 $j = 4$ 的情形，式(6-171)中的第三个和无穷远处的边界条件，可得

$$K_4(z) = \frac{\sigma_3^\infty + m_{44}D_3^\infty}{2}\left(z - \frac{c+a}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{(x_1 - c)(x_1 - a)}} \tag{6-173}$$

其余的讨论可仿开路裂纹进行。

6.6 圆形夹杂界面裂纹的Ⅲ型问题

6.6.1 压电体面外剪切问题的基本方程

对于沿 x_3 轴极化的横观各向同性材料，(x_1, x_2)平面是各向同性的。设施加面外机械载

荷和面内电载荷，那么便构成压电体的面外剪切问题，平衡方程由式(4-172)表示，本构方程由式(4-173)表示。对于静电问题有 $E_1=-\varphi_{,1}$，$E_2=-\varphi_{,2}$。从而用广义位移表示的静态问题的平衡方程为

$$C_{44}\nabla^2 u_3+e_{15}\nabla^2\varphi=0,\quad e_{15}\nabla^2 u_3-\epsilon_{11}\nabla^2\varphi=0 \tag{6-174}$$

或改写为

$$\nabla^2 u_3=0,\quad \nabla^2\varphi=0 \tag{6-175}$$

式中∇^2 是二维拉普拉斯算子。由上式知，u_3 和 φ 可以分别表示为 z 的解析函数 $2\phi_1(z)$和 $2\phi_2(z)$的实部(或虚部)，即

$$u_3(x_1,x_2)=[\phi_1(z)+\overline{\phi_1(z)}],\quad \varphi=[\phi_2(z)+\overline{\phi_2(z)}] \tag{6-176}$$

计及 $z=x_1+\mathrm{i}x_2=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，$z_{,\theta}=\mathrm{i}z$，则有

$$u_{3,\theta}=u_{3,z}z_{,\theta}+u_{3,\bar z}\bar z_{,\theta}=\mathrm{i}[z\phi_1'(z)-\overline{z\phi_1'(z)}],\quad \phi_{,\theta}=\mathrm{i}[z\phi_2'(z)-\overline{z\phi_2'(z)}] \tag{6-177}$$

式中 $\phi_i'(z)=\mathrm{d}\phi_i(z)/\mathrm{d}z$。应力和电位移可以表示为

$$\begin{aligned}
&\sigma_{31}-\mathrm{i}\sigma_{32}=2[G\phi_1'(z)+e_{15}\phi_2'(z)],\quad D_1-\mathrm{i}D_2=2[e_{15}\phi_1'(z)-\epsilon_{11}\phi_2'(z)]\\
&\sigma_{3r}-\mathrm{i}\sigma_{3\theta}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}[G\phi_1'(z)+e_{15}\phi_2'(z)],\quad D_r-\mathrm{i}D_\theta=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}[e_{15}\phi_1'(z)-\epsilon_{11}\phi_2'(z)]\\
&E_1-\mathrm{i}E_2=-2\phi_2'(z),\quad E_r-\mathrm{i}E_\theta=-2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\phi_2'(z)
\end{aligned} \tag{6-178}$$

令

$$\boldsymbol{f}(z)=\begin{Bmatrix}\phi_1(z)\\ \phi_2(z)\end{Bmatrix},\quad \boldsymbol{F}(z)=\begin{Bmatrix}\phi_1'(z)\\ \phi_2'(z)\end{Bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}G & e_{15}\\ e_{15} & -\epsilon_{11}\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\Sigma}_r=\begin{Bmatrix}\sigma_{3r}\\ D_r\end{Bmatrix},\quad \boldsymbol{U}_{,\theta}=\begin{Bmatrix}u_{3,\theta}/r\\ -E_\theta\end{Bmatrix} \tag{6-179}$$

式中 $\phi_j'(z)=\mathrm{d}\phi_j/\mathrm{d}z$。因$\boldsymbol{B}$ 的元素都是实数，故有$\boldsymbol{B}=\overline{\boldsymbol{B}}$(本节的符号自成系统，不要和其余各节的混淆)。采用上述符号后，有

$$\boldsymbol{\Sigma}_r=[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}(z)+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\overline{\boldsymbol{B}}\,\overline{\boldsymbol{F}(z)}],\quad \boldsymbol{U}_{,\theta}=\mathrm{i}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\boldsymbol{F}(z)-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\overline{\boldsymbol{F}(z)}] \tag{6-180}$$

在界面 L 上化为

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Sigma}_r=\frac{z}{a}\left[\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}(z)+\frac{a^2}{z^2}\overline{\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}(z)}\right]\\
&\boldsymbol{U}_{,\theta}=\mathrm{i}\,\frac{z}{a}\left[\boldsymbol{F}(z)-\frac{a^2}{z^2}\overline{\boldsymbol{F}(z)}\right],\ z\in L
\end{aligned} \tag{6-181}$$

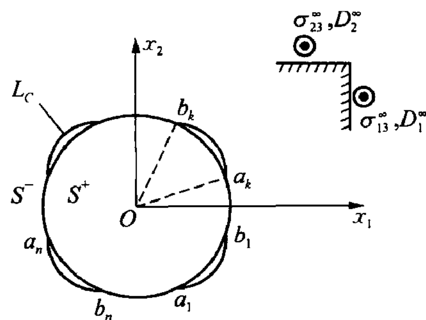


图 6-5　圆形夹杂多个界面裂纹

6.6.2　开路裂纹模型

图 6-5 示一无限基体Ⅱ，占据区域 S^-，其中有一半径为 a 的圆形夹杂Ⅰ，占据区域 S^+，两者均为横观各向

同性材料；整个界面记为 L，界面上有 n 个圆弧形裂纹，每个裂纹的端点按反时针方向记为 a_k，b_k 其总和记为 L_c，坐标原点取在夹杂中心，直角坐标为(x_1, x_2)，极坐标为(r, θ)；无穷远处作用有面外（Ⅲ型）机械应力和面内电位移$(\sigma_{31}^{\infty}, \sigma_{32}^{\infty}, D_1^{\infty}, D_2^{\infty})$，裂纹面上无载荷。在结合面 $L-L_c$ 上的连接条件是

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{I}r3} &= \sigma_{\mathrm{II}r3}, \quad D_{\mathrm{I}r} = D_{\mathrm{II}r}, \ z \notin L_c \\ u_{\mathrm{I}3} &= u_{\mathrm{II}3}(u_{\mathrm{I}3,\theta} = u_{\mathrm{II}3,\theta}), \quad \varphi_{\mathrm{I}} = \varphi_{\mathrm{II}}(E_{\mathrm{I}\theta} = E_{\mathrm{II}\theta})\end{aligned} \tag{6-182}$$

在裂纹面上

$$\sigma_{\mathrm{I}r3} = \sigma_{\mathrm{II}r3} = 0, \quad D_{\mathrm{I}r} = D_{\mathrm{II}r}, \quad \varphi_{\mathrm{I}} = \varphi_{\mathrm{II}}(E_{\mathrm{I}\theta} = E_{\mathrm{II}\theta}), \ z \in L_c \tag{6-183}$$

在无穷远处

$$\sigma_{31} = \sigma_{31}^{\infty}, \quad \sigma_{32} = \sigma_{32}^{\infty}, \quad D_2 = D_2^{\infty}, \quad D_1 = D_1^{\infty} \tag{6-184}$$

为方便计，把半径为 a 的圆变换到单位圆，即令

$$z = \omega(\varsigma) = a\varsigma, \ \varsigma = \xi + \mathrm{i}\eta = R\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}; \quad r = aR \tag{6-185}$$

则 L 变为ς平面上的 Γ，L_c 变为 Γ_c。基体位于 $|\varsigma| > 1$ 的 S^- 区域，夹杂位于 $|\varsigma| < 1$ 的 S^+ 区域，在ς平面上，裂纹的端点相应地为 $\sigma_k^{(1)}$，$\sigma_k^{(2)}$，且有

$$\boldsymbol{f}(z) = \boldsymbol{f}[\omega(\varsigma)] = \boldsymbol{f}(\varsigma), \quad \boldsymbol{F}(z) = \boldsymbol{f}'(z) = \frac{\boldsymbol{f}'(\varsigma)}{\omega'(\varsigma)} = \frac{1}{a}\boldsymbol{f}'(\varsigma) = \frac{1}{a}\boldsymbol{F}(\varsigma) \tag{6-186}$$

从而对任一种材料，式(6-180)在ς平面上化为

$$\boldsymbol{\Sigma}_r = \frac{1}{a}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}(\varsigma) + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\,\overline{\boldsymbol{B}}\,\overline{\boldsymbol{F}(\varsigma)}], \quad \boldsymbol{U}_{,\theta} = \frac{\mathrm{i}}{a}[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\boldsymbol{F}(\varsigma) - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}\,\overline{\boldsymbol{F}(\varsigma)}] \tag{6-187}$$

在界面 Γ 上，$\sigma = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 是单位圆周 Γ 上的点。按式(6-181)，对任一种材料均有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma}_r &= \frac{1}{a}[\sigma\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}(\sigma) + \bar{\sigma}\overline{\boldsymbol{B}}\,\overline{\boldsymbol{F}(\sigma)}] = \frac{2}{a}\mathrm{Re}[\sigma\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}(\sigma)] = \frac{\sigma}{a}[\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}(\sigma) + \bar{\sigma}^2\,\overline{\boldsymbol{B}}\,\overline{\boldsymbol{F}(\sigma)}] \\ \boldsymbol{U}_{,\theta} &= \frac{\mathrm{i}}{a}[\sigma\boldsymbol{F}(\sigma) - \bar{\sigma}\,\overline{\boldsymbol{F}(\sigma)}] = -\frac{2}{a}\mathrm{Im}[\sigma\boldsymbol{F}(\sigma)] \\ E_r - \mathrm{i}E_\theta &= -\frac{2}{a}\sigma\phi_2'(\sigma), \ E_r = -\frac{2}{a}\mathrm{Re}[\sigma\phi_2'(\sigma)], \ \sigma \in \Gamma\end{aligned} \tag{6-188}$$

6.6.3 化为 Riemann-Hilbert 问题

1) 广义应力的连续性条件

由于在裂纹面上，广义应力是连续的，所以在整个界面上是连续的，因此按式(6-188)，有

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{I}r} = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{II}r}, \quad \sigma\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(\sigma) + \bar{\sigma}\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\,\overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(\sigma)} = \sigma\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(\sigma) + \bar{\sigma}\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\,\overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(\sigma)}, \ \varsigma \in \Gamma$$

或

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(\sigma) + \bar{\sigma}^2\,\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\,\overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(\sigma)} = \boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(\sigma) + \bar{\sigma}^2\,\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\,\overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(\sigma)}, \ \varsigma \in \Gamma \tag{6-189}$$

类似于双半无限体的式(6-5)，对于单位半径的圆形域，设 $g(\varsigma)$是 $S^+(S^-)$的解析函数，那么 $g_*(\varsigma) = \bar{g}(1/\varsigma)$ 便是 $S^-(S^+)$的解析函数，且有

$$g_{*}^{-}(\sigma)=\overline{g^{+}(\sigma)},\quad g_{*}^{+}(\sigma)=\overline{g^{-}(\sigma)},\quad g_{*}(\varsigma)=\overline{g}(1/\varsigma) \tag{6-190}$$

类似于式(6-6),改写式(6-189)为

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}^{+}(\sigma)-\overline{\sigma}^{2}\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}*}^{+}(\sigma)=\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}^{-}(\sigma)-\overline{\sigma}^{2}\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}*}^{-},\ \sigma\in\Gamma \tag{6-191}$$

现在来研究 $\boldsymbol{F}_{\alpha}(\varsigma)(\alpha=\mathrm{I},\mathrm{II})$ 的性质。首先,$\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(\varsigma)$在 S^{+} 应当是解析的,改记为 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}0}(\varsigma)$。$\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(\varsigma)$在 S^{-} 应当是解析的,但在无穷远处可以不为零,即

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(\varsigma)=\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}^{\infty}+\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}0}(\varsigma),\ \boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}^{\infty}=\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(\infty),\ \varsigma\in S^{-} \tag{6-192}$$

式中 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}0}(\varsigma)$是在无穷远处为零的 S^{-} 中的解析函数,由于在有限区域没有集中力和点电荷,所以它不含 $1/z$ 的项。由式(6-178)、(6-179)和(6-184),可求得

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(\infty)=\frac{a}{2}\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}^{-1}\begin{Bmatrix}\sigma_{31}^{\infty}-\mathrm{i}\sigma_{32}^{\infty}\\ D_{1}^{\infty}-\mathrm{i}D_{2}^{\infty}\end{Bmatrix} \tag{6-193}$$

式(6-191)中的$\overline{\sigma}^{2}\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}*}^{+}(\sigma)$是 S^{+} 中定义的函数 $(1/\varsigma^{2})\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}*}(\varsigma)=(1/\varsigma^{2})\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{II}}(1/\varsigma)$ 的边值,$\varsigma=0$ 点是其极点;$\overline{\sigma}^{2}\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}*}^{-}(\sigma)$ 是 S^{-} 中定义的解析函数 $(1/\varsigma^{2})\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}*}(\varsigma)=(1/\varsigma^{2})\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{I}}(1/\varsigma)$ 的边值。因此,式(6-191)等式的左边是在 S^{+}定义的某个除极点 $\varsigma=0$ 外处处解析的函数的边值,等式的右边是在 S^{-} 定义的在无穷远处不为零的解析函数的边值;它们在 Γ 上相等,因而互为解析延拓,解析延拓后的函数和原函数具有相同的极点和在无穷远处的值。令

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{G}_{\mathrm{II}}(\varsigma)=\frac{1}{\varsigma^{2}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}*}(\varsigma)=\frac{1}{\varsigma^{2}}\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{II}}^{\infty}+\boldsymbol{G}_{\mathrm{II}0}(\varsigma),\quad \boldsymbol{G}_{\mathrm{II}0}(\varsigma)=\frac{1}{\varsigma^{2}}\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{II}0}\left(\frac{1}{\varsigma}\right),\ \varsigma\in S^{+}\\ &\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}0}(\varsigma)=\frac{1}{\varsigma^{2}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}*}(\varsigma)=\frac{1}{\varsigma^{2}}\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{I}0}\left(\frac{1}{\varsigma}\right),\ \varsigma\in S^{-}\end{aligned} \tag{6-194}$$

因此可设

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(\varsigma)-\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{G}_{\mathrm{II}}(\varsigma)=\boldsymbol{g}(\varsigma),\ \varsigma\in S^{+}\\ &\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(\varsigma)-\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}0}(\varsigma)=\boldsymbol{g}(\varsigma),\ \varsigma\in S^{-}\end{aligned} \tag{6-195}$$

根据上面的讨论,可设

$$\boldsymbol{g}(\varsigma)=-\frac{1}{\varsigma^{2}}\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{II}}^{\infty}+\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}^{\infty} \tag{6-196}$$

把式(6-192)、(6-194)和(6-196)代入式(6-195),便得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}0}(\varsigma)-\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{G}_{\mathrm{II}0}(\varsigma)-\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}^{\infty}=0,\ \varsigma\in S^{+}\\ &\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}0}(\varsigma)-\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}0}(\varsigma)+(1/\varsigma^{2})\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{II}}^{\infty}=0,\ \varsigma\in S^{-}\end{aligned} \tag{6-197a}$$

注意到 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}=\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}$,$\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}=\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}$,上式又可写成

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{G}_{\mathrm{II}0}(\varsigma)=-\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}^{\infty}+\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}0}(\varsigma),\ \varsigma\in S^{+}\\ &\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}0}(\varsigma)=(1/\varsigma^{2})\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{II}}^{\infty}+\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}0}(\varsigma),\ \varsigma\in S^{-}\end{aligned} \tag{6-197b}$$

上式在界面上化为

$$G_{\mathrm{II}0}(\sigma)=-F_{\mathrm{II}}^{\infty}+B_{\mathrm{II}}^{-1}B_{\mathrm{I}}F_{\mathrm{I}0}(\sigma)$$
$$G_{\mathrm{I}0}(\sigma)=\bar{\sigma}^{2}B_{\mathrm{I}}^{-1}B_{\mathrm{II}}\overline{F}_{\mathrm{II}}^{\infty}+B_{\mathrm{I}}^{-1}B_{\mathrm{II}}F_{\mathrm{II}0}(\sigma) \tag{6-197c}$$

2) 界面上 d' 的间断性

按式(6-188),在界面上广义位移沿 θ 方向导数的间断值为

$$d'=(U_{\mathrm{I},\theta}-U_{\mathrm{II},\theta})=\mathrm{i}\frac{\sigma}{a}\{[F_{\mathrm{I}}(\sigma)-\bar{\sigma}^{2}\overline{F_{\mathrm{I}}(\sigma)}]-[F_{\mathrm{II}}(\sigma)-\bar{\sigma}^{2}\overline{F_{\mathrm{II}}(\sigma)}]\}$$

或

$$\frac{a}{\sigma}d'=\mathrm{i}[F_{\mathrm{I}}(\sigma)+\bar{\sigma}^{2}F_{\mathrm{II}*}^{+}(\sigma)]-[F_{\mathrm{II}}(\sigma)+\bar{\sigma}^{2}F_{\mathrm{I}*}^{-}(\sigma)] \tag{6-198}$$

利用式(6-197),上式可改写成

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sigma}d'=&\mathrm{i}\{[F_{\mathrm{I}0}^{+}(\sigma)+\bar{\sigma}^{2}\overline{F}_{\mathrm{II}}^{\infty}+G_{\mathrm{II}0}^{+}(\sigma)]-[F_{\mathrm{II}0}^{-}(\sigma)+F_{\mathrm{II}}^{\infty}+\bar{\sigma}^{2}\overline{F}_{\mathrm{I}0}^{-}(\sigma)]\}=\\&\mathrm{i}[F_{\mathrm{I}0}^{+}(\sigma)-2F_{\mathrm{II}}^{\infty}+B_{\mathrm{II}}^{-1}B_{\mathrm{I}}F_{\mathrm{I}0}^{+}(\sigma)]-\mathrm{i}[F_{\mathrm{II}0}^{-}(\sigma)-\\&\bar{\sigma}^{2}(I-B_{\mathrm{I}}^{-1}B_{\mathrm{II}})\overline{F}_{\mathrm{II}}^{\infty}+B_{\mathrm{I}}^{-1}B_{\mathrm{II}}F_{\mathrm{II}0}^{-}(\sigma)]\end{aligned} \tag{6-199}$$

上式在裂纹面外等于零,故根据上式可定义一个除裂纹面外的全平面的解析函数 $\boldsymbol{h}(\varsigma)$

$$\boldsymbol{h}(\varsigma)=\begin{cases}F_{\mathrm{I}0}(\varsigma)+B_{\mathrm{II}}^{-1}B_{\mathrm{I}}F_{\mathrm{I}0}(\varsigma)-2F_{\mathrm{II}}(\infty),\ \varsigma\in S^{+}\\F_{\mathrm{II}0}(\varsigma)+B_{\mathrm{I}}^{-1}B_{\mathrm{II}}F_{\mathrm{II}0}(\varsigma)-\dfrac{1}{\varsigma^{2}}(I-B_{\mathrm{I}}^{-1}B_{\mathrm{II}})\overline{F}_{\mathrm{II}}(\infty),\ \varsigma\in S^{-}\end{cases} \tag{6-200}$$

位移对 θ 的导数是除裂纹面外的连续函数。由式(6-199)和(6-200)知

$$-\mathrm{i}\frac{a}{\sigma}d'=\boldsymbol{h}^{+}(\sigma)-\boldsymbol{h}^{-}(\sigma) \tag{6-201}$$

由式(6-183)知 $E_{\mathrm{I}\theta}=E_{\mathrm{II}\theta}$,所以在裂纹面上 $d'_2=0$,在整个界面上 $d'_2=0$,或

$$h_2^{+}(\sigma)-h_2^{-}(\sigma)=0,\ \sigma\in L \tag{6-202}$$

所以 $h_2(\varsigma)$是全平面上的解析函数,且在无穷远处为零,由此推出

$$h_2(\varsigma)=0 \tag{6-203}$$

3) 化为 Riemann-Hilbert 问题

按式(6-188)和(6-197a),在裂纹面上有

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sigma}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{I}r}=&B_{\mathrm{I}}F_{\mathrm{I}}(\sigma)+\bar{\sigma}^{2}\overline{B}_{\mathrm{I}}\overline{F_{\mathrm{I}}(\sigma)}=B_{\mathrm{I}}F_{\mathrm{I}}^{+}(\sigma)+\bar{\sigma}^{2}\overline{B}_{\mathrm{I}}F_{\mathrm{I}*}^{-}(\sigma)=\\&B_{\mathrm{I}}F_{\mathrm{I}}^{+}(\sigma)+\bar{\sigma}^{2}B_{\mathrm{II}}\overline{F}_{\mathrm{II}}^{\infty}+B_{\mathrm{II}}F_{\mathrm{II}0}^{-}(\sigma),\ \varsigma\in L_c\end{aligned} \tag{6-204}$$

由式(6-200)推出

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}^{+}(\sigma)+\boldsymbol{h}^{-}(\sigma)=&F_{\mathrm{I}0}^{+}(\sigma)+B_{\mathrm{II}}^{-1}B_{\mathrm{I}}F_{\mathrm{I}0}^{+}(\sigma)-2F_{\mathrm{II}}(\infty)+F_{\mathrm{II}0}^{-}(\sigma)+\\&B_{\mathrm{I}}^{-1}B_{\mathrm{II}}F_{\mathrm{II}0}^{-}(\sigma)-\bar{\sigma}^{2}(I-B_{\mathrm{I}}^{-1}B_{\mathrm{II}})\overline{F}_{\mathrm{II}}(\infty)\end{aligned}$$

上式可以改写为

$$\boldsymbol{h}^{+}(\sigma)+\boldsymbol{h}^{-}(\sigma)=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}})\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}0}^{+}(\sigma)-2\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}^{\infty}+(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}})\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}0}^{-}(\sigma)-\overline{\sigma}^{2}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}})\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{II}}^{\infty}=$$
$$\boldsymbol{H}[\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}0}^{+}(\sigma)+\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}0}^{-}(\sigma)+\overline{\sigma}^{2}\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{II}}^{\infty}]-2\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}^{\infty}-2\overline{\sigma}^{2}\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{II}}^{\infty} \tag{6-205}$$

式中 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}^{-1}+\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}^{-1}$。对比式(6－204)和(6－205),可知

$$\frac{a}{\sigma}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{I}r}=\boldsymbol{H}^{-1}[\boldsymbol{h}^{+}(\sigma)+\boldsymbol{h}^{-}(\sigma)]+\boldsymbol{k}^{\infty}+\overline{\boldsymbol{k}}^{\infty}\overline{\sigma}^{2},\ \boldsymbol{k}^{\infty}=2\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}^{\infty} \tag{6-206}$$

上式便是我们要寻求的裂纹面上的 Riemann - Hilbert 问题。一旦找出 $\boldsymbol{h}(\varsigma)$,由式(6－200)便可求出 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}0}(\varsigma)$, $\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}0}(\varsigma)$,即

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}0}(\varsigma)&=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}})^{-1}[\boldsymbol{h}(\varsigma)+2\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(\infty)]\\ \boldsymbol{F}_{\mathrm{II}0}(\varsigma)&=(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}})^{-1}\left[\boldsymbol{h}(\varsigma)+\frac{1}{\varsigma^{2}}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}})\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{II}}(\infty)\right]\end{aligned} \tag{6-207}$$

求出 $\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}0}(\varsigma)$, $\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}0}(\varsigma)$后,便可由式(6－187)求出 $\boldsymbol{\Sigma}_{r}$, $\boldsymbol{U}_{,\theta}$,问题便完全解决。

6.6.4 问题的解

利用裂纹面上的边界条件(6－183)和(6－203)的 $h_2(\varsigma)=0$,由式(6－206)可推出

$$\frac{a}{\sigma}\sigma_{\mathrm{I}r}=H_{11}^{-1}[h_1^{+}(\sigma)+h_1^{-}(\sigma)]+k_1^{\infty}+\overline{k}_1^{\infty}\overline{\sigma}^{2}=0$$

$$\frac{a}{\sigma}D_{\mathrm{I}r}=H_{21}^{-1}[h_1^{+}(\sigma)+h_1^{-}(\sigma)]+k_2^{\infty}+\overline{k}_2^{\infty}\overline{\sigma}^{2}$$

由上式知,无需解出 $\boldsymbol{h}^{+}(\sigma)+\boldsymbol{h}^{-}(\sigma)$,便可求出裂纹面上电位移值,这使问题得到简化

$$\frac{a}{\sigma}D_{\mathrm{I}r}=-(H_{21}^{-1}/H_{11}^{-1})(k_1^{\infty}+\overline{k}_1^{\infty}\overline{\sigma}^{2})+k_2^{\infty}+\overline{k}_2^{\infty}\overline{\sigma}^{2} \tag{6-208a}$$

或

$$D_{\mathrm{I}r}=\frac{1}{a}\left[-\frac{H_{21}^{-1}}{H_{11}^{-1}}(\sigma k_1^{\infty}+\overline{k}_1^{\infty}\overline{\sigma})+\sigma k_2^{\infty}+\overline{k}_2^{\infty}\overline{\sigma}\right]=\frac{1}{a}\mathrm{Re}\left(\sigma k_2^{\infty}-\frac{H_{21}^{-1}}{H_{11}^{-1}}\sigma k_1^{\infty}\right) \tag{6-208b}$$

由于裂纹面上的应力为零,而电位移由式(6－208b)表示,所以式(6－206)化为

$$\boldsymbol{H}^{-1}[\boldsymbol{h}^{+}(\boldsymbol{\sigma})+\boldsymbol{h}^{-}(\sigma)]+\boldsymbol{k}^{\infty}+\overline{\boldsymbol{k}}^{\infty}\overline{\boldsymbol{\sigma}}^{2}=\frac{a}{\sigma}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{I}r}(\sigma)=$$
$$[-(H_{21}^{-1}/H_{11}^{-1})(k_1^{\infty}+\overline{k}_1^{\infty}\overline{\sigma}^{2})+k_2^{\infty}+\overline{k}_2^{\infty}\overline{\sigma}^{2}]\boldsymbol{i}_2 \tag{6-209a}$$

或

$$\begin{aligned}&[\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{h}(\sigma)]^{+}+[\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{h}(\sigma)]^{-}=\boldsymbol{K}^{\infty}+\overline{\boldsymbol{K}}^{\infty}\overline{\sigma}^{2}\\ &\boldsymbol{K}^{\infty}=-k_1^{\infty}[\boldsymbol{i}_1+(H_{21}^{-1}/H_{11}^{-1})\boldsymbol{i}_2]\end{aligned} \tag{6-209b}$$

式中已利用了

$$-(\boldsymbol{k}^{\infty}+\overline{\boldsymbol{k}}^{\infty}\overline{\sigma}^{2})+\boldsymbol{i}_2[-(H_{21}^{-1}/H_{11}^{-1})(k_1^{\infty}+\overline{k}_1^{\infty}\overline{\sigma}^{2})+k_2^{\infty}+\overline{k}_2^{\infty}\overline{\sigma}^{2}]=$$
$$-(k_1^{\infty}+\overline{k}_1^{\infty}\overline{\sigma}^{2})\boldsymbol{i}_1-(H_{21}^{-1}/H_{11}^{-1})(k_1^{\infty}+\overline{k}_1^{\infty}\overline{\sigma}^{2})\boldsymbol{i}_2$$

上述问题的一般解为

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{h}(\varsigma)=\frac{1}{2}\left(\boldsymbol{K}^{\infty}+\overline{\boldsymbol{K}}^{\infty}\frac{1}{\varsigma^{2}}\right)+\frac{1}{2}X(\varsigma)\left[\boldsymbol{C}(\varsigma)+\frac{\boldsymbol{C}_{-1}}{\varsigma}+\frac{\boldsymbol{C}_{-2}}{\varsigma^{2}}\right]\\
X(\varsigma)=\prod_{k=1}^{n}(\varsigma-\sigma_k^{(1)})^{-1/2}(\varsigma-\sigma_k^{(2)})^{-1/2},\ \boldsymbol{C}(\varsigma)=\boldsymbol{C}_n\varsigma^n+\cdots+\boldsymbol{C}_0
\end{gathered}\tag{6-210}
$$

下面来讨论式中待定系数的确定。首先有

$$
\begin{aligned}
\lim_{\varsigma\to 0}X(\varsigma)&=\prod_{k=1}^{n}(-1)^n(\sigma_k^{(1)}\sigma_k^{(2)})^{-1/2}\left(1-\frac{\varsigma}{\sigma_k^{(1)}}\right)^{-1/2}\left(1-\frac{\varsigma}{\sigma_k^{(2)}}\right)^{-1/2}\approx\\
&\left[\prod_{k=1}^{n}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{\sigma_k^{(1)}\sigma_k^{(2)}}}\right]\left[1+\frac{\varsigma}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sigma_k^{(1)}}+\frac{1}{\sigma_k^{(2)}}\right)\right]\\
\lim_{\varsigma\to\infty}X(\varsigma)&\approx\left[1+\frac{1}{2\varsigma}\sum_{k=1}^{n}(\sigma_k^{(1)}+\sigma_k^{(2)})\right]\frac{1}{\varsigma^n}
\end{aligned}\tag{6-211}
$$

利用 $\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{h}(\varsigma)$在 $\varsigma=0$ 的邻域是解析的性质，由式(6－210)和(6－211)中同负次幂的系数相等，可推出

$$
\begin{aligned}
\varsigma^{-1}&:\boldsymbol{C}_{-1}=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\sigma_k^{(1)}}+\frac{1}{\sigma_k^{(2)}}\right)\boldsymbol{C}_{-2}\\
\varsigma^{-2}&:\boldsymbol{C}_{-2}=(-1)^{n+1}\prod_{k=1}^{n}\sqrt{\sigma_k^{(1)}\sigma_k^{(2)}}\,\overline{\boldsymbol{K}}^{\infty}
\end{aligned}\tag{6-212}
$$

由$\varsigma\to\infty$的性质，得

$$
\varsigma^{0}:\boldsymbol{C}_n=-\boldsymbol{K}^{\infty},\quad \varsigma^{-1}:\boldsymbol{C}_{n-1}=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(\sigma_k^{(1)}+\sigma_k^{(2)})\boldsymbol{C}_n\tag{6-213}
$$

其余的系数由广义位移的单值性条件确定

$$
\int_{L_c}\boldsymbol{d}'\mathrm{d}\sigma=0,\quad 或\int_{L_c}[\boldsymbol{h}^{+}(\sigma)-\boldsymbol{h}^{-}(\sigma)]\mathrm{d}\sigma=0\tag{6-214a}
$$

或

$$
\int_{L_c}[\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{h}^{+}(\sigma)-\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{h}^{-}(\sigma)]\mathrm{d}\sigma=0,\quad 或\int_{L_c}X(\sigma)\left[\boldsymbol{C}(\sigma)+\frac{\boldsymbol{C}_{-1}}{\sigma}+\frac{\boldsymbol{C}_{-2}}{\sigma^{2}}\right]\mathrm{d}\sigma=0\tag{6-214b}
$$

6.6.5 单个裂纹

对于图 6－6 所示的单个裂纹，点 $a_1=a\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0}$，$b_1=a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$，此时有

$$
\begin{gathered}
\sigma_k^{(1)}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0},\quad \sigma_k^{(2)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0},\quad X(\varsigma)=(\varsigma-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0})^{-1/2}(\varsigma-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0})^{-1/2}\\
\boldsymbol{C}(\varsigma)=\boldsymbol{C}_1\varsigma+\boldsymbol{C}_0,\quad \boldsymbol{C}_1=-\boldsymbol{K}^{\infty},\quad \boldsymbol{C}_0=\cos\theta_0\boldsymbol{K}^{\infty}\\
\boldsymbol{C}_{-2}=\overline{\boldsymbol{K}}^{\infty},\quad \boldsymbol{C}_{-1}=-\cos\theta_0\,\overline{\boldsymbol{K}}^{\infty}
\end{gathered}\tag{6-215}
$$

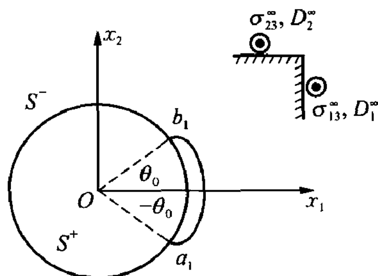


图 6－6　圆形夹杂单个界面裂纹

从而问题的解是

$$H^{-1}h(\varsigma) = \frac{1}{2}\left(K^{\infty} + \overline{K}^{\infty}\frac{1}{\varsigma^2}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\varsigma^2 - 2\cos\theta_0 + 1}}\left(-K^{\infty}\varsigma + \cos\theta_0 K^{\infty} - \cos\theta_0\,\overline{K}^{\infty}\frac{1}{\varsigma} + \overline{K}^{\infty}\frac{1}{\varsigma^2}\right) \tag{6-216}$$

由式(6-207)可求 $F_{\text{I}0}(\varsigma)$，$F_{\text{II}0}(\varsigma)$，进而可求基体和夹杂中任一点的广义应力和位移。但求应力等的强度因子时，只需知道界面上的广义应力和位移的对 θ 的导数已够。按式(6-188)和(6-207)，广义应力和 E_r 的奇异部分为

$$\begin{aligned}\Sigma_r &= \frac{2}{a}\mathrm{Re}[\sigma BF(\sigma)] = \frac{2}{a}\mathrm{Re}[\sigma H^{-1}h(\sigma)] \\ E_{\alpha r} &= -\frac{2}{a}\mathrm{Re}[B_\alpha^{-1}\sigma H^{-1}h(\sigma)]_2,\ \alpha = \text{I},\text{II},\ \sigma\in\Gamma\end{aligned} \tag{6-217}$$

令在 b 点 ($\varsigma = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$ 或 $z = a\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0}$) 的广义应力强度因子为

$$\begin{aligned}K &= [K_{\text{III}},\ K_{\text{D}}]^{\mathrm{T}} = \lim_{\theta\to\theta_0}\sqrt{2\pi a(\theta-\theta_0)}\,\Sigma_r = \frac{2}{a}\lim_{\theta\to\theta_0}\sqrt{2\pi a(\theta-\theta_0)}\,\mathrm{Re}[\sigma H^{-1}h(\sigma)] \\ K_{\alpha E} &= \lim_{\theta\to\theta_0}\sqrt{2\pi a(\theta-\theta_0)}\,E_{\alpha r} = -\frac{2}{a}\lim_{\theta\to\theta_0}\sqrt{2\pi a(\theta-\theta_0)}\,\mathrm{Re}[\sigma B_\alpha^{-1}H^{-1}h(\sigma)]_2\end{aligned} \tag{6-218}$$

注意到应力强度因子只和函数的奇异部分相关

$$X(\sigma) = (\sigma^2 - 2\cos\theta_0 + 1)^{-1/2} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}[2\sin\theta_0(\theta_0-\theta)]^{-1/2}$$

$$\sigma H^{-1}h(\sigma) = \frac{1}{2}\sigma X(\varsigma)(-K^{\infty}\sigma + \cos\theta_0 K^{\infty} - \cos\theta_0\,\overline{K}^{\infty}\bar{\sigma} + \bar{\sigma}^2\,\overline{K}^{\infty}) =$$

$$\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}}{2\sqrt{2\sin\theta_0(\theta_0-\theta)}}(-\mathrm{i}\sin\theta K^{\infty} - \mathrm{i}\,\bar{\sigma}\sin\theta\,\overline{K}^{\infty}) = -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{\sin\theta_0}}{\sqrt{2(\theta-\theta_0)}}(\sqrt{\sigma}K^{\infty} + \sqrt{\bar{\sigma}}\,\overline{K}^{\infty})$$

$$k^{\infty} = 2H^{-1}F_{\text{II}}^{\infty} = aH^{-1}B_{\text{II}}^{-1}\begin{Bmatrix}\sigma_{31}^{\infty} - \mathrm{i}\sigma_{32}^{\infty} \\ D_1^{\infty} - \mathrm{i}D_2^{\infty}\end{Bmatrix} = aM\begin{Bmatrix}\sigma_{31}^{\infty} - \mathrm{i}\sigma_{32}^{\infty} \\ D_1^{\infty} - \mathrm{i}D_2^{\infty}\end{Bmatrix},\ M = (B_{\text{II}}H)^{-1}$$

$$K^{\infty} = -k_1^{\infty}\left(\mathbf{i}_1 + \frac{H_{21}^{-1}}{H_{11}^{-1}}\mathbf{i}_2\right),\ k_1^{\infty} = a[M_{11}(\sigma_{31}^{\infty} - \mathrm{i}\sigma_{32}^{\infty}) + M_{12}(D_1^{\infty} - \mathrm{i}D_2^{\infty})]$$

则式(6-218)化为

$$\begin{aligned}K &= [K_{\text{III}},\ K_D]^{\mathrm{T}} = \lim_{\theta\to\theta_0}\sqrt{2\pi a(\theta-\theta_0)}\,\Sigma_r = \frac{2}{a}\lim_{\theta\to\theta_0}\sqrt{2\pi a(\theta-\theta_0)}\,\mathrm{Re}[\sigma H^{-1}h(\sigma)] = \\ &\frac{1}{a}\sqrt{\pi a\sin\theta_0}\,\mathrm{Re}(\sqrt{\sigma}K^{\infty} + \sqrt{\bar{\sigma}}\,\overline{K}^{\infty}) = \frac{2}{a}\sqrt{\pi a\sin\theta_0}\,\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0/2}K^{\infty}) = \\ &2\sqrt{\pi a\sin\theta_0}\,\mathrm{Re}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0/2}[M_{11}(\sigma_{31}^{\infty} - \mathrm{i}\sigma_{32}^{\infty}) + M_{12}(D_1^{\infty} - \mathrm{i}D_2^{\infty})]\left(\mathbf{i}_1 + \frac{H_{21}^{-1}}{H_{11}^{-1}}\mathbf{i}_2\right)\right\} = \\ &2\sqrt{\pi a\sin\theta_0}\left[\cos\frac{\theta_0}{2}(M_{11}\sigma_{31}^{\infty} + M_{12}D_1^{\infty}) + \sin\frac{\theta_0}{2}(M_{11}\sigma_{32}^{\infty} + M_{12}D_2^{\infty})\right][\mathbf{i}_1 + (H_{21}^{-1}/H_{11}^{-1})\mathbf{i}_2]\end{aligned} \tag{6-219a}$$

$$K_{\alpha E} = \lim_{\theta\to\theta_0}\sqrt{2\pi a(\theta-\theta_0)}\,E_{\alpha r} = \frac{2}{a}\lim_{\theta\to\theta_0}\sqrt{2\pi a(\theta-\theta_0)}\,B_\alpha^{-1}\mathrm{Re}[\sigma H^{-1}h(\sigma)]_2 \tag{6-219b}$$

对于均匀压电介质中的圆弧裂纹，有 $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{I}/2$，从而式(6－219)化为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{K}=[K_{\mathrm{III}},\ K_{\mathrm{D}}]^{\mathrm{T}} &= \sqrt{\pi a\sin\theta_0}\left(\sigma_{31}^{\infty}\cos\frac{\theta_0}{2}+\sigma_{32}^{\infty}\sin\frac{\theta_0}{2}\right)\left(\boldsymbol{i}_1+\frac{H_{21}^{-1}}{H_{11}^{-1}}\boldsymbol{i}_2\right)\\
K_{aE} &= -\sqrt{\pi a\sin\theta_0}\left(\sigma_{31}^{\infty}\cos\frac{\theta_0}{2}+\sigma_{32}^{\infty}\sin\frac{\theta_0}{2}\right)\left(B_{a21}^{-1}+\frac{H_{21}^{-1}}{H_{11}^{-1}}B_{a22}^{-1}\right)
\end{aligned}
\tag{6-220}
$$

由上式知，均匀压电介质中的圆弧裂纹的广义应力强度因子和外加电场无关。

6.6.6 绝缘裂纹

在绝缘裂纹面上，$D_{\mathrm{I}r}=D_{\mathrm{II}r}=0$ 是已知的，所以无需像开路裂纹那样去求裂纹面上电位移值。此时在式(6－209)中有 $\boldsymbol{K}^{\infty}=-\boldsymbol{k}^{\infty}$。问题的解 $\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{h}(\varsigma)$ 仍由式(6－210)～(6－214)表示。式(6－219)表示的广义应力强度因子现在退化为

$$
\boldsymbol{K}=\begin{Bmatrix}K_{\mathrm{III}}\\ K_{\mathrm{D}}\end{Bmatrix}=\frac{2}{a}\sqrt{\pi a\sin\theta_0}\,\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0/2}\boldsymbol{k}^{\infty})=2\sqrt{\pi a\sin\theta_0}\,\boldsymbol{M}\,\mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta_0/2}\begin{Bmatrix}\sigma_{31}^{\infty}-\mathrm{i}\sigma_{32}^{\infty}\\ D_1^{\infty}-\mathrm{i}D_2^{\infty}\end{Bmatrix}\right)=
$$

$$
2\sqrt{\pi a\sin\theta_0}\begin{bmatrix}M_{11} & M_{12}\\ M_{21} & M_{22}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\sigma_{32}^{\infty}\sin(\theta_0/2)+\sigma_{31}^{\infty}\cos(\theta_0/2)\\ D_2^{\infty}\sin(\theta_0/2)+D_1^{\infty}\cos(\theta_0/2)\end{Bmatrix}
\tag{6-221}
$$

式中已利用了 $\boldsymbol{k}^{\infty}$ 的表达式。

Zhong 和 Meguid[87]，Gao 和 Balke[88]更详细地讨论过这一问题。

6.7 Ⅲ型界面裂纹的条形区域模型

6.7.1 问题的陈述

图 6－7 表示均具六方对称性的双材料单个界面裂纹问题。设材料Ⅰ位于上半平面 S^+，$x_2>0$；材料Ⅱ位于下半平面 S^-，$x_2<0$；$x_2=0$ 为界面，沿 x_1 轴有长 $2a$ 的裂纹，坐标原点选在裂纹的中点。假设无穷远处没有广义应力作用，裂纹面上作用广义应力 $-\tau^{\infty}$ 和 $-D^{\infty}$。类似于弹性断裂力学中的 Dugdale 模型，假设裂纹正前方存在电学饱和区，其中 $D_2=D_s$，D_s 取材料Ⅰ和Ⅱ中电位移饱和值中的小者；同时还存在力学屈服区，其中 $\sigma_{23}=\tau_s$，τ_s 取材料Ⅰ和Ⅱ中屈服切应力值中的小者(图 6－7)。真实裂纹的长度加上饱和或屈服区的长度构成有效裂纹长度。

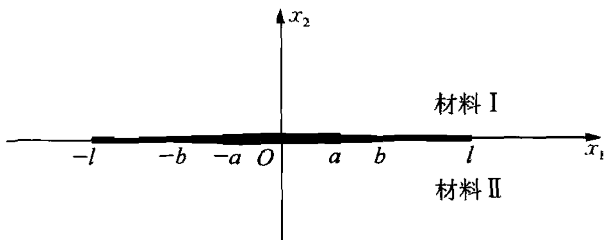


图 6－7　Ⅲ型界面裂纹条形区域模型

引入广义位移和广义应力

$$
\boldsymbol{U}=[u_3,\ \varphi]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\Sigma}_2=[\sigma_{23},\ D_2]^{\mathrm{T}}
\tag{6-222}
$$

在裂纹面上的广义位移跳跃可如下表示

$$\Delta \boldsymbol{U}(x_1) = \boldsymbol{U}_{\mathrm{I}}(x_1, 0) - \boldsymbol{U}_{\mathrm{II}}(x_1, 0), \quad \boldsymbol{\psi}(x_1) = \mathrm{d}\Delta \boldsymbol{U}(x_1)/\mathrm{d}x_1 \tag{6-223}$$

称式中 $\boldsymbol{\psi}(x_1)$为位错密度矢量,在结合面上 $\Delta \boldsymbol{U}(x_1) = \mathbf{0}$。围绕裂纹的单值性条件为

$$\int_{-a}^{a} \boldsymbol{\psi}(x_1)\mathrm{d}x_1 = 0, \ \boldsymbol{\psi}(x_1) = [\psi_1(x_1), \psi_2(x_1)] \tag{6-224}$$

Ⅲ型静态问题的平衡方程和本构方程分别由式(4－177)和(4－178)表示。

6.7.2 解的基本公式

用广义位移表示的Ⅲ型问题的静态平衡方程如式(6－174)所示,或更简单地写成式(6－175),即

$$\nabla^2 \boldsymbol{U} = \mathbf{0}, \ \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}(u_3, \varphi)^{\mathrm{T}} \tag{6-225}$$

在裂纹面上和结合面上分别有

$$\begin{aligned} &\sigma_{23} = -\tau^{\infty}, \quad D_2 = -D^{\infty}, \ -a < x_1 < a, \ x_2 = 0 \\ &\boldsymbol{U}_{\mathrm{I}}(x_1) = \boldsymbol{U}_{\mathrm{II}}(x_1), \quad \boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{I}2}(x_1) = \boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{II}2}(x_1) = \boldsymbol{\Sigma}_2(x_1), \ |x_1| > a, \ x_2 = 0 \end{aligned} \tag{6-226}$$

采用 Fourier 变换方法解上述问题。引入任一函数 $f(x_1, x_2)$的 Fourier 变换$\tilde{f}(s, x_2)$

$$\tilde{f}(s, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx_1}\mathrm{d}x_1 \tag{6-227a}$$

称 $f(t)$为原函数,$\tilde{f}(s)$为像函数,其中 s 为实数。在合适的条件下,它的反变换为

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(s, x_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_1 s}\mathrm{d}s \tag{6-227b}$$

在条件 $\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \to \infty$, $f^{(n)}(x_1, x_2) \to 0$ 的条件下,存在关系

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(x_1, x_2)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx_1}\mathrm{d}x_1 = (\mathrm{i}s)^n \tilde{f}(s, x_2), \ f^{(n)} = \partial^n f / \partial x_1^n$$

如 $\int_{-\infty}^{\infty} |x_1^n f(x_1, x_2)| \mathrm{d}x_1 < \infty$,则有

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}^{(n)}(s, x_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_1 s}\mathrm{d}s = (-\mathrm{i}x_1)^n f(x_1, x_2)$$

利用上述关系,把基本方程式(6－225)作 Fourier 变换,得

$$\int_{\infty}^{\infty}\left(\frac{\partial^2 \boldsymbol{U}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \boldsymbol{U}}{\partial x_2^2}\right)\mathrm{e}^{\ \mathrm{i}sx_2}\mathrm{d}x_2 = -s^2\tilde{\boldsymbol{U}}(s, x_2) + \frac{\partial^2 \tilde{\boldsymbol{U}}(s, x_2)}{\partial x_2^2} = 0 \tag{6-228}$$

利用 Fourier 变换,由式(4－173)和(6－222),可得

$$\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}_2 = \begin{Bmatrix} \tilde{\sigma}_{23} \\ \tilde{D}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44} & e_{15} \\ e_{15} & -\epsilon_{11} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \tilde{u}_{3,2} \\ \tilde{\varphi}_{,2} \end{Bmatrix} = \boldsymbol{B}\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{U}}(s, x_2)}{\partial x_2}, \ \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} C_{44} & e_{15} \\ e_{15} & -\epsilon_{11} \end{bmatrix} \tag{6-229}$$

显然,对材料ⅠB 取 B_{I},对材料ⅡB 取 B_{II}。为了保证无穷远处有界,式(6－228)的解可以写成

$$\widetilde{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{I}}(s,\ x_2)=\mathrm{e}^{sx_2}\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(s),\ s<0;\quad \widetilde{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{I}}(s,\ x_2)=\mathrm{e}^{-sx_2}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(s),\ s>0$$
$$\widetilde{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{II}}(s,\ x_2)=\mathrm{e}^{-sx_2}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(s),\ s<0;\quad \widetilde{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{II}}(s,\ x_2)=\mathrm{e}^{sx_2}\boldsymbol{G}_{\mathrm{II}}(s),\ s>0 \tag{6-230}$$

广义应力可写成

$$\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{I}2}(s,\ x_2)=\boldsymbol{R}_{\mathrm{I}}\widetilde{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{I}}(s,\ x_2),\ \boldsymbol{R}_{\mathrm{I}}=s\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}},\ s<0;\ \boldsymbol{R}_{\mathrm{I}}=-s\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}},\ s>0$$
$$\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathrm{II}2}(s,\ x_2)=\boldsymbol{R}_{\mathrm{II}}\widetilde{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{II}}(s,\ x_2),\ \boldsymbol{R}_{\mathrm{II}}=-s\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}},\ s<0;\ \boldsymbol{R}_{\mathrm{II}}=s\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}},\ s>0 \tag{6-231}$$

由式(6-226)知，在 $x_2=0$ 的整个界面(含裂纹面)上广义应力连续，故有

$$\boldsymbol{R}_{\mathrm{I}}(s)\widetilde{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{I}}(s,\ 0)=\boldsymbol{R}_{\mathrm{II}}(s)\widetilde{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{II}}(s,\ 0),\ |x_1|<\infty \tag{6-232}$$

式(6-224)在 Fourier 变换域上的表达式为

$$\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{\psi}(x_1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx_1}\mathrm{d}x_1=\mathrm{i}s\Delta\widetilde{\boldsymbol{U}}(s),\ \Delta\widetilde{\boldsymbol{U}}(s)=\widetilde{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{I}}(s,\ 0)-\widetilde{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{II}}(s,\ 0)=-\frac{\mathrm{i}}{s}\int_{-a}^{a}\boldsymbol{\psi}(x_1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx_1}\mathrm{d}x_1 \tag{6-233}$$

结合式(6-232)和(6-233)，可得

$$\widetilde{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{I}}=\boldsymbol{P}_{\mathrm{I}}\Delta\widetilde{\boldsymbol{U}}(s),\quad \widetilde{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{II}}=\boldsymbol{P}_{\mathrm{II}}\Delta\widetilde{\boldsymbol{U}}(s)$$
$$\boldsymbol{P}_{\mathrm{I}}=\frac{\boldsymbol{R}_{\mathrm{II}}}{\boldsymbol{R}_{\mathrm{II}}-\boldsymbol{R}_{\mathrm{I}}}=\frac{\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}}{\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}+\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}},\quad \boldsymbol{P}_{\mathrm{II}}=\frac{\boldsymbol{R}_{\mathrm{I}}}{\boldsymbol{R}_{\mathrm{II}}-\boldsymbol{R}_{\mathrm{I}}}=-\frac{\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}}{\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}+\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}} \tag{6-234}$$

结合式(6-231)和(6-234)，并进行 Fourier 反变换，便得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{II}2}(x_1,\ 0)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}_{2\mathrm{II}}(s,\ x_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_1s}\mathrm{d}s=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{R}_{\mathrm{II}}\widetilde{\boldsymbol{U}}_{\mathrm{II}}(s,\ x_2)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_1s}\mathrm{d}s=\\&\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{R}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{P}_{\mathrm{II}}\Delta\widetilde{\boldsymbol{U}}(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_1s}\mathrm{d}s=-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{R}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{P}_{\mathrm{II}}\left[\frac{\mathrm{i}}{s}\int_{-a}^{a}\boldsymbol{\psi}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}st}\mathrm{d}t\right]\mathrm{e}^{\mathrm{i}x_1s}\mathrm{d}s=\\&-\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{-a}^{a}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{s}\boldsymbol{R}_{\mathrm{II}}(s)\boldsymbol{P}_{\mathrm{II}}(s)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s(t-x_1)}\mathrm{d}s\right]\boldsymbol{\psi}(t)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{6-235}$$

式中

$$\frac{1}{s}\boldsymbol{R}_{\mathrm{II}}(s)\boldsymbol{P}_{\mathrm{II}}(s)=\frac{1}{s}\frac{\boldsymbol{R}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{R}_{\mathrm{I}}}{\boldsymbol{R}_{\mathrm{II}}-\boldsymbol{R}_{\mathrm{I}}}=-\frac{s}{|s|}\boldsymbol{H},\ \boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}}{\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}+\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}}\ \text{对任何}\ s\ \text{都成立} \tag{6-236}$$

显然 $\boldsymbol{H}$ 是实对称矩阵。利用公式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s}{|s|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s(t-x_1)}\mathrm{d}s=-\frac{2\mathrm{i}}{t-x_1},\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}s(t-x_1)}\mathrm{d}s=\delta(t-x_1) \tag{6-237}$$

式(6-235)的解为

$$\frac{1}{\pi}\boldsymbol{H}\int_{-a}^{a}\frac{\boldsymbol{\psi}(t)}{t-x_1}\mathrm{d}t=\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{II}2}(x_1,\ 0),\ \boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{II}2}=[t_{01}(x_1),\ t_{02}(x_1)]^{\mathrm{T}}$$
$$\frac{1}{\pi}H_{ij}\int_{a}^{a}\frac{\psi_j(t)}{t-x_1}\mathrm{d}t=t_{0j}(x_1,\ 0),\ |x_1|<\infty,\ x_2=0 \tag{6-238}$$

6.7.3 条形区域模型的解

分两种情况来讨论条形区域模型。

1）电学饱和区大于力学屈服区

设电学饱和区的右端点为 l，机械屈服区的右端点为 b，且 $l > b$，此时设有效裂纹长度为 $2l$。因此边值问题为

$$t_{01}(x_1)=\begin{cases}-\tau^\infty, & |x_1|<a,\\ -\tau^\infty+\tau_s, & a<|x_1|<b;\end{cases}\quad t_{02}(x_1)=\begin{cases}-D^\infty, & |x_1|<a,\\ -D^\infty+D_s, & a<|x_1|<l\end{cases}$$
$$\psi_1(x_1)=0,\ |x_1|>b;\quad \psi_2(x_1)=0,\ |x_1|>l,\ l>b \tag{6-239}$$

由式(6-238)，可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b}[\psi_1(t)/(t-x_1)]\mathrm{d}t=G_{1j}t_{0j}(x_1),\ |x_1|<b\\ &\frac{1}{\pi}\int_{l}^{l}[H_{2j}\psi_j(t)/(t-x_1)]\mathrm{d}t=t_{02}(x_1),\ |x_1|<l,\ j=1,2\end{aligned} \tag{6-240}$$

式中 $\boldsymbol{G}=\boldsymbol{H}^{-1}$。如果考虑在 $x_1=\pm b$ 应力没有奇异性，则 $\psi_1(t)$ 必须有界。按式(1-113)和文献[90]，式(6-240)中的第一式在下述条件下有解

$$\int_{-b}^{b}[G_{1j}\tau_{0j}(t)/\sqrt{b^2-t^2}]\mathrm{d}t=0 \tag{6-241}$$

注意到

$$\begin{aligned}\int_{-b}^{b}\frac{G_{1j}\tau_{0j}(t)}{\sqrt{b^2-t^2}}\mathrm{d}t=&[G_{11}(\tau_s-\tau^\infty)+G_{12}(D_s-D^\infty)]\left(\int_{-b}^{-a}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{b^2-t^2}}+\int_{a}^{b}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{b^2-t^2}}\right)-\\ &(G_{11}\tau^\infty+G_{12}D^\infty)\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{b^2-t^2}}=\\ &[G_{11}(\tau_s-\tau^\infty)+G_{12}(D_s-D^\infty)][\pi-2\arcsin(a/b)]-\\ &(G_{11}\tau^\infty+G_{12}D^\infty)2\arcsin(a/b)\end{aligned}$$

利用上式和 $\arcsin(a/b)=\pi/2-\arccos(a/b)$，由式(6-241)，可得塑性屈服区的尺寸为

$$\frac{b}{a}=\sec\left(\frac{\pi}{2}\frac{G_{11}\tau^\infty+G_{12}D^\infty}{G_{11}\tau_s+G_{12}D_s}\right) \tag{6-242}$$

在条件式(6-241)下，式(6-240)中第一个的解为

$$\begin{aligned}\psi_1(x_1)=&\frac{1}{\pi}\sqrt{b^2-x_1^2}\int_{-b}^{b}\frac{G_{1j}\tau_{0j}(t)}{\sqrt{b^2-t^2}(t-x_1)}\mathrm{d}t=\\ &(1/\pi)(G_{11}\tau_s+G_{12}D_s)[\omega(x_1,a,b)-\omega(-x_1,a,b)],\ |x_1|<b\\ &\omega(x_1,a,b)=\operatorname{arcosh}\left|\frac{b^2-a^2}{b(a-x_1)}+\frac{a}{b}\right|\end{aligned} \tag{6-243}$$

类似地，如在 $x_1=\pm l$ 电位移没有奇异性，式(6-240)中第二式的解为

$$H_{2j}\psi_j(x_1) = \frac{1}{\pi}\sqrt{l^2 - x_1^2}\int_{-l}^{l}\frac{\tau_{02}(t)}{\sqrt{l^2 - t^2}(t - x_1)}\mathrm{d}t = \frac{D_s}{\pi}[\omega(x_1, a, l) - \omega(-x_1, a, l)] \tag{6-244}$$

或

$$\psi_2(x_1) = \frac{D_s}{\pi H_{22}}[\omega(x_1, a, l) - \omega(-x_1, a, l)] - \frac{H_{21}}{H_{22}}\psi_1(x_1), \ x_1 < l$$

电学饱和区的尺寸由条件 $\int_{-l}^{l}[t_{02}(t)/\sqrt{b^2 - t^2}]\mathrm{d}t = 0$ 确定,其数值为

$$l/a = \sec(\pi D^\infty / 2D_s) \tag{6-245}$$

由式(6 - 243)和(6 - 246)可知,饱和区的尺寸大于屈服区尺寸的条件是 $\tau^\infty/\tau_s < D^\infty/D_s$,若 $\tau^\infty/\tau_s = D^\infty/D_s$,则饱和区的尺寸等于屈服区尺寸。

裂纹张开位移和电势间断值分别为

$$\Delta u_3(x_1) = -\int_b^{x_1}\psi_1(t)\mathrm{d}t = \frac{G_{11}\tau_s + G_{12}D_s}{\pi}[(a - x_1)\omega(x_1, a, b) + (a + x_1)\omega(-x_1, a, b)], \ |x_1| < b \tag{6-246}$$

$$\Delta\varphi(x_1) = \frac{D_s}{\pi H_{22}}[(a - x_1)\omega(x_1, a, l) + (a + x_1)\omega(-x_1, a, l)] - \frac{H_{21}}{H_{22}}\Delta u_3(x_1), \ |x_1| < l$$

从而裂尖张开位移和裂尖电势间断值分别为

$$\begin{aligned}\Delta u_3(a) &= \frac{2a}{\pi}(G_{11}\tau_s + G_{12}D_s)\ln\left[\sec\left(\frac{\pi}{2}\frac{G_{11}\tau^\infty + G_{12}D^\infty}{G_{11}\tau_s + G_{12}D_s}\right)\right] \\ \Delta\varphi(a) &= \frac{2aD_s}{\pi H_{22}}\ln\left[\sec\left(\frac{\pi D^\infty}{2D_s}\right)\right] - \frac{H_{21}}{H_{22}}\Delta u_3(a)\end{aligned} \tag{6-247}$$

裂尖处的能量释放率为

$$\begin{aligned}J = \tau_s\Delta u_3(a) + D_s\Delta\varphi(a) = \frac{2a}{\pi}\Big\{&\left(\tau_s - \frac{H_{21}}{H_{22}}D_s\right)(G_{11}\tau_s + G_{12}D_s)\cdot \\ &\ln\left[\sec\left(\frac{\pi}{2}\frac{G_{11}\tau^\infty + G_{12}D^\infty}{G_{11}\tau_s + G_{12}D_s}\right)\right] + \frac{D_s^2}{H_{22}}\ln\left[\sec\left(\frac{\pi D^\infty}{2D_s}\right)\right]\Big\}\end{aligned} \tag{6-248}$$

对于小范围屈服和电学饱和的情况,在 $l/a = b/a \approx 1$ 的情况,裂尖处的能量释放率化为

$$J = \frac{\pi a}{4}[\tau^\infty, D^\infty][\boldsymbol{G}]\begin{Bmatrix}\tau^\infty \\ D^\infty\end{Bmatrix} \tag{6-249}$$

应当注意,所有上面的奇异积分都是在 Cauchy 积分主值的意义上进行的。

2) ***力学屈服区大于电学饱和区***

此时设屈服区的长度为 l 大于饱和区的长度 b,由式(6 - 238),可得

$$\frac{1}{\pi}\int_{-b}^{b}[\psi_2(t)/(t-x_1)]\mathrm{d}t = G_{2j}\tau_{0j}(x_1),\ |x_1|<b$$
$$\frac{1}{\pi}\int_{-l}^{l}[H_{1j}\psi_j(t)/(t-x_1)]\mathrm{d}t = \tau_{01}(x_1),\ |x_1|<l,\ j=1,2 \tag{6-250}$$

力学屈服区和电学包含区的尺寸分别为

$$\frac{b}{a} = \sec\left(\frac{\pi}{2}\frac{G_{21}\tau^{\infty}+G_{22}D^{\infty}}{G_{21}\tau_s+G_{22}D_s}\right),\quad \frac{l}{a} = \sec\left(\frac{\pi\tau^{\infty}}{2\tau_s}\right) \tag{6-251}$$

裂尖张开位移和裂尖电势间断值分别为

$$\Delta\varphi(a) = \frac{2a}{\pi}(G_{21}\tau_s+G_{22}D_s)\ln\left[\sec\left(\frac{\pi}{2}\frac{G_{21}\tau^{\infty}+G_{22}D^{\infty}}{G_{21}\tau_s+G_{22}D_s}\right)\right]$$
$$\Delta u_3(a) = \frac{2a\tau_s}{\pi H_{11}}\ln\left[\operatorname{secc}\left(\frac{\pi\tau^{\infty}}{2\tau_s}\right)\right]-\frac{H_{12}}{H_{11}}\Delta\varphi(a) \tag{6-252}$$

裂尖处的能量释放率为

$$J = \frac{2a}{\pi}\left\{\left(D_s-\frac{H_{12}}{H_{11}}\tau_s\right)(G_{11}\tau_s+G_{12}D_s)\cdot \ln\left[\sec\left(\frac{\pi}{2}\frac{G_{21}\tau^{\infty}+G_{22}D^{\infty}}{G_{21}\tau_s+G_{22}D_s}\right)\right]+\frac{\tau_s^2}{H_{11}}\ln\left[\sec\left(\frac{\pi\tau^{\infty}}{2\tau_s}\right)\right]\right\} \tag{6-253}$$

Shen, Nishioka, Kuang, 和 Liu[89]对这一问题有更详细的讨论。

6.8 Ⅲ型 Yoffe 型运动裂纹

6.8.1 概述

考虑一双无限压电介质，材料Ⅰ位于上半平面 S^+，$x_2>0$；材料Ⅱ位于下半平面 S^-，$x_2<0$；$x_1=0$ 为界面，记为 L，界面上存在一裂纹，记为 L_c。为方便计，其余的部分 $L-L_c$ 称结合面。双材料 Yoffe 型运动界面裂纹是指长 $2a$ 的裂纹在运动过程中保持长度不变、且以 v 等速运动的一类最简单的运动裂纹，虽然现实中并不存在，但可得到解析解，显现了运动裂纹的一般特征，所以研究它具有一定的意义。本节讨论在无穷远处作用广义应力 $\tau_{23}=\tau^{\infty}$，$D_2=D^{\infty}$ 时的Ⅲ型 Yoffe 型运动裂纹问题。这一问题可分解成两个问题的叠加：①无裂纹无限板在无穷远处承受 τ^{∞}，D^{∞} 的作用，②裂纹面上作用有广义应力 $-\tau^{\infty}$，$-D^{\infty}$。裂尖奇异性只和问题②有关，因而下面只讨论问题②。

Ⅲ型静态问题的基本方程已在 6.6 和 6.7 节讨论过。对于动态问题，式(6-174)改为

$$C_{44}\nabla^2 u_3+e_{15}\nabla^2\varphi=\rho\ddot{u}_3,\quad e_{15}\nabla^2 u_3-\epsilon_{11}\nabla^2\varphi=0 \tag{6-254a}$$

对任一介质 N，上式可以化为

$$\nabla^2 u_{N3}=c_N^{-2}\ddot{u}_{N3},\quad \nabla^2\varphi_N=c_N^{-2}(e_{N15}/\epsilon_{N11})\ddot{u}_{N3};\quad C_{N44}^{*}=C_{N44}+e_{N15}^2/\epsilon_{N11} \tag{6-254b}$$

介质 N 的本构方程记为

$$\begin{aligned} \sigma_{N31} &= C_{N44}u_{N3,1} - e_{N15}E_{N1}, \quad \sigma_{N32} = C_{N44}u_{N3,2} - e_{N15}E_{N2} \\ D_{N1} &= e_{N15}u_{N3,1} + \epsilon_{N11}E_{N1}, \quad D_{N2} = e_{N15}u_{N3,2} + \epsilon_{N11}E_{N2} \end{aligned} \tag{6-255}$$

本节中变量右下方的 $N = \text{I}, \text{II}$，表示介质的编号。除空间固定坐标系外，这里还采用固定在裂尖的运动坐标系(x, y)，如图 6-8 所示，有

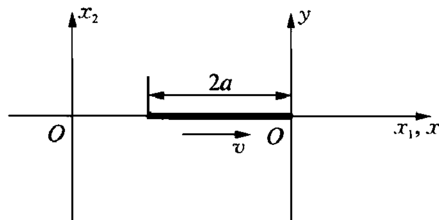


图 6-8 Ⅲ型 Yoffe 型运动裂纹

$$x = x_1 - vt, \quad y = x_2, \quad \partial/\partial t = -v\partial/\partial x \tag{6-256}$$

把式(6-256)代入式(6-254)，可得

$$\partial^2 u_{N3}/\partial x^2 + \partial^2 u_{N3}/\partial(\alpha_N y^2) = 0, \quad \alpha_N = \sqrt{1 - v^2/c_N^2} \tag{6-257}$$

问题②的裂纹面上的边界条件为

$$\sigma_{\text{I}23}(x, 0^+) = \sigma_{\text{II}23}(x, 0^-) = -\tau^\infty, \quad D_{\text{I}2}(x, 0^+) = D_{\text{II}2}(x, 0^-) = -D^\infty, \quad |x| < a \tag{6-258}$$

结合面上的界面连接条件为

$$\begin{aligned} &\sigma_{\text{I}23}(x, 0^+) = \sigma_{\text{II}23}(x, 0^-), \quad D_{\text{I}2}(x, 0^+) = D_{\text{II}2}(x, 0^-), \quad |x| > a \\ &u_{\text{I}3}(x, 0^+) = u_{\text{II}3}(x, 0^-), \quad \varphi_{\text{I}}(x, 0^+) = \varphi_{\text{II}}(x, 0^-), \quad |x| > a \end{aligned} \tag{6-259}$$

围绕裂纹的单值性条件为

$$\int_a^a \boldsymbol{\psi}(x_1)\mathrm{d}x_1 = 0, \quad \boldsymbol{\psi}(x_1) = \mathrm{d}[\Delta u_3, \Delta\varphi]^{\mathrm{T}}/\mathrm{d}x_1 \tag{6-260}$$

式中 $\boldsymbol{\psi}(x_1)$通常称为位错密度。

6.8.2 问题的解

考虑到无穷远处广义位移为零，Chen，Karihaloo 和 Yu[91]用 Fourier 变换方法求解上述问题，设其形式为

$$\begin{aligned} u_{\text{I}3}(x, y) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty A_{\text{I}}(s)\mathrm{e}^{-s\alpha_{\text{I}}y}\cos xs\,\mathrm{d}s, \quad y > 0 \\ u_{\text{II}3}(x, y) &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty A_{\text{II}}(s)\mathrm{e}^{s\alpha_{\text{II}}y}\cos xs\,\mathrm{d}s, \quad y < 0 \end{aligned} \tag{6-261}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{I}}(x, y) &= \frac{e_{\text{I}15}}{\epsilon_{\text{I}11}}u_{\text{I}3}(x, y) + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty B_{\text{I}}(s)\mathrm{e}^{-sy}\cos xs\,\mathrm{d}s, \quad y > 0 \\ \varphi_{\text{II}}(x, y) &= \frac{e_{\text{II}15}}{\epsilon_{\text{II}11}}u_{\text{II}3}(x, y) + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty B_{\text{II}}(s)\mathrm{e}^{sy}\cos xs\,\mathrm{d}s, \quad y < 0 \end{aligned} \tag{6-262}$$

由裂纹面上的边界条件(6-258)和本构方程(6-255)，可得

$$-[\tau^\infty + (e_{N15}/\epsilon_{N11})D^\infty] = C_{N44}^* u_{N3,2}, \quad -e_{N15}\tau^\infty + C_{N44}D^\infty = \epsilon_{N11}C_{N44}^*\varphi_{N,2}, \quad |x| < a \tag{6-263}$$

把式(6-261)和(6-262)代入上式，得

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} sA_{\mathrm{I}}(s)\cos xs\,\mathrm{d}s = [\tau^{\infty} + (e_{\mathrm{I}15}/\epsilon_{\mathrm{I}11})D^{\infty}]/C^{*}_{\mathrm{I}44}\alpha_{\mathrm{I}}$$
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} sA_{\mathrm{II}}(s)\cos xs\,\mathrm{d}s = -[\tau^{\infty} + (e_{\mathrm{II}15}/\epsilon_{\mathrm{II}11})D^{\infty}]/C^{*}_{\mathrm{II}44}\alpha_{\mathrm{II}},\ |x| < a,\ y = 0 \tag{6-264}$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} sB_{\mathrm{I}}(s)\cos xs\,\mathrm{d}s = -D^{\infty}/\epsilon_{\mathrm{I}11}$$
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} sB_{\mathrm{II}}(s)\cos xs\,\mathrm{d}s = D^{\infty}/\epsilon_{\mathrm{II}11},\ |x| < a,\ y = 0 \tag{6-265}$$

利用上面两式，结合面上的广义位移连接条件要求

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\left[\frac{e_{\mathrm{I}15}}{\epsilon_{\mathrm{I}11}}A_{\mathrm{I}}(s) - \frac{e_{\mathrm{II}15}}{\epsilon_{\mathrm{II}11}}A_{\mathrm{II}}(s)\right] + [B_{\mathrm{I}}(s) - B_{\mathrm{II}}(s)]\right\}\cos xs\,\mathrm{d}s = 0$$
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}[A_{\mathrm{I}}(s) - A_{\mathrm{II}}(s)]\cos xs\,\mathrm{d}s = 0,\ |x| > a,\ y = 0 \tag{6-266}$$

结合面上和裂纹面上的广义应力都是连续的，因此要求 $|x| < \infty,\ y = 0$ 时有

$$-\frac{2}{\pi}C^{*}_{\mathrm{I}44}\alpha_{\mathrm{I}}\int_0^{\infty} sA_{\mathrm{I}}(s)\cos xs\,\mathrm{d}s - \frac{2}{\pi}e_{\mathrm{I}15}\int_0^{\infty} sB_{\mathrm{I}}(s)\cos xs\,\mathrm{d}s =$$
$$\frac{2}{\pi}C^{*}_{\mathrm{II}44}\alpha_{\mathrm{II}}\int_0^{\infty} sA_{\mathrm{II}}(s)\cos xs\,\mathrm{d}s + \frac{2}{\pi}e_{\mathrm{II}15}\int_0^{\infty} sB_{\mathrm{II}}(s)\cos xs\,\mathrm{d}s -$$
$$\frac{2}{\pi}\epsilon_{\mathrm{I}11}\int_0^{\infty} sB_{\mathrm{I}}(s)\cos xs\,\mathrm{d}s = \frac{2}{\pi}\epsilon_{\mathrm{II}11}\int_0^{\infty} sB_{\mathrm{II}}(s)\cos xs\,\mathrm{d}s \tag{6-267}$$

式(6-264)～(6-267)是关于4个未知量 A_{I}，A_{II}，B_{I}，B_{II} 的4个方程，因而可解。由式(6-267)可得

$$C^{*}_{\mathrm{I}44}\alpha_{\mathrm{I}}A_{\mathrm{I}}(s) + e_{\mathrm{I}15}B_{\mathrm{I}}(s) = -C^{*}_{\mathrm{II}44}\alpha_{\mathrm{I}}A_{\mathrm{II}}(s) - e_{\mathrm{II}15}B_{\mathrm{II}}(s)$$
$$\epsilon_{\mathrm{I}11}B_{\mathrm{I}}(s) = -\epsilon_{\mathrm{II}11}B_{\mathrm{II}}(s) \tag{6-268}$$

显然式(6-265)已包含在(6-268)中，剩下的还需满足式(6-264)和(6-266)。由式(6-264)，可得

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} s[A_{\mathrm{I}}(s) - A_{\mathrm{II}}(s)]\cos xs\,\mathrm{d}s = \tau_1 + \tau_2,\ |x| < a,\ y = 0$$
$$\tau_N = [\tau^{\infty} + (e_{N15}/\epsilon_{N11})D^{\infty}]/C^{*}_{N44}\alpha_N,\ N = \mathrm{I},\ \mathrm{II} \tag{6-269a}$$

同时利用裂纹面上的边界条件，可推出

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\left\{\left[\frac{e_{\mathrm{I}15}}{\epsilon_{\mathrm{I}11}}A_{\mathrm{I}}(s) - \frac{e_{\mathrm{II}15}}{\epsilon_{\mathrm{II}11}}A_{\mathrm{II}}(s)\right] + [B_{\mathrm{I}}(s) - B_{\mathrm{II}}(s)]\right\}\cos xs\,\mathrm{d}s =$$
$$\frac{e_{\mathrm{I}15}}{\epsilon_{\mathrm{I}11}}\tau_1 + \frac{e_{\mathrm{II}15}}{\epsilon_{\mathrm{II}11}}\tau_2 - \left(\frac{1}{\epsilon_{\mathrm{I}11}} + \frac{1}{\epsilon_{\mathrm{II}11}}\right)D^{\infty},\ |x| < a,\ y = 0 \tag{6-269b}$$

式(6-266)和(6-269)组成两对对偶积分方程，其解为

$$
\begin{aligned}
&A_{\mathrm{I}}(s)-A_{\mathrm{II}}(s)=(\pi a/2s)(\tau_1+\tau_2)J_1(as)\\
&(e_{\mathrm{I}15}/\epsilon_{\mathrm{I}11})A_{\mathrm{I}}(s)-(e_{\mathrm{II}15}/\epsilon_{\mathrm{II}11})A_{\mathrm{II}}(s)+B_{\mathrm{I}}(s)-B_{\mathrm{II}}(s)=\\
&\frac{\pi a}{2s}\left[\frac{e_{\mathrm{I}15}}{\epsilon_{\mathrm{I}11}}\tau_1+\frac{e_{\mathrm{II}15}}{\epsilon_{\mathrm{II}11}}\tau_2-\left(\frac{1}{\epsilon_{\mathrm{I}11}}+\frac{1}{\epsilon_{\mathrm{II}11}}\right)D^{\infty}\right]J_1(as)
\end{aligned}
\tag{6-270}
$$

由式(6－268)和(6－270)可求出 4 个待定量 $A_{\mathrm{I}}(s)$，$A_{\mathrm{II}}(s)$，$B_{\mathrm{I}}(s)$，$B_{\mathrm{II}}(s)$，从而问题已完全解决。在 x_1 轴上的广义应力和广义应力强度因子分别为

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{\mathrm{I}23}(x,\ 0^+)=\sigma_{\mathrm{II}23}(x,\ 0^-)=A(v)[(x/\sqrt{x^2-a^2})-1]\\
&D_{\mathrm{I}2}(x,\ 0^+)=D_{\mathrm{II}2}(x,\ 0^-)=B(v)[(x/\sqrt{x^2-a^2})-1]
\end{aligned}
\tag{6-271}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
&A(v)=C^*_{\mathrm{I}44}\alpha_{\mathrm{I}}\ \frac{\xi}{\eta}+\frac{\epsilon_{\mathrm{II}11}e_{\mathrm{I}15}}{\epsilon_{\mathrm{I}11}+\epsilon_{\mathrm{II}11}}\left[\left(\frac{e_{\mathrm{I}15}}{\epsilon_{\mathrm{I}11}}-\frac{e_{\mathrm{II}15}}{\epsilon_{\mathrm{II}11}}\right)\left(\tau_1-\frac{\xi}{\eta}\right)\right]-\frac{e_{\mathrm{I}15}}{\epsilon_{\mathrm{I}11}}D^{\infty}\\
&B(v)=D^{\infty}-\frac{\epsilon_{\mathrm{I}11}\epsilon_{\mathrm{II}11}}{\epsilon_{\mathrm{I}11}+\epsilon_{\mathrm{II}11}}\left(\frac{e_{\mathrm{I}15}}{\epsilon_{\mathrm{I}11}}-\frac{e_{\mathrm{II}15}}{\epsilon_{\mathrm{II}11}}\right)\left(\tau_1-\frac{\xi}{\eta}\right)
\end{aligned}
\tag{6-272a}
$$

$$
\begin{aligned}
&\eta=(C^*_{\mathrm{I}44}\alpha_{\mathrm{I}}+C^*_{\mathrm{II}44}\alpha_{\mathrm{II}})\left(1+\frac{\epsilon_{\mathrm{I}11}}{\epsilon_{\mathrm{II}1}}\right)-\left(\frac{e_{\mathrm{I}15}}{\epsilon_{\mathrm{I}11}}-\frac{e_{\mathrm{II}15}}{\epsilon_{\mathrm{II}11}}\right)^2\epsilon_{\mathrm{I}11}\\
&\xi=\frac{\epsilon_{\mathrm{I}11}+\epsilon_{\mathrm{II}11}}{\epsilon_{\mathrm{II}11}}\left[C^*_{\mathrm{II}44}\alpha_{\mathrm{II}}(\tau_1+\tau_2)+\left(\frac{e_{\mathrm{I}15}}{\epsilon_{\mathrm{I}11}}-\frac{e_{\mathrm{II}15}}{\epsilon_{\mathrm{II}11}}\right)\right]-\left(\frac{e_{\mathrm{I}15}}{\epsilon_{\mathrm{I}11}}-\frac{e_{\mathrm{II}15}}{\epsilon_{\mathrm{II}11}}\right)^2\tau_1\epsilon_{\mathrm{II}1}
\end{aligned}
\tag{6-272b}
$$

广义应力强度因子为

$$
\begin{aligned}
&K_{\mathrm{III}}=\lim_{x\to a}\sqrt{2\pi(x-a)}\,\sigma_{\mathrm{I}23}(x,\ 0^+)=\sqrt{\pi a}A(v)\\
&K_{\mathrm{D}}=\lim_{x\to a}\sqrt{2\pi(x-a)}\,D_{\mathrm{I}2}(x,\ 0^+)=\sqrt{\pi a}B(v)
\end{aligned}
\tag{6-273}
$$

由上述可知，广义应力强度因子明显依赖于裂纹运动速度。对于均匀压电材料有

$$
A(v)=\tau^{\infty},\quad K_{\mathrm{III}}=\sqrt{\pi a}\tau^{\infty};\quad B(v)=D^{\infty},\quad K_{\mathrm{D}}=\sqrt{\pi a}D^{\infty}
\tag{6-274}
$$

上述表示在均匀材料中，广义应力强度因子和裂纹运动速度无关。

Li 和 Mataga[92]研究了更为复杂的半无限的运动裂纹问题。

第7章

夹杂与奇点载荷的相互作用

7.1 等温压电体中的奇点载荷

7.1.1 均匀等温压电体中的广义奇点载荷

设在无限均匀的等温压电体中，在点 $z_0(x_{10}, x_{20})$ 处有一广义奇点载荷，广义奇点载荷指的是广义位错与广义集中力。广义位错指的是有一垂直 x_1x_2 平面的位错线，其广义位错矢量为 $\boldsymbol{b}(b_1, b_2, b_3, b_4)$，其中$(b_1, b_2, b_3)$为 Burgers(柏格斯)矢量，代表绕位错线一周后位移所获得的增量，b_4 为绕广义位错线一周后电势所获得的增量；广义集中力指的是 $\boldsymbol{p}(p_1, p_2, p_3, p_4)$，其中$(p_1, p_2, p_3)$是沿位错线方向单位厚度的集中力，$p_4$ 为点电荷，或电位移通量(图 7-1)。这一问题的解可设为

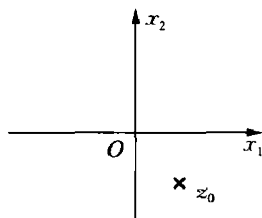


图 7-1 均匀等温压电体中的广义奇点载荷

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{f}_0(z_*) = \langle \ln(z_* - z_{0*})\rangle \boldsymbol{c}, \quad f_{0j}(z_j) = c_j \ln(z_j - z_{0j}) \\
&\boldsymbol{F}_0(z_j) = \boldsymbol{f}_0'(z_i) = \frac{1}{\langle z_* - z_{0*}\rangle}\boldsymbol{c}, \quad F_{0j}(z_j) = \frac{c_j}{z_j - z_{0j}}, \; z_{0j} = x_{01} + \mu_j x_{02}
\end{aligned} \tag{7-1}
$$

式中 $\boldsymbol{c}(c_1, c_2, c_3, c_4)$是待定复常数，$\langle \ln(z_* - z_{0*})\rangle = \langle \ln(z_j - z_{0j})\rangle = \mathrm{diag}[\ln(z_j - z_{0j})]$。显然 z_{0j}是 $f_j(z_j)$的分支点。为使其单值化，可取一从 z_{j0} 到 $-\infty$ 的单值分支割线，相角从 x_1 轴的正向算起。由第 4 章广义平面问题的通解的理论知，广义位移和广义应力函数可表为

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{U} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{f}_0(z_*) + \overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{f}}_0(\overline{z}_*), \quad U_i = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4} A_{ij} c_j \ln(z_j - z_{0j}) \\
&\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{f}_0(z_*) + \overline{\boldsymbol{B}}\,\overline{\boldsymbol{f}}_0(\overline{z}_*), \quad \Phi_i = 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{4} B_{ij} c_j \ln(z_j - z_{0j})
\end{aligned} \tag{7-2a}
$$

绕 z_0 一周后，广义位移和广义力应当获得给定的增量，即

$$
\boldsymbol{b} = \boldsymbol{U}^+ - \boldsymbol{U}^- = 2\pi\mathrm{i}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{c} - \overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{c}}), \quad \boldsymbol{p} = \boldsymbol{\Phi}^+ - \boldsymbol{\Phi}^- = 2\pi\mathrm{i}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{c} - \overline{\boldsymbol{B}}\,\overline{\boldsymbol{c}}) \tag{7-3}
$$

利用正交关系式(4-34)后，便得

$$
2\pi\begin{bmatrix} \boldsymbol{A} & \overline{\boldsymbol{A}} \\ \boldsymbol{B} & \overline{\boldsymbol{B}} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \mathrm{i}\boldsymbol{c} \\ -\mathrm{i}\,\overline{\boldsymbol{c}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{p} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \boldsymbol{c} \\ -\overline{\boldsymbol{c}} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\begin{bmatrix} \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} \\ \overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}} & \overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{p} \end{Bmatrix} \tag{7-4a}
$$

或直接由式(7-2a)和(7-3)解出 $\boldsymbol{c}$，再利用正交关系式(4-33)后，同样可得

$$c=\frac{1}{2\pi}[\boldsymbol{B}^{-1}(\boldsymbol{Y}+\overline{\boldsymbol{Y}})^{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{Y}^{-1}+\overline{\boldsymbol{Y}}^{-1})^{-1}\boldsymbol{p}]=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{q}=\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}$$

$$\boldsymbol{f}_0(z_*)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\langle\ln(z_*-z_{0*})\rangle\boldsymbol{q},\quad \boldsymbol{F}_0(z_j)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left\langle\frac{1}{z_*-z_{0*}}\right\rangle\boldsymbol{q} \tag{7-4b}$$

式(7-2)和(7-4)给出了无限介质中奇点载荷的解。利用式(4-33)和(4-34),可得

$$-\mathrm{i}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{Y}+\overline{\boldsymbol{Y}})=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}-\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{B}}^{-1})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{B})\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{B}}\,\overline{\boldsymbol{B}}^{-1}=\boldsymbol{I}$$

$$\mathrm{i}(\boldsymbol{Y}^{-1}+\overline{\boldsymbol{Y}}^{-1})\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\mathrm{i}(-\mathrm{i}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\mathrm{i}\,\overline{\boldsymbol{B}}\,\overline{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\overline{\boldsymbol{B}}\,\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I}$$

由此立即可证式(7-4b)中第一式。式(7-4)还可证明如下

$$2\pi\mathrm{i}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{c}-\overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{c}})=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p})+\overline{\boldsymbol{A}}(\overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}+\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p})=(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\overline{\boldsymbol{A}}\,\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{p}=\boldsymbol{b}$$

$$2\pi\mathrm{i}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{c}-\overline{\boldsymbol{B}}\,\overline{\boldsymbol{c}})=\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p})+\overline{\boldsymbol{B}}(\overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}+\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p})=(\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}+\overline{\boldsymbol{B}}\,\overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{b}+(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\overline{\boldsymbol{B}}\,\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{p}=\boldsymbol{p}$$

从而问题的解为

$$\boldsymbol{U}=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\mathrm{Re}[\boldsymbol{A}\langle\ln(z_*-z_{0*})\rangle\boldsymbol{q}],\quad \boldsymbol{\Phi}=\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\mathrm{Re}[\boldsymbol{B}\langle\ln(z_*-z_{0*})\rangle\boldsymbol{q}] \tag{7-2b}$$

7.1.2 双压电体中的广义奇点载荷

设材料Ⅰ占据上半平面 S^+,材料Ⅱ占据下半平面 S^-,$x=0$ 为界面,设在材料Ⅱ的点 $z_0(x_{10},\ x_{20})$ 处有一奇点载荷(图 7-2),首先在 z 平面上讨论。用上一节的结果,可令[93~95]

$$\boldsymbol{f}(z,\ z_0)=\begin{cases}\boldsymbol{f}_{\mathrm{I}}(z,\ z_0),\ z\in S^+\\ \boldsymbol{f}_{\mathrm{II}}(z,\ z_0)+\boldsymbol{f}_0(z,\ z_0),\ z\in S^-\end{cases} \tag{7-5}$$

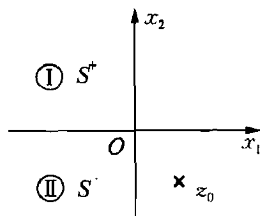


图 7-2 双压电体中的广义奇点载荷

式中 $\boldsymbol{f}_0(z,\ z_0)$ 表示均匀介质中奇点载荷的解,即把介质Ⅱ扩展到全平面时该奇点载荷的解,所以它在材料Ⅰ内是解析的。此时

$$\boldsymbol{f}_0(z)=\boldsymbol{c}\langle\ln(z-z_0)\rangle$$

$$\boldsymbol{c}=\frac{1}{2\pi}[\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}^{-1}(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{II}}+\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}})^{-1}\boldsymbol{b}-\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}^{-1}(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{II}}^{-1}+\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}^{-1})^{-1}\boldsymbol{p}]=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}(\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}) \tag{7-6}$$

以后为书写方便起见,把 $\boldsymbol{f}(z,\ z_0)$ 仍记为 $\boldsymbol{f}(z)$,省去参数 z_0。界面 $x_1=0$ 上面力连续的条件要求 $\Phi_{\mathrm{I}}=\Phi_{\mathrm{II}}$,或

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{f}_{\mathrm{I}}(x_1)+\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{f}_{\mathrm{I}}(x_1)}=\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}[\boldsymbol{f}_{\mathrm{II}}(x_1)+\boldsymbol{f}_0(x_1)]+\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}[\overline{\boldsymbol{f}_{\mathrm{II}}(x_1)}+\overline{\boldsymbol{f}_0(x_1)}],\ -\infty<x_1<\infty \tag{7-7a}$$

改写上式为

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{f}_{\mathrm{I}}(x_1)-\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\overline{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{II}}(x_1)-\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{f}_0(x_1)=\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{f}_{\mathrm{II}}(x_1)-\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{f}}_{\mathrm{I}}(x_1)+\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\overline{\boldsymbol{f}}_0(x_1),\ -\infty<x_1<\infty \tag{7-7b}$$

易于见到,上式等式的左边在 S^+ 是解析的,右边在 S^- 是解析的,而在 $x_1=0$ 上是连续的,因而在全平面解析,它只能是常数,该常数可以合并到待求的函数中;如在无穷远处没有应

力和电位移,故该常数为零,从而有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{f}_{\mathrm{I}}(z)-\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\overline{\boldsymbol{f}_{\mathrm{II}}}(z)-\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{f}_0(z)=\boldsymbol{0},\ z\in S^+\\&\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{f}_{\mathrm{II}}(z)-\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{f}_{\mathrm{I}}}(z)+\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\overline{\boldsymbol{f}_0}(z)=\boldsymbol{0},\ z\in S^-\end{aligned}\tag{7-8}$$

由界面上位移连续的条件,类似地可得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{f}_{\mathrm{I}}(z)-\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{II}}\overline{\boldsymbol{f}_{\mathrm{II}}}(z)-\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{f}_0(z)=\boldsymbol{0},\ z\in S^+\\&\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{f}_{\mathrm{II}}(z)-\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{f}_{\mathrm{I}}}(z)+\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{II}}\overline{\boldsymbol{f}_0}(z)=\boldsymbol{0},\ z\in S^-\end{aligned}\tag{7-9}$$

由以上两式解得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{f}_{\mathrm{I}}(z)=\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{H}^{-1}(\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}+\boldsymbol{Y}_{\mathrm{II}})\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{f}_0(z),\ z\in S^+\\&\boldsymbol{f}_{\mathrm{II}}(z)=\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}^{-1}\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}(\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}-\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}})\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\overline{\boldsymbol{f}_0}(z),\ z\in S^-\\&\boldsymbol{Y}=\mathrm{i}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1},\quad \boldsymbol{H}=\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}+\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}\end{aligned}\tag{7-10}$$

例如对于 $z\in S^-$ 的情形,上式可推导如下:由式(7-9)的第二式得

$$\overline{\boldsymbol{f}_{\mathrm{I}}}(z)=\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{f}_{\mathrm{II}}(z)+\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}^{-1}\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{II}}\overline{\boldsymbol{f}_0}(z)$$

把它代入式(7-8)的第二式,便得

$$(\boldsymbol{I}-\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}^{-1})\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{f}_{\mathrm{II}}(z)-(\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}^{-1}\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{II}}\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}^{-1}-\boldsymbol{I})\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\overline{\boldsymbol{f}_0}(z)=\boldsymbol{0}$$

或 $$\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}^{-1}(\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}^{-1}-\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}^{-1})\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{f}_{\mathrm{II}}(z)-\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}^{-1}(\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{II}}\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}^{-1}-\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}^{-1})\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\overline{\boldsymbol{f}_0}(z)=\boldsymbol{0}$$

上式可改写为

$$(\mathrm{i}\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}}+\mathrm{i}\boldsymbol{Y}_{\mathrm{II}})\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{f}_{\mathrm{II}}(z)-(\mathrm{i}\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}-\mathrm{i}\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}})\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\overline{\boldsymbol{f}_0}(z)=\boldsymbol{0}$$

化简后便得式(7-10)的第二式。式(7-10)的第一式可类似求得,从而压电介质中问题的解为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_{\mathrm{I}}&=2\mathrm{Re}[\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\langle\boldsymbol{f}_{\mathrm{I}}(z_*)\rangle]=2\mathrm{Re}[\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{H}^{-1}(\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}+\boldsymbol{Y}_{\mathrm{II}})\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\langle\ln(z_*-z_{0*})\rangle\boldsymbol{c}],\ z\in S^+\\\boldsymbol{U}_{\mathrm{II}}&=2\mathrm{Re}[\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\langle\boldsymbol{f}_{\mathrm{II}}(z_*)+\boldsymbol{f}_0(z_*)\rangle]=2\mathrm{Re}[\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}^{-1}\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}(\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}-\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}})\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\langle\ln(z_*-z_{0*})\rangle\overline{\boldsymbol{c}}]+\\&\qquad 2\mathrm{Re}[\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\langle\ln(z_*-z_{0*})\rangle\boldsymbol{c}],\ z\in S^-\end{aligned}\tag{7-11}$$

和

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{I}}&=2\mathrm{Re}[\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\langle\boldsymbol{f}_{\mathrm{I}}(z_*)\rangle]=2\mathrm{Re}[\boldsymbol{H}^{-1}(\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}+\boldsymbol{Y}_{\mathrm{II}})\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\langle\ln(z_*-z_{0*})\rangle\boldsymbol{c}],\ z\in S^+\\\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{II}}&=2\mathrm{Re}[\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\langle\boldsymbol{f}_{\mathrm{II}}(z_*)+\boldsymbol{f}_0(z_*)\rangle]=2\mathrm{Re}[\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}(\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}-\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}})\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\langle\ln(z_*-z_{0*})\rangle\overline{\boldsymbol{c}}]+\\&\qquad 2\mathrm{Re}[\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\langle\ln(z_*-z_{0*})\rangle\boldsymbol{c}],\ z\in S^-\end{aligned}\tag{7-12}$$

下面讨论三种特殊情形。

1) 半无限介质

设材料 I 不存在,当 $x_2=0$ 为自由平面时,有 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}=\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}=\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}=\boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{f}_{\mathrm{I}}(z_*)=\boldsymbol{0}$,记

$\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}=\boldsymbol{B}$, $\overline{\boldsymbol{H}}=\boldsymbol{Y}_{\mathrm{II}}=\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{f}_{\mathrm{II}}(z_*)=\boldsymbol{f}(z_*)$，从而由式(7-5)和(7-10)得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{f}(z_*, z_{0*}) &= \boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}^{-1}\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}(\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}-\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}})\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\overline{\boldsymbol{f}_0}(z_*)+\boldsymbol{f}_0(z_*, z_{0*}) \\
&= \boldsymbol{f}_0(z_*, z_{0*})+\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{Y}^{-1}\overline{\boldsymbol{Y}}\overline{\boldsymbol{B}}\overline{\boldsymbol{f}_0}(z_*) = \boldsymbol{f}_0(z_*, z_{0*})+ \\
&\quad \boldsymbol{B}^{-1}(\mathrm{i}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1})^{-1}(-\mathrm{i}\overline{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{B}}^{-1})\overline{\boldsymbol{B}}\overline{\boldsymbol{f}_0}(z_*) \\
&= \boldsymbol{f}_0(z_*, z_{0*})-\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}\overline{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{B}}^{-1}\overline{\boldsymbol{B}}\overline{\boldsymbol{f}_0}(z_*) = \boldsymbol{f}_0(z_*, z_{0*})-\boldsymbol{A}^{-1}\overline{\boldsymbol{A}}\overline{\boldsymbol{f}_0}(z_*)
\end{aligned}
\tag{7-13}
$$

2) **介质Ⅰ是刚性材料**

当 $x_2=0$ 为固定平面时，有 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}=\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}=\boldsymbol{H}_{\mathrm{I}}^*=\infty$, $\boldsymbol{f}_{\mathrm{I}}(z_*)=\boldsymbol{0}$，并记 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}=\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}=\boldsymbol{B}$, $\overline{\boldsymbol{H}}=\boldsymbol{Y}_{\mathrm{II}}=\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{f}_{\mathrm{II}}(z_*)=\boldsymbol{f}(z_*)$，从而由式(7-5)和(7-10)得

$$
\boldsymbol{f}(z_*, z_{0*})=\boldsymbol{f}_0(z_*, z_{0*})-\boldsymbol{B}^{-1}\overline{\boldsymbol{B}}\overline{\boldsymbol{f}}_0(z_*, z_{0*}) \tag{7-14}
$$

3) **奇点载荷在上半平面**

如在上半平面 S^+ 上的 z_0 点存在一强度为$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p})$的奇点载荷。我们将推求 $\boldsymbol{F}(z_*)=\boldsymbol{f}'(z_*)$ 的解，推求过程和上面一样，即寻求如下形式的解

$$
\boldsymbol{F}(z_*, z_{0*})=\begin{cases}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(z_*, z_{0*})+\boldsymbol{F}_{0\mathrm{I}}(z_*, z_{0*}), & z_*\in S^+ \\ \boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(z_*, z_{0*}), & z_*\in S^-\end{cases} \tag{7-15}
$$

式中

$$
\boldsymbol{F}_{0\mathrm{I}}(z_*, z_{0*})=\boldsymbol{c}_{\mathrm{I}}\left\langle\frac{1}{z_*-z_{0*}}\right\rangle,\ \boldsymbol{c}_{\mathrm{I}}=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}(\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}) \tag{7-16}
$$

类似于上面的推导易于得到问题的解，此时只需把式(7-10)中的下标Ⅰ和Ⅱ对换即可，不过这里换一种写法，以适应不同情况下的应用，即

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(z_*) &= (\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{II}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}-\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}})^{-1}(\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}^{-1}\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}-\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{II}}^{-1}\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}})\overline{\boldsymbol{F}}_{0\mathrm{I}}(z_*), & z_*\in S^+ \\
\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(z_*) &= (\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}-\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}})^{-1}(\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}-\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}})\boldsymbol{F}_{0\mathrm{I}}(z_*), & z_*\in S^-
\end{aligned}
\tag{7-17}
$$

7.1.3 双压电体界面上的广义奇点载荷[96, 97]

设双材料的界面为 $x_2=0$，在 x_{01}点处有一广义奇点载荷$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p})$。寻找下列形式的解

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{U}_\alpha &= 2\mathrm{Re}[\boldsymbol{A}_\alpha\langle\ln(z_{\alpha*}-x_{01})\rangle\boldsymbol{q}_\alpha],\ \boldsymbol{q}_\alpha=\frac{1}{\pi}(\boldsymbol{A}_\alpha^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l}_\alpha+\boldsymbol{B}_\alpha^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_\alpha) \\
\boldsymbol{\varPhi}_\alpha &= 2\mathrm{Re}[\boldsymbol{B}_\alpha\langle\ln(z_{\alpha*}-x_{01})\rangle\boldsymbol{q}_\alpha],\ \alpha=\mathrm{I},\ \mathrm{II}
\end{aligned}
\tag{7-18}
$$

式中 $\boldsymbol{g}_\alpha$, $\boldsymbol{l}_\alpha$ 为两个实矢量。从 x_{01}点到 $-\infty$作割线，则广义位移和广义力沿割线的间断条件为

$$
\boldsymbol{U}_{\mathrm{I}}(x_1, 0^+)-\boldsymbol{U}_{\mathrm{II}}(x_1, 0^-)=\boldsymbol{b},\ x_1<x_{01} \tag{7-19a}
$$

沿界面的广义应力连续性条件要求为

$$
\boldsymbol{\varPhi}_{\mathrm{I}}(x_1, 0^+)-\boldsymbol{\varPhi}_{\mathrm{II}}(x_1, 0^-)=\boldsymbol{p}\delta(x_{01}) \tag{7-19b}
$$

利用下述广义函数理论的结果，当 $\mathrm{Im}\,\mu>0$ 时，有

$$\lim_{x_2 \to \pm 0} \ln(x_1 + \mu x_2) = \ln|x_1| \pm i\pi H(x_1), \quad \lim_{x_2 \to \pm 0} \frac{1}{x_1 + \mu x_2} = \frac{1}{x_1} \mp i\pi\delta(x_1) \tag{7-20}$$

式中 $H(x_1)$为单位阶跃函数，$\delta(x_1)$为狄拉克(Dirac)函数，把式(7-18)代入式(7-19)，并应用式(7-20)和 4.2.3 节中的 A 和 B 的正交关系后，便得

$$\begin{aligned} \boldsymbol{b} = & \frac{2}{\pi}\mathrm{Re}\{[\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\langle \ln|x_1 - x_{01}| + i\pi H(x_1)\rangle(\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l}_{\mathrm{I}})] - \\ & [\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\langle \ln|x_1 - x_{01}| - i\pi H(x_1)\rangle(\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_{\mathrm{II}} + \boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l}_{\mathrm{II}})]\} = \\ & \frac{1}{\pi}\ln|x_1 - x_{01}|(\boldsymbol{g}_{\mathrm{I}} - \boldsymbol{g}_{\mathrm{II}}) + \boldsymbol{S}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{g}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{S}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{g}_{\mathrm{II}} + \boldsymbol{M}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{l}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{M}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{l}_{\mathrm{II}} \\ \boldsymbol{p}\delta(x_{01}) = & \frac{1}{\pi(x_1 - x_{01})}(\boldsymbol{l}_{\mathrm{I}} - \boldsymbol{l}_{\mathrm{II}}) + (\boldsymbol{S}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{S}_{\mathrm{II}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{l}_{\mathrm{II}} - \boldsymbol{L}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{g}_{\mathrm{I}} - \boldsymbol{L}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{g}_{\mathrm{II}}) \end{aligned} \tag{7-21}$$

式中的 $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{M}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 的表达式见式(4-35)，它们都是实数矩阵。由上式解得

$$\boldsymbol{g}_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{g}_{\mathrm{II}} = \boldsymbol{g}, \quad \boldsymbol{l}_{\mathrm{I}} = \boldsymbol{l}_{\mathrm{II}} = \boldsymbol{l}, \quad \begin{Bmatrix} \boldsymbol{l} \\ \boldsymbol{g} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_1 & \boldsymbol{\Omega}_2 \\ \boldsymbol{\Omega}_3 & \boldsymbol{\Omega}_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{p} \end{Bmatrix} \tag{7-22}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}_1 &= [(\boldsymbol{M}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{M}_{\mathrm{II}}) + (\boldsymbol{S}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{S}_{\mathrm{II}})(\boldsymbol{L}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{L}_{\mathrm{II}})^{-1}(\boldsymbol{S}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{S}_{\mathrm{II}})^{\mathrm{T}}]^{-1} \\ \boldsymbol{\Omega}_2 &= [(\boldsymbol{M}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{M}_{\mathrm{II}}) + (\boldsymbol{S}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{S}_{\mathrm{II}})(\boldsymbol{L}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{L}_{\mathrm{II}})^{-1}(\boldsymbol{S}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{S}_{\mathrm{II}})^{\mathrm{T}}](\boldsymbol{S}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{S}_{\mathrm{II}})(\boldsymbol{L}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{L}_{\mathrm{II}})^{-1} \\ \boldsymbol{\Omega}_3 &= [(\boldsymbol{L}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{L}_{\mathrm{II}}) + (\boldsymbol{S}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{S}_{\mathrm{II}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{M}_{\mathrm{II}})^{-1}(\boldsymbol{S}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{S}_{\mathrm{II}})]^{-1}(\boldsymbol{S}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{S}_{\mathrm{II}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{M}_{\mathrm{II}})^{-1} \\ \boldsymbol{\Omega}_4 &= -[(\boldsymbol{L}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{L}_{\mathrm{II}}) + (\boldsymbol{S}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{S}_{\mathrm{II}})^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{M}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{M}_{\mathrm{II}})^{-1}(\boldsymbol{S}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{S}_{\mathrm{II}})]^{-1} \end{aligned} \tag{7-23}$$

显然 $\boldsymbol{\Omega}_1$, $\boldsymbol{\Omega}_2$, $\boldsymbol{\Omega}_3$, $\boldsymbol{\Omega}_4$ 都是实数矩阵。把式(7-22)代入(7-18)，得

$$\boldsymbol{q}_\alpha = \boldsymbol{M}_\alpha \boldsymbol{b} + \boldsymbol{V}_\alpha \boldsymbol{p}, \quad \boldsymbol{M}_\alpha = \frac{1}{\pi}(\boldsymbol{A}_\alpha^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}_1 + \boldsymbol{B}_\alpha^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}_3), \quad \boldsymbol{V}_\alpha = \frac{1}{\pi}(\boldsymbol{A}_\alpha^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}_2 + \boldsymbol{B}_\alpha^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega}_4) \tag{7-24}$$

Zhou、Nishioka 和 Kuang[98]讨论了三层材料中的广义螺位错问题。

7.2 界面裂纹与奇点载荷的相互作用[9, 39, 95, 96, 97]

7.2.1 一般讨论

设材料Ⅰ占据上半平面 S^+，材料Ⅱ占据下半平面 S^-，$x=0$为界面，界面上$(-a, a)$存在一开路裂纹，记为 L_c，在上半平面 S^+ 上的 z_0 点存在一强度为$(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p})$的奇点载荷(注意图 7-2 上的奇点载荷位于下半平面)。裂纹面上无机械载荷，因而在裂纹面上有

$$\sigma_{2j}^+ = \sigma_{2j}^- = 0, \quad D_2^+ = D_2^-, \quad E_1^+ = E_1^-, \ x_1 \in L_c \tag{7-25}$$

在结合面上有

$$\sigma_{2j}^+ = \sigma_{2j}^-, \quad u_j^+ = u_j^-, \quad D_2^+ = D_2^-, \quad E_1^+ = E_1^-, \ x_1 \notin L_c \tag{7-26}$$

遵从前面的讨论，首先在 z 平面上研究问题，现在可设解为

$$\boldsymbol{F}_\alpha(z) = \boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(z)\delta_{\alpha\mathrm{I}} + \boldsymbol{F}_{\alpha 0}(z), \ \alpha = \mathrm{I}, \mathrm{II} \tag{7-27}$$

式中 $\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(z)$ 是奇点载荷作用在均匀无限材料Ⅰ中的解，它由式(7-16)表示，即

$$\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left(\frac{1}{z-z_0}\right)\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{q}=(\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}) \tag{7-28}$$

$\boldsymbol{F}_{\alpha 0}(z)$ 是在材料 α 中的解析函数，且在无穷远处为零，即在无穷远处没有广义载荷作用。由式(7-25)和(7-26)知，广义应力 $\boldsymbol{\Sigma}_2$ 在整个 x_1 轴上连续，所以有

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}0}(x_1)+\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\ \overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}0}(x_1)}+\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(x_1)+\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\ \overline{\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(x_1)}=\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}0}(x_1)+\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\ \overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}0}(x_1)} \tag{7-29a}$$

或

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}0}(x_1)-\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\ \overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}0}(x_1)}+\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\ \overline{\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(x_1)}=\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}0}(x_1)-\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\ \overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}0}(x_1)}-\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(x_1) \tag{7-29b}$$

上式中左边是某个在 S^+ 解析的函数的边值，右边是某个在 S^- 解析的函数的边值，在无穷远处又为零，所以恒为零，由此推出

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}0}(z)-\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\ \overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}0}}(z)+\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\ \overline{\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}}(z)=\boldsymbol{0},\ z\in S^+\\&\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}0}(z)-\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\ \overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}0}}(z)-\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(z)=\boldsymbol{0},\ z\in S^-\end{aligned} \tag{7-30}$$

7.2.2 化为 Riemann－Hilbert 问题[95]

按照式(6-1)和(7-30)，可得到(由于存在 $\boldsymbol{G}_{\mathrm{II}}(z)$，不能直接引用式(6-8))

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}(x_1)&=\boldsymbol{U}_{\mathrm{I}}(x_1)-\boldsymbol{U}_{\mathrm{II}}(x_1)=2\mathrm{Re}[\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{f}_{\mathrm{I}}(x_1)-\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{f}_{\mathrm{II}}(x_1)]\\ \mathrm{i}\boldsymbol{d}'(x_1)&=\boldsymbol{U}_{\mathrm{I},1}(x_1)-\boldsymbol{U}_{\mathrm{II},1}(x_1)=\\&\quad\boldsymbol{H}\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}0}+(\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}-\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}})\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\ \overline{\boldsymbol{G}}_{\mathrm{I}}-\overline{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}0}+(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}+\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}})\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}\end{aligned} \tag{7-31}$$

式中 $\boldsymbol{H}$，$\boldsymbol{Y}_\alpha$ 仍由式(6-9)表示。按式(7-31)，可通过结合面上的解析延拓，引入一个除裂纹外的在整个 z 平面上解析的函数 $\boldsymbol{h}(z)$

$$\boldsymbol{h}(z)=\begin{cases}\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}0}(z)+\boldsymbol{H}^{-1}(\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}-\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}})\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\ \overline{\boldsymbol{G}}_{\mathrm{I}}(z)\\ \boldsymbol{H}^{-1}\ \overline{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}0}(z)-\boldsymbol{H}^{-1}(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}+\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}})\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(z)\end{cases} \tag{7-32}$$

且有 $\boldsymbol{h}(\infty)=\boldsymbol{0}$，从而式(7-31)可以化为

$$\mathrm{i}\boldsymbol{d}'(x_1)=\boldsymbol{H}[\boldsymbol{h}^+(x_1)-\boldsymbol{h}^-(x_1)] \tag{7-33}$$

由式(7-26)知，电势在整个 x_1 轴上也是连续的，所以有

$$\boldsymbol{H}_4[\boldsymbol{h}^+(x_1)-\boldsymbol{h}^-(x_1)]=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{H}_4=[H_{41},H_{42},H_{43},H_{44}],\ |x_1|<\infty \tag{7-34}$$

注意到 $\boldsymbol{h}(\infty)=\boldsymbol{0}$，由上式解得

$$\boldsymbol{H}_4\boldsymbol{h}(z)=\boldsymbol{0} \tag{7-35}$$

在 x_1 轴上的广义应力可表为

$$\boldsymbol{\Sigma}(x_1) = \boldsymbol{B}_{\mathrm{I}} \boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1) + \overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}} \overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)} =$$
$$\boldsymbol{h}^{+}(x_1) + \overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{h}^{-}(x_1) + \overline{\boldsymbol{H}}^{-1}(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}} + \overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}})\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}} + \boldsymbol{H}^{-1}(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}} + \overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}})\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{G}}_{\mathrm{I}} \tag{7-36}$$

由式(7-25)知，在裂纹面上有 $\boldsymbol{\Sigma}(x_1) = D_2(x_1)\boldsymbol{i}_4$，$\boldsymbol{i}_4 = [0, 0, 0, 1]^{\mathrm{T}}$，其中 $D_2(x_1)$ 是待求的量，从而在裂纹面上有

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{h}^{+}(x_1) + \overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{h}^{-}(x_1) = \boldsymbol{\Sigma}'(x_1),\ x_1 \in L_c \\
&\boldsymbol{\Sigma}'(x_1) = D_2(x_1)\boldsymbol{i}_4 - \overline{\boldsymbol{H}}^{-1}(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}} + \overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}})\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(x_1) - \\
&\qquad \boldsymbol{H}^{-1}(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}} + \overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}})\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{G}}_{\mathrm{I}}(x_1)
\end{aligned} \tag{7-37}$$

7.2.3 问题的解

式(7-37)是标准的 Riemann-Hilbert 问题，可用解耦的方法求解。式(7-37)和(6-22)一致，但需用 $\boldsymbol{\Sigma}'(x_1)$ 代替那里的 $\boldsymbol{\Sigma}_0(x_1)$，其解由式(6-26)～(6-30)表示，即

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Psi}^{+}(x_1) - \boldsymbol{M}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\boldsymbol{\Psi}^{-}(x_1) = \boldsymbol{\Sigma}^{*}(x_1),\quad \boldsymbol{\Psi}(z) = \overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}(z),\quad \boldsymbol{\Sigma}^{*}(x_1) = \overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}'(x_1) \\
&\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega} = \langle \Lambda_j^2 \rangle,\quad \overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\,\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{\Omega} = -\boldsymbol{M} = \langle \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\varepsilon_*}\Lambda_j^2 \rangle
\end{aligned} \tag{7-38}$$

特别是对于归一化的本征矢量，有 $\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{I}$，$\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{\Omega}^{-1}$，上式又可写成

$$\boldsymbol{\Psi}^{+}(x_1) + \langle \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}\varepsilon_*} \rangle \boldsymbol{\Psi}^{-}(x_1) = \boldsymbol{\Sigma}^{*}(x_1),\quad \boldsymbol{\Psi}(z) = \boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{h}(z),\ \boldsymbol{\Sigma}^{*}(x_1) = \boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}'(x_1) \tag{7-39}$$

其解为

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Psi}(z) = \boldsymbol{Q}(z)\left[\boldsymbol{C}(z) + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{\boldsymbol{\Sigma}^{*}(x_1)\mathrm{d}t}{\boldsymbol{Q}^{+}(x_1)(x_1 - z)}\right],\ \boldsymbol{C}(z) = \boldsymbol{C}_1 z + \boldsymbol{C}_0 \\
&\boldsymbol{Q}(z) = \langle Y_0^{(i)}(z) \rangle,\ Y_0^{(i)}(z) = \frac{1}{\sqrt{z^2 - a^2}}\left(\frac{z+a}{z-a}\right)^{\mathrm{i}\varepsilon_i}
\end{aligned} \tag{7-40}$$

上式中的积分可按式(1-131)的公式积出，$\boldsymbol{C}_1$，$\boldsymbol{C}_0$ 可由无穷远处的条件和广义位移的单值性条件获得。由 $\boldsymbol{h}(\infty) = \boldsymbol{0}$ 推知 $\boldsymbol{\Psi}(\infty) = \boldsymbol{0}$，由广义位移的单值性条件推知 $\oint_{\Gamma^*} \boldsymbol{\Psi}(z)\mathrm{d}z = \boldsymbol{0}$，其中 Γ^* 为逆时针方向沿裂纹上下岸的闭围线，由此推出 $\boldsymbol{C}_1 = \boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{C}_0 = \boldsymbol{0}$。把积分积出后得

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Psi}(z) = &\left\langle \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_j}} \right\rangle [D_2(z)\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{i}_4 - \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(z) - \boldsymbol{M}_2\overline{\boldsymbol{G}}_{\mathrm{I}}(z)] + \\
&\left\langle \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_j}} \right\rangle \boldsymbol{Q}(z) \sum_{j=1}^{4} [\langle \boldsymbol{W}_j^{(1)} + \boldsymbol{I} \rangle \boldsymbol{M}_1\boldsymbol{q}_j + \langle \boldsymbol{W}_j^{(2)} + \boldsymbol{I} \rangle \boldsymbol{M}_2\overline{\boldsymbol{q}}_j] \\
\boldsymbol{M}_1 = &\ \boldsymbol{\Omega}^{-1}\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}} + \overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}})\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}},\ \boldsymbol{M}_2 = \boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{H}^{-1}(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}} + \overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}})\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}} \\
\boldsymbol{W}_j^{(1)} = &\left\langle \frac{1}{Y_0^{(i)}(z_{0i})(z - z_{0i})} \right\rangle,\ \boldsymbol{W}_j^{(2)} = \left\langle \frac{1}{Y_0^{(i)}(\overline{z}_{0i})(z - \overline{z}_{0i})} \right\rangle
\end{aligned} \tag{7-41}$$

由式(7-35)推知，$\boldsymbol{H}_4\boldsymbol{h}(z) = \boldsymbol{H}_4\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{\Psi}(z) = \boldsymbol{0}$，由此推出

$$D_2(z)=\frac{1}{\boldsymbol{M}_3}\boldsymbol{H}_4\boldsymbol{\Omega}\left\langle\frac{1}{1+e^{2\pi\varepsilon_j}}\right\rangle[\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(z)-\boldsymbol{M}_2\overline{\boldsymbol{G}}_{\mathrm{I}}(z)]\cdot$$

$$\frac{1}{\boldsymbol{M}_3}\boldsymbol{H}_4\boldsymbol{\Omega}\left\langle\frac{1}{1+e^{2\pi\varepsilon_j}}\right\rangle\boldsymbol{Q}(z)\sum_{j=1}^{4}[\langle\boldsymbol{W}_j^{(1)}+\boldsymbol{I}\rangle\boldsymbol{M}_1\boldsymbol{q}_j+\langle\boldsymbol{W}_j^{(2)}+\boldsymbol{I}\rangle\boldsymbol{M}_2\overline{\boldsymbol{q}}_j]\quad(7-42)$$

$$\boldsymbol{M}_3=\boldsymbol{H}_4\boldsymbol{\Omega}\left\langle\frac{1}{1+e^{2\pi\varepsilon_j}}\right\rangle\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{i}_4$$

把式(7-42)代入(7-41)，便得 $\boldsymbol{\Psi}(z)$的完全解，然后可进一步求 $\boldsymbol{F}_{\alpha0}(z)$。

7.2.4 界面裂纹前方作用广义奇点载荷[96,97]

图 7-3 示出一长 $2a$ 的中心界面裂纹，在右裂尖前方$(x_{01},0)$点存在广义奇点载荷$(\boldsymbol{b},\boldsymbol{p})$。此问题的解可由叠加法得到，即

$$\boldsymbol{u}_\alpha=\boldsymbol{u}_{\alpha d}+\boldsymbol{u}_{\alpha c},\quad \boldsymbol{\Phi}_\alpha=\boldsymbol{\Phi}_{\alpha d}+\boldsymbol{\Phi}_{\alpha c}\quad(7-43)$$

式中 $\boldsymbol{u}_{\alpha d}$，$\boldsymbol{\Phi}_{\alpha d}$ 是单独存在广义奇点载荷时的解，由式(7-18)和(7-24)表示。它在裂纹面上产生面力 $\boldsymbol{\Sigma}_{2d}$，$\boldsymbol{u}_{\alpha c}$，$\boldsymbol{\Phi}_{\alpha c}$ 是在没有奇点载荷，裂纹面上施加 $\boldsymbol{t}=-\boldsymbol{\Sigma}_{2d}$ 时的解。原问题的解便是这两个问题的解的叠加。利用 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 的正交关系，由式(7-18) 可推出在裂纹面上有

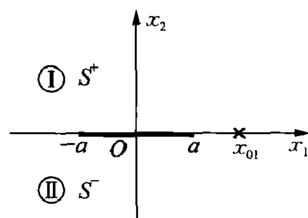


图 7-3 双压电体中的界面广义奇点载荷

$$\boldsymbol{t}=-\boldsymbol{\Sigma}_{2d}=-2\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{B}_\alpha\left\langle\frac{1}{x_1-x_{01}}\right\rangle\boldsymbol{q}_\alpha\right]=-(\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{q}_{\mathrm{I}}+\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{I}})\frac{1}{x_1-x_{01}}=-\frac{1}{x_1-x_{01}}\frac{\boldsymbol{l}}{\pi}\quad(7-44)$$

式中 $\boldsymbol{l}$ 由式(7-22)表示。双材料裂纹面上作用有面力 $\boldsymbol{t}$ 时的解由式(6-23)表示，由于无穷远处广义应力为零和广义位移的单值性条件，我们只需其中的特解部分，即

$$\boldsymbol{h}_c(z)=\boldsymbol{B}\boldsymbol{F}(z)=\frac{1}{2\pi i}\boldsymbol{P}(z)\int_L\frac{\boldsymbol{t}(x_1)\mathrm{d}x_1}{\boldsymbol{P}^+(x_1)(x_1-z)}=-\frac{1}{2\pi i}\boldsymbol{P}(z)\int_L\frac{[\boldsymbol{P}^+(x_1)]^{-1}\boldsymbol{l}\mathrm{d}x_1}{\pi(x_1-z)(x_1-x_{01})}=$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{z-x_{01}}\boldsymbol{P}(z)\left\{\int_L\frac{[\boldsymbol{P}^+(x_1)]^{-1}\boldsymbol{l}\mathrm{d}x_1}{\pi(x_1-x_{01})}-\int_L\frac{[\boldsymbol{P}^+(x_1)]^{-1}\boldsymbol{l}\mathrm{d}x_1}{\pi(x_1-z)}\right\}\quad(7-45)$$

$$\boldsymbol{P}(z)=\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{Q}(z),\ \boldsymbol{Q}(z)=\langle Y_0(z)\rangle,\ \boldsymbol{\Omega}=[\boldsymbol{\omega}^{(1)},\ \boldsymbol{\omega}^{(2)},\ \boldsymbol{\omega}^{(3)},\ \boldsymbol{\omega}^{(4)}]$$

$$Y_0(z)=\frac{1}{\sqrt{(z^2-a^2)}}\left(\frac{z-a}{z+a}\right)^{i\varepsilon_i},\ \boldsymbol{\omega}^{(i)}=[\omega_1^{(i)},\ \cdots,\ \omega_4^{(i)}]^{\mathrm{T}},\ i=1,2,3,4$$

积分后化简得

$$\boldsymbol{h}_c(z)=\frac{1}{z-x_{01}}(\boldsymbol{I}+\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H})^{-1}\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{Q}(z)\left\langle z-x_{01}-\frac{1}{Y_0(z)}+\frac{1}{Y_0(x_{01})}\right\rangle\boldsymbol{\Omega}^{-1}\frac{\boldsymbol{l}}{\pi}\quad(7-46)$$

式中 $\boldsymbol{H}$ 由式(6-9)表示。按式(6-34)和上式，裂尖前方结合面上的应力为

$$\boldsymbol{\Sigma}_{2c}(x_1)=\boldsymbol{h}_c^+(x_1)+\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{h}_c^-(x_1)=(\boldsymbol{I}+\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H})\boldsymbol{h}_c(x_1)=$$

$$\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{Q}(z)\left\langle 1-\frac{1}{Y_0(z)(x_1-x_{01})}+\frac{1}{Y_0(x_{01})(x_1-x_{01})}\right\rangle\boldsymbol{\Omega}^{-1}\frac{\boldsymbol{l}}{\pi}\quad(7-47)$$

裂尖广义应力强度因子只由应力 $\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1)=\boldsymbol{\Sigma}_{2c}(x_1)+\boldsymbol{\Sigma}_{2d}(x_1)$ 或 $\boldsymbol{\Sigma}_{2c}(x_1)$ 的奇异部分决定。所以按式(6-38)和上式，裂尖右方结合面上的广义应力强度因子为

$$\boldsymbol{K}=[K_{\mathrm{II}},K_{\mathrm{I}},K_{\mathrm{III}},K_{\mathrm{D}}]^{\mathrm{T}}=\lim_{x_1\to a}\sqrt{2\pi(x_1-a)}\boldsymbol{\Omega}\langle(x_1-a)^{-\mathrm{i}\varepsilon_*}\rangle\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1)=$$
$$\frac{1}{\sqrt{\pi a}}\boldsymbol{\Omega}\left\langle(2a)^{-\mathrm{i}\varepsilon_*}\left[1+\frac{1}{Y_0(x_{01})(a-x_{01})}\right]\right\rangle\boldsymbol{\Omega}^{-1}(\boldsymbol{\Omega}_1\boldsymbol{b}+\boldsymbol{\Omega}_2\boldsymbol{P})=\boldsymbol{W}_1\boldsymbol{b}+\boldsymbol{W}_2\boldsymbol{p}\tag{7-48}$$

一些文献中称 $\boldsymbol{W}_1$，$\boldsymbol{W}_2$ 为权函数矩阵。

7.3 共线刚性夹杂和奇点载荷的相互作用[99]

7.3.1 一般讨论

设材料Ⅰ占据上半平面 S^+，材料Ⅱ占据下半平面 S^-，$x=0$ 为界面，界面上存在几个刚性夹杂，刚性夹杂的左端点记为 a_j，右端点记为 b_j，其集合记为 L_c，在上半平面 S^+ 上的 z_0 点存在一强度为$(\boldsymbol{b},\boldsymbol{p})$的奇点载荷。在第 r 个夹杂上有

$$\begin{aligned}&u_{j,1}=\omega_r\delta_{j2},\quad E_{\mathrm{I}1}=E_{\mathrm{II}1}=E_{r1}=-\varphi_{r,1},\ x_1\in L_{cr}\\&D_{\mathrm{I}2}=D_{\mathrm{II}2}=D_2,\ -\infty<x_1<\infty\end{aligned}\tag{7-49}$$

式中 ω_r 为第 r 个夹杂相对于 x_3 轴的转角。周、赵和匡[99]详细地分析了这一问题。由式(7-2)和(7-4)知，无限介质中在 $z_0\in S^+$ 点存在$(\boldsymbol{b},\boldsymbol{p})$时的解为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{U}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{I},1}=\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(z)+\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(z)},\quad\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{G}}_{\mathrm{I},1}=\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(z)+\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(z)}\\&\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\left\langle\frac{1}{z-z_0}\right\rangle\boldsymbol{q},\ \boldsymbol{q}=(\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p})\end{aligned}\tag{7-50}$$

对于共线夹杂和奇点载荷相互作用时的解，可设

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{U}_{\alpha,1}=\boldsymbol{A}_\alpha\boldsymbol{F}_\alpha(z)+\boldsymbol{A}_\alpha\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(z)\delta_{\alpha\mathrm{I}}+\overline{\boldsymbol{A}}_\alpha\overline{\boldsymbol{F}_\alpha(z)}+\overline{\boldsymbol{A}}_\alpha\overline{\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(z)}\delta_{\alpha\mathrm{I}}\\&\boldsymbol{\Phi}_{\alpha,1}=\boldsymbol{B}_\alpha\boldsymbol{F}_\alpha(z)+\boldsymbol{B}_\alpha\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(z)\delta_{\alpha\mathrm{I}}+\overline{\boldsymbol{B}}_\alpha\overline{\boldsymbol{F}_\alpha(z)}+\overline{\boldsymbol{B}}_\alpha\overline{\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(z)}\delta_{\alpha\mathrm{I}}\end{aligned}\tag{7-51}$$

式中 $\alpha=\mathrm{I},\mathrm{II}$。由界面上广义位移连续的条件可得

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)+\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(x_1)+\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)}+\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(x_1)}=\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)+\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{II}}\overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)},\ -\infty<x_1<\infty$$

或改写为

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)+\overline{\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}}\,\overline{\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}}(x_1)-\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{II}}\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{II}}(x_1)=\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)-\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(x_1)-\overline{\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}}\,\overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}}(x_1)\tag{7-52}$$

上式左边是上半平面 S^+ 解析函数的边值，右边是下半平面 S^- 解析函数的边值，因此可解析延拓到全平面，从而是一常数矢量，且等于无穷远处的值 $\boldsymbol{\Delta}^\infty$。又因 $\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(\infty)=\boldsymbol{0}$，所以有

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)+\overline{\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}}\,\overline{\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}}(x_1)-\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{II}}\,\overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}}(x_1)=\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)-\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(x_1)-\overline{\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}}\,\overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}}(x_1)=\boldsymbol{\Delta}^{\infty}$$

$$\boldsymbol{\Delta}^{\infty}=\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}^{\infty}-\overline{\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}^{\infty}}=\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}^{\infty}-\overline{\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}^{\infty}}=\frac{1}{2}[(\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}^{\infty}+\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}^{\infty})-(\overline{\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}^{\infty}}+\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{II}}\,\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{II}}^{\infty})] \tag{7-53}$$

故 $\boldsymbol{\Delta}^{\infty}$ 为纯虚数。按式(6-48)引入符号

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{Y}_{\alpha}^{-1}=-\mathrm{i}\boldsymbol{B}_{\alpha}\boldsymbol{A}_{\alpha}^{-1},\quad \overline{\boldsymbol{Y}}_{\alpha}^{-1}=\mathrm{i}\overline{\boldsymbol{B}}_{\alpha}\overline{\boldsymbol{A}}_{\alpha}^{-1},\quad \boldsymbol{Y}_{\alpha}=\mathrm{i}\boldsymbol{A}_{\alpha}\boldsymbol{B}_{\alpha}^{-1},\quad \overline{\boldsymbol{Y}}_{\alpha}=-\mathrm{i}\overline{\boldsymbol{A}}_{\alpha}\overline{\boldsymbol{B}}_{\alpha}^{-1}\\&\boldsymbol{R}=\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}^{-1}+\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}^{-1}=-\mathrm{i}\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{-1}+\mathrm{i}\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{II}}^{-1},\quad \overline{\boldsymbol{R}}=-\mathrm{i}\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}^{-1}+\mathrm{i}\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}^{-1}\end{aligned} \tag{7-54}$$

则当 $x_1\in L$ 时，有

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{\Phi}_{,1}(x_1)&=\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{I},1}(x_1)-\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{II},1}(x_1)=\\&\{\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}[\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)+\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(x_1)]+\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}[\overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)}+\overline{\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(x_1)}]\}-\\&[\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)+\overline{\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)}]\end{aligned} \tag{7-55}$$

利用式(7-53)，式(7-55)可写成

$$\begin{aligned}\Delta\boldsymbol{\Phi}_{,1}(x_1)&=\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{I},1}(x_1)-\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{II},1}(x_1)=\\&\mathrm{i}[\boldsymbol{R}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)-\overline{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)-(\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}^{-1}-\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}}^{-1})\boldsymbol{\Delta}^{\infty}+\\&(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}^{-1}+\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}}^{-1})\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(x_1)+(\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}^{-1}-\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}}^{-1})\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(x_1)}]\end{aligned} \tag{7-56}$$

引入新的矢量函数

$$\boldsymbol{h}(z)=\begin{cases}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(z)+\boldsymbol{R}^{-1}(\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}^{-1}-\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}}^{-1})\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(x_1)},\ z\in S^{+}\\\boldsymbol{R}^{-1}\overline{\boldsymbol{R}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(z)+\boldsymbol{R}^{-1}(\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}^{-1}-\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}}^{-1})\boldsymbol{\Delta}^{\infty}-\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}^{-1}+\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}}^{-1})\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(x_1),\ z\in S^{-}\end{cases} \tag{7-57}$$

则 $\boldsymbol{h}(z)$ 是全平面解析的函数，在无穷远处等于 $\boldsymbol{h}(\infty)$。由上式推出

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(z)=\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{-1}[\boldsymbol{h}(z)-\boldsymbol{R}^{-1}(\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}^{-1}-\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}}^{-1})\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(x_1)}]\\&\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(z)=\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}^{-1}\overline{\boldsymbol{R}}^{-1}\boldsymbol{R}[\boldsymbol{h}(z)-\boldsymbol{R}^{-1}(\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}^{-1}-\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}}^{-1})\boldsymbol{\Delta}^{\infty}+\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}^{-1}+\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}}^{-1})\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(x_1)]\end{aligned} \tag{7-58}$$

当 $x_1\in L$ 时，按式(7-56)和(7-57)，又有

$$\Delta\boldsymbol{\Phi}_{,1}(x_1)=\mathrm{i}\boldsymbol{R}[\boldsymbol{h}^{+}(x_1)-\boldsymbol{h}^{-}(x_1)] \tag{7-59}$$

而当 $x_1\notin L$ 时，有 $\Delta\boldsymbol{\Phi}_{,1}(x_1)=\boldsymbol{0}$。由式(7-57)知，除在 L 上外，$\boldsymbol{h}(z)$ 是 z 平面上的解析函数。又因按式(7-49)，$D_2(x_1)$ 在整个 $x_1=0$ 上连续，所以有 $\Delta\Phi_{4,1}(x_1)=0$，或

$$\boldsymbol{R}_4[\boldsymbol{h}^{+}(x_1)-\boldsymbol{h}^{-}(x_1)]=0,\ -\infty<x_1<\infty \tag{7-60}$$

式中 $\boldsymbol{R}_4$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的第 4 行。上式的解为

$$\boldsymbol{R}_4\boldsymbol{h}(z)=\boldsymbol{R}_4\boldsymbol{h}^{\infty},\ \boldsymbol{h}^{\infty}=\boldsymbol{h}(\infty) \tag{7-61}$$

在界面上，广义位移沿 x_1 的导数可以表示为 $\boldsymbol{U}_{\alpha,1}(x_1)$，即有

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{U}_{\mathrm{I},1} &= \boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)+\overline{\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}}\ \overline{\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)}+\boldsymbol{A}_{\alpha}\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(x_1)+\overline{\boldsymbol{A}}_{\alpha}\overline{\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(x_1)} = \\
&\quad \boldsymbol{h}^{+}(x_1)+\overline{\boldsymbol{R}}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{h}^{-}(x_1)+\overline{\boldsymbol{R}}^{-1}(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}^{-1}+\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}}^{-1})\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(x_1)+ \\
&\quad \boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}^{-1}+\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}}^{-1})\overline{\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}}\ \overline{\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(x_1)}-\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{I}}^{\infty} \\
\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{I}}^{\infty} &= \overline{\boldsymbol{R}}^{-1}(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{II}}^{-1}+\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}^{-1})\boldsymbol{\Delta}^{\infty}
\end{aligned}
\tag{7-62}
$$

7.3.2 化为 Riemann－Hilbert 问题及其解

在夹杂表面，由式(7－49)知

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{U}_{\mathrm{I},1} = \omega(x_1)\boldsymbol{i}_2 - E_1(x_1)\boldsymbol{i}_4,\ \omega(x_1)=\omega_r,\ r=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ x_1\in L_r, \\
&\boldsymbol{i}_2 = [0,\ 1,\ 00]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{i}_4 = [0,\ 0,\ 0,\ 1]^{\mathrm{T}}
\end{aligned}
\tag{7-63}
$$

式中 $E_1(x_1)$为 $E_1(z)$在夹杂上的边值，是待求的函数。因此式(7－62)可化为

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{h}^{+}(x_1)+\overline{\boldsymbol{R}}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{h}^{-}(x_1) = \boldsymbol{N}(x_1),\ x_1\in L \\
&\boldsymbol{N}(x_1) = \boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{I}}^{\infty}+\omega(x_1)\boldsymbol{i}_2-E_1(x_1)\boldsymbol{i}_4-\overline{\boldsymbol{R}}^{-1}(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}^{-1}+\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}}^{-1})\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(x_1)- \\
&\qquad \boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}^{-1}+\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}}^{-1})\overline{\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}}\ \overline{\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(x_1)}
\end{aligned}
\tag{7-64}
$$

上式是一个矢量 Riemann－Hilbert 问题，形式上和式(6－57)相同。和式(7－64)相应的齐次方程的基本解仍如式(6－63)所示。非齐次方程式(7－64)的解的形式仍为式(6－66)，但需用 $\boldsymbol{N}(x_1)$替换其中的被积函数 $\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{I}}^{\infty}+\omega(x_1)\boldsymbol{i}_2-E_1(x_1)\boldsymbol{i}_4$，即式(7－64) 的解为

$$
\begin{aligned}
&\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}(z) = \boldsymbol{Q}(z)\boldsymbol{C}(z)+\frac{\boldsymbol{Q}(z)}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}(x_1)}{\boldsymbol{Q}^{+}(x_1)(x_1-z)}\mathrm{d}x_1 \\
&\boldsymbol{Q}(z) = \langle Y_0^{(i)}(z)\rangle,\quad Y_0^{(i)}(z) = \prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(z-a_k)(z-b_k)}}\left(\frac{z-b_k}{z-a_k}\right)^{\mathrm{i}\varepsilon_i} \\
&C^{(i)}(z) = C_n^{(i)}z^n+C_{n-1}^{(i)}z^{n-1}+\cdots+C_1^{(i)}z+C_0^{(i)}
\end{aligned}
\tag{7-65}
$$

积出积分项，再利用了公式 $\boldsymbol{A}_{\alpha}\boldsymbol{A}_{\alpha}^{\mathrm{T}}+\overline{\boldsymbol{A}}_{\alpha}\overline{\boldsymbol{A}}_{\alpha}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{0}$，便得

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{h}(z) = \boldsymbol{\Omega}<\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_i}}>\{\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{I}}^{\infty}+\omega_r\boldsymbol{i}_2-E_1(z)\boldsymbol{i}_4]+\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}(z)+\boldsymbol{Q}(z)\boldsymbol{C}(z)\} \\
&\boldsymbol{Z}(z) = \sum_{j=1}^{4}\left[-\mathrm{i}\left\langle\frac{Y_0^{(i)-1}(z_{0j})Y_0^{(i)}(z)}{z-z_{0j}}+Y_0^{(i)}(z)-\frac{1}{z-z_{0j}}\right\rangle\overline{\boldsymbol{R}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_j\boldsymbol{q}+\right. \\
&\qquad \left.\mathrm{i}\left\langle\frac{Y_0^{(i)-1}(\overline{z}_{0j})Y_0^{(i)}(z)}{z-\overline{z}_{0j}}+Y_0^{(i)}(z)-\frac{1}{z-\overline{z}_{0j}}\right\rangle\boldsymbol{R}^{-1}\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_j\overline{\boldsymbol{q}}\right]
\end{aligned}
\tag{7-66}
$$

式中 $\boldsymbol{I}_j=\langle\delta_{ij}\rangle$，$\langle\delta_{ij}\rangle$是只有 $i=j$ 的一个不为零的单元素对角阵。在上式的积分过程中出现的一些多项式已经和式(7－65)中的多项式合并。

设无穷远处给定 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\infty}=[\varepsilon_{11}^{\infty},\ \varepsilon_{12}^{\infty}+w^{\infty},\ \varepsilon_{13}^{\infty}+w_3^{\infty},\ -E_1^{\infty}]$。注意到在裂纹面上 $\boldsymbol{h}^{+}(x_1)=\boldsymbol{h}^{-}(x_1)$ 和 $\boldsymbol{h}^{+}(\infty)=\boldsymbol{h}^{-}(\infty)$，利用式(7－62) 和无穷远处的边界条件，可得

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{U}_{\mathrm{I},1}(\infty) = [\varepsilon_{11}^{\infty},\ \varepsilon_{12}^{\infty}+w^{\infty},\ \varepsilon_{13}^{\infty}+w_3^{\infty},\ -E_1^{\infty}] = \boldsymbol{\varepsilon}^{\infty} = \boldsymbol{h}^{+}(\infty)+\overline{\boldsymbol{R}}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{h}^{-}(\infty)-\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{I}}^{\infty} \\
&\boldsymbol{h}(\infty) = \boldsymbol{\Omega}\left\langle\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_i}}\right\rangle\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\varepsilon}^{\infty}+\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{I}}^{\infty})
\end{aligned}
\tag{7-67}
$$

又由公式(7－61)，得到电场分布为

$$E_1(z)=\frac{\hat{R}_4\{(\omega_r i_2-\varepsilon^{\infty})+[Z(z)+\Omega Q(z)C(z)]\}}{\hat{R}_{44}},\ \hat{R}_4=R_4\,\Omega\left\langle\frac{1}{1+e^{2\pi\varepsilon_i}}\right\rangle\bar{\Omega}^{\mathrm{T}}\tag{7-68}$$

7.3.3 另一种解法

把式(7－55)改写成

$$\Delta\Phi_{,1}(x_1)=\mathrm{i}R[A_{\mathrm{I}}F_{\mathrm{I}}(x_1)-R^{-1}\bar{R}A_{\mathrm{II}}F_{\mathrm{II}}(x_1)-R^{-1}(\bar{Y}_{\mathrm{II}}^{-1}-\bar{Y}_{\mathrm{I}}^{-1})\Delta^{\infty}]+\\ [B_{\mathrm{I}}G_{\mathrm{I}}(x_1)+\bar{B}_{\mathrm{I}}\overline{G_{\mathrm{I}}(x_1)}]\tag{7-69}$$

引入新的矢量函数

$$h(z)=\begin{cases}A_{\mathrm{I}}F_{\mathrm{I}}(z),\ z\in S^{+}\\ R^{-1}\bar{R}A_{\mathrm{II}}F_{\mathrm{II}}(z)+R^{-1}(\bar{Y}_{\mathrm{II}}^{-1}-\bar{Y}_{\mathrm{I}}^{-1})\Delta^{\infty},\ z\in S^{-}\end{cases}\tag{7-70}$$

则 $h(z)$ 是全平面解析的函数，在无穷远处等于 $h(\infty)$。由上式推出

$$F_{\mathrm{I}}(z)=A_{\mathrm{I}}^{-1}h(z),\quad F_{\mathrm{II}}(z)=A_{\mathrm{II}}^{-1}\bar{R}^{-1}R[h(z)-R^{-1}(\bar{Y}_{\mathrm{II}}^{-1}-\bar{Y}_{\mathrm{I}}^{-1})\Delta^{\infty}]\tag{7-71}$$

当 $x_1\in L$ 时，又有

$$\Delta\Phi_{,1}(x_1)=\mathrm{i}R[h^{+}(x_1)-h^{-}(x_1)]+[B_{\mathrm{I}}G_{\mathrm{I}}(x_1)+\bar{B}_{\mathrm{I}}\overline{G_{\mathrm{I}}(x_1)}]\tag{7-72}$$

而当 $x_1\notin L$，有 $\Delta\Phi_{,1}(x_1)=\mathbf{0}$，由式(7－70)知，除在 L 上外，$h(z)$ 是 z 平面上的解析函数。又由式(84)知，$D_2(x_1)$ 在整个 $x_1=0$ 上连续，所以有 $\Delta\Phi_{4,1}(x_1)=0$，或

$$\mathrm{i}R_4[h^{+}(x_1)-h^{-}(x_1)]=-[B_{\mathrm{I}4}G_{\mathrm{I}}(x_1)+\bar{B}_{\mathrm{I}4}\overline{G_{\mathrm{I}}(x_1)}],\ -\infty<x_1<\infty\\ R_4=[R_{41},R_{42},R_{43},R_{44}],\ B_{\mathrm{I}4}=[B_{41},B_{42},B_{43},B_{44}]\tag{7-73}$$

式中 R_4 是 R 的第 4 行，$B_{\mathrm{I}4}$ 是 B_{I} 的第 4 行。上式的解为

$$R_4h(z)=\frac{1}{2\pi}\int_L\frac{[B_{\mathrm{I}4}G_{\mathrm{I}}(x_1)+\bar{B}_{\mathrm{I}4}\overline{G_{\mathrm{I}}(x_1)}]}{x_1-z}\mathrm{d}x_1+R_4h(\infty)\tag{7-74}$$

类似地有

$$U_{\mathrm{I},1}(x_1)=A_{\mathrm{I}}F_{\mathrm{I}}(x_1)+\overline{A_{\mathrm{I}}F_{\mathrm{I}}}(x_1)+A_{\mathrm{I}}G_{\mathrm{I}}(x_1)+\bar{A}_{\mathrm{I}}\overline{G_{\mathrm{I}}}(x_1)=\\ h^{+}(x_1)+\bar{R}^{-1}Rh^{-}(x_1)-\Delta_{\mathrm{I}}^{\infty}+A_{\mathrm{I}}G_{\mathrm{I}}(x_1)+\bar{A}_{\mathrm{I}}\overline{G_{\mathrm{I}}}(x_1)\tag{7-75}$$

$$\Delta_{\mathrm{I}}^{\infty}=\bar{R}^{-1}(Y_{\mathrm{II}}^{-1}+\bar{Y}_{\mathrm{II}}^{-1})\Delta^{\infty}$$

在夹杂表面，由式(7－49)知

$$U_{\mathrm{I},1}=\omega(x_1)i_2-E_1(x_1)i_4,\ \omega(x_1)=\omega_r,\ r=1,2,\cdots,n,\ x_1\in L_r\\ i_2=[0,1,00]^{\mathrm{T}},\ i_4=[0,0,0,1]^{\mathrm{T}}\tag{7-76}$$

式中 $E_1(x_1)$ 为 $E_1(z)$ 在夹杂上的边值，是待求的函数。因此式(7－63)可化为

$$\boldsymbol{h}^{+}(x_1)+\overline{\boldsymbol{R}}^{-1}\boldsymbol{R}\boldsymbol{h}^{-}(x_1)=$$
$$\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{I}}^{\infty}+\omega(x_1)\boldsymbol{i}_2-E_1(x_1)\boldsymbol{i}_4-\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(x_1)-\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}}(x_1),\ x_1\in L \tag{7-77}$$

上式是一个矢量方程,形式和式(6-57)相同。非齐次方程式(7-77)的解仍为式(6-66),只需把那里的被积函数 $\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{I}}^{\infty}+\omega(x_1)\boldsymbol{i}_2-E_1(x_1)\boldsymbol{i}_4$ 换为

$$\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{I}}^{\infty}+\omega(x_1)\boldsymbol{i}_2-E_1(x_1)\boldsymbol{i}_4-\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(x_1)-\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}}(x_1)$$

其余的讨论完全类似于那里的情形。

7.3.4 无振荡解

当 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}^{-1}+\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}^{-1}=\overline{\boldsymbol{R}}$ 为实矩阵时,无振荡解。利用关系式(4-36)中的 $\boldsymbol{Y}^{-1}=\boldsymbol{M}^{-1}+\mathrm{i}\boldsymbol{M}^{-1}\boldsymbol{S}$,和 $\boldsymbol{M}$,$\boldsymbol{S}$ 是实阵,便可推出

$$\boldsymbol{Y}_{\alpha}^{-1}+\overline{\boldsymbol{Y}}_{\alpha}^{-1}=\boldsymbol{M}_{\alpha}^{-1}+\mathrm{i}\boldsymbol{M}_{\alpha}^{-1}\boldsymbol{S}_{\alpha}+\boldsymbol{M}_{\alpha}^{-1}-\mathrm{i}\,\overline{\boldsymbol{M}}_{\alpha}^{-1}\overline{\boldsymbol{S}}_{\alpha}=2\boldsymbol{M}_{\alpha}^{-1}=-\mathrm{i}\boldsymbol{A}_{\alpha}^{-T}\boldsymbol{A}_{\alpha}^{-1},\ \boldsymbol{M}_{\alpha}=2\mathrm{i}\boldsymbol{A}_{\alpha}\boldsymbol{A}_{\alpha}^{\mathrm{T}}$$

从而式(7-64)化为

$$\boldsymbol{h}^{+}(x_1)+\boldsymbol{h}^{-}(x_1)=\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{I}}^{\infty}+\omega(x_1)\boldsymbol{i}_2-E_1(x_1)\boldsymbol{i}_4-2\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{M}_{\mathrm{I}}^{-1}[\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(x_1)+\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{G}}_{\mathrm{I}}(x_1)] \tag{7-78}$$

此时的解无振荡。式(7-78)的解可由式(7-66)~(7-68)得到

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{h}(z)&=\frac{1}{2}[\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{I}}^{\infty}+\omega_r\boldsymbol{i}_2-E_1(z)\boldsymbol{i}_4]+\boldsymbol{Z}(z)+\boldsymbol{Q}(z)\boldsymbol{C}'(z)\\
\boldsymbol{Z}(z)&=-\mathrm{i}\left\langle\frac{Y_0^{(i)-1}(z_{0j})Y_0^{(i)}(z)}{z-z_{0j}}+Y_0^{(i)}(z)-\frac{1}{z-z_{0j}}\right\rangle\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_j\boldsymbol{q}+\\
&\quad\mathrm{i}\left\langle\frac{Y_0^{(i)-1}(\overline{z}_{0j})Y_0^{(i)}(z)}{z-\overline{z}_{0j}}+Y_0^{(i)}(z)-\frac{1}{z-\overline{z}_{0j}}\right\rangle\boldsymbol{R}^{-1}\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_j\overline{\boldsymbol{q}}
\end{aligned} \tag{7-79}$$

且 $\quad\boldsymbol{Q}(z)=\langle Y_0^{(i)}(z)\rangle=Y_0(z)\boldsymbol{I},\ Y_0^{(i)}(z)=Y_0(z)=\prod_{j=1}^{n}(z-a_j)^{-1/2}(z-b_j)^{-1/2}$

和

$$E_1(z)=(\boldsymbol{R}_4/R_{44})\{(\omega_r\boldsymbol{i}_2-\boldsymbol{\varepsilon}^{\infty})+2[\boldsymbol{Z}(z)+Y_0(z)\boldsymbol{C}'(z)]\} \tag{7-80}$$

下面较为详细地讨论单个线性夹杂的情况。对于无穷远处 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\infty}=\boldsymbol{0}$ 的位于 x_1 轴上$(-a,a)$的单个线性夹杂,有

$$\boldsymbol{Q}(z)=Y_0(z)\boldsymbol{I},\ Y_0(z)=(z^2-a^2)^{1/2},\quad \boldsymbol{C}(z)=\boldsymbol{C}_1z+\boldsymbol{C}_0,\quad \boldsymbol{\Delta}^{\infty}=\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{I}}^{\infty} \tag{7-81}$$

以此代入式(7-80)和(7-79)并记 $\omega_r=\omega$,便得

$$\begin{aligned}
E_1(z)&=(\boldsymbol{R}_4/R_{44})\{\omega\boldsymbol{i}_2+2[\boldsymbol{Z}(z)+Y_0(z)\boldsymbol{C}(z)]\}\\
\boldsymbol{h}(z)&=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{W})\left[\boldsymbol{Z}(z)+\frac{\boldsymbol{C}_1z+\boldsymbol{C}_0}{\sqrt{z^2-a^2}}+\frac{1}{2}\omega\boldsymbol{i}_2\right]\\
\boldsymbol{W}_{i\alpha}&=0,\quad \boldsymbol{W}_{4\alpha}=\hat{R}_{4\alpha}/\hat{R}_{44},\ i=1,2,3,\ \alpha=1,2,3,4
\end{aligned} \tag{7-82}$$

当 $z\to\infty$ 时,$\boldsymbol{h}(z)\to\boldsymbol{h}(\infty)=\boldsymbol{\Delta}^{\infty}/2$,从而由上式导出 $\boldsymbol{C}_1=-\omega\boldsymbol{i}_2/2$。常数 $\boldsymbol{C}_0$,ω 由下列刚性夹

杂上的力学平衡条件和电场无旋条件得到

$$\int_{-a}^{a}\Delta\boldsymbol{\Phi}_{,1}\mathrm{d}x_1=\boldsymbol{0},\quad \int_{-a}^{a}\Delta\Phi_{2,1}(x_1-x_0)\mathrm{d}x_1=0 \tag{7-83}$$

进一步设无穷远处无外加荷载，即 $\boldsymbol{\varepsilon}^{\infty}=\boldsymbol{0}$，求解上式便得

$$\boldsymbol{C}_0=\boldsymbol{0},\quad \omega=-\frac{8\boldsymbol{R}_2R_{44}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{W})}{a^2(R_{22}R_{44}-R_{24}R_{42})}\mathrm{Re}(\langle\sqrt{z_{0j}^2-a^2}-z_{0j}\rangle\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_j\boldsymbol{q}) \tag{7-84}$$

在除裂纹外的 x_1 轴上的面力 $\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1)$ 为

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1)=2\mathrm{Re}[\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}(x_1)]=-2\mathrm{Im}[\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{h}(x_1)]\\
&\boldsymbol{h}(x_1)=(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{W})\left[\boldsymbol{Z}(x_1)-\frac{1}{2}\left(\frac{\omega z}{\sqrt{z^2-a^2}}-\omega\right)\boldsymbol{i}_2\right]\\
&\sqrt{x_1-a}\boldsymbol{Z}(a)=\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{2a}}\left\langle\sqrt{\frac{z_{0j}+a}{z_{0j}-a}}-1\right\rangle\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_j\boldsymbol{q}-\frac{\mathrm{i}}{2\sqrt{2a}}\left\langle\sqrt{\frac{\bar{z}_{0j}+a}{\bar{z}_{0j}-a}}-1\right\rangle\boldsymbol{R}^{-1}\bar{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_j\bar{\boldsymbol{q}}\\
&\frac{1}{2}\sqrt{x_1-a}\frac{\omega z}{\sqrt{z^2-a^2}}\boldsymbol{i}_2=\frac{1}{2}\frac{\omega a}{\sqrt{2a}}\boldsymbol{i}_2=\frac{1}{2\sqrt{2}}\omega\sqrt{a}\boldsymbol{i}_2
\end{aligned} \tag{7-85}$$

所以 $x_1=a$ 处的应力强度因子为

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x_1-a}\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1)=2\sqrt{x_1-a}\mathrm{Im}[\mathrm{i}\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{h}(x_1)]=2\sqrt{x_1-a}\mathrm{Re}[\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{h}(x_1)]=\\
&2\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{W})\left[-\sqrt{\frac{1}{2a}}\mathrm{Im}\left(\left\langle\sqrt{\frac{z_{0j}+a}{z_{0j}-a}}-1\right\rangle\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_j\boldsymbol{q}\right)+\frac{1}{2\sqrt{2}}\omega\sqrt{a}\boldsymbol{i}_2\right]\right\}\\
&\boldsymbol{K}=\lim_{x\to a}\sqrt{2\pi(x_1-a)}\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1)=\\
&\quad 2\sqrt{\frac{\pi}{a}}\mathrm{Re}\left\{\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{W})\left[-\mathrm{Im}\left(\left\langle\sqrt{\frac{z_{0j}+a}{z_{0j}-a}}-1\right\rangle\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{-\mathrm{T}}\boldsymbol{I}_j\boldsymbol{q}\right)+\frac{1}{2}\omega a\boldsymbol{i}_2\right]\right\}
\end{aligned} \tag{7-86}$$

为了研究刚性夹杂附近位错的稳定性，需要讨论作用在位错上的镜像力，单位长度上的镜像力等于相互作用能的负梯度，即

$$F_{x_1}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_2(z_0)=-2\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\mathrm{Im}[\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{h}(z_0)],\quad F_{x_2}=\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_1(z_0)=2\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\mathrm{Re}[\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\langle\mu_*\rangle\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{h}(z_0)] \tag{7-87}$$

对均匀介质，有 $\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}=\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}=\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}=\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}=\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}^{-1}=\boldsymbol{Y}_{\mathrm{II}}^{-1}=\boldsymbol{Y}^{-1}=-\mathrm{i}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}$，$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{Y}^{-1}+\bar{\boldsymbol{Y}}^{-1}=\bar{\boldsymbol{R}}$，从而 $\boldsymbol{R}=\boldsymbol{Y}^{-1}+\bar{\boldsymbol{Y}}^{-1}=2\boldsymbol{M}^{-1}$，$2\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{M}^{-1}=\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{A}^{-\mathrm{T}}=\mathrm{i}\boldsymbol{A}$。

7.3.5 共线刚性传导(或导通)夹杂

对于共线刚性传导夹杂和奇点载荷的相互作用，讨论和上面相仿，只是边界条件需改为

$$\begin{aligned}
&u_{j,1}=w_r\delta_{j2},\quad E_{\mathrm{I}1}=E_{\mathrm{II}1}=0,\ x_1\in L_{cr}\\
&D_{\mathrm{I}2}=D_{\mathrm{II}2}=D_2,\ -\infty<x_1<\infty
\end{aligned} \tag{7-88}$$

由于在 L_{cr} 上 $E_{\mathrm{I}1}=E_{\mathrm{II}1}=0$，所以在式(7-63)中 $E_{\mathrm{I}}=0$，从而式(7-63)中的 $\boldsymbol{N}(x_1)$ 化为

$$\boldsymbol{h}^{+}(x_1)+\overline{\boldsymbol{Y}}^{-1}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{h}^{-}(x_1)=\boldsymbol{N}(x_1),\ x_1\in L$$

$$\boldsymbol{N}(x_1)=\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{I}}^{\infty}+\omega(x_1)\boldsymbol{i}_2-\overline{\boldsymbol{R}}^{-1}(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}^{-1}+\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}}^{-1})\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(x_1)-\boldsymbol{R}^{-1}(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}^{-1}+\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}}^{-1})\overline{\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}}\ \overline{\boldsymbol{G}_{\mathrm{I}}(x_1)} \tag{7-89}$$

问题的解为

$$\boldsymbol{h}(z)=\boldsymbol{\Omega}\left\langle\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_*}}\right\rangle[\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\Delta}_{\mathrm{I}}^{\infty}+\omega_r\boldsymbol{i}_2)+\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Z}(z)+\boldsymbol{Q}(z)\boldsymbol{C}(z)] \tag{7-90}$$

7.3.6 含单个刚性夹杂的均匀材料的数字例题

本节讨论含单个刚性夹杂的均匀材料 PZT-4,刚性夹杂位于$(-a,\ a)$,广义压电位错 $\boldsymbol{b}$ 和 x_1 轴成45°。材料常数取见5.3.6节的数字例题,但要注意,本节的 x_2, x_3 轴是那里的 x_3, x_2 轴。图7-4、图7-5、图7-6分别表示位错$(b_1,\ 0,\ 0,\ 0)$、$(0,\ b_2,\ 0,\ 0)$和电位错$(0,\ 0,\ 0,\ b_4)$沿径向 r 变化时,刚性夹杂端部广义应力强度因子 K_i 的变化。传导夹杂的 K_{I} 和 K_{D} 与非传导夹杂的一致。

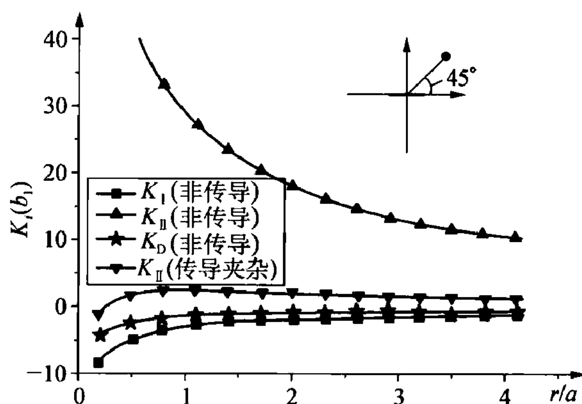


图7-4 位错$(b_1,\ 0,\ 0,\ 0)$沿径向 r/a 变化时,应力强度因子 K_i 的变化

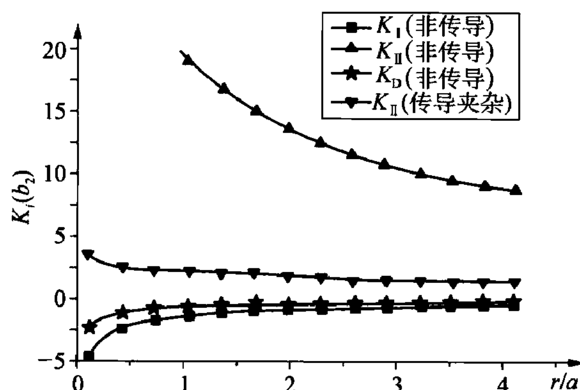


图7-5 位错$(0,\ b_2,\ 0,\ 0)$沿径向 r/a 变化时,应力强度因子 K_i 的变化

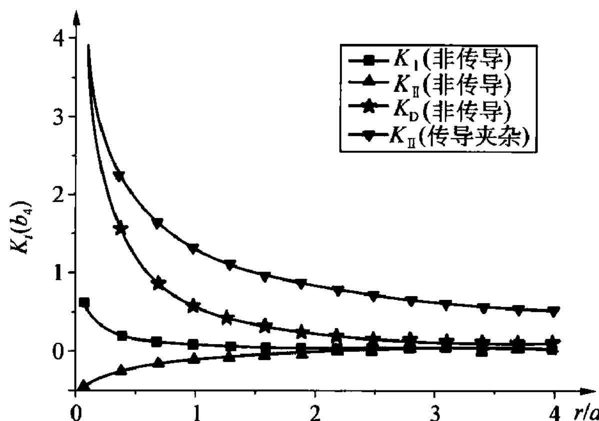


图7-6 电位错$(0,\ 0,\ 0,\ b_4)$沿径向 r/a 变化时,应力强度因子 K_i 的变化

7.4 椭圆夹杂与奇点载荷的相互作用

7.4.1 奇点载荷位于椭圆夹杂外部

图 7-7 表示一无限基体Ⅱ，占据区域 S^-，其中有一长短轴分别为 $2a$ 和 $2b$ 的椭圆形夹杂Ⅰ，占据区域 S^+，坐标原点取在夹杂中心，直角坐标为 (x_1, x_2)，极坐标为 (r, θ)；在 z_0 $(x_{01}+\mathrm{i}x_{02})$ 处作用有奇点载荷 $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{p})$（图 7-7）。Huang 和 Kuang[100] 详细研究了这一问题。两者界面设为理想界面，记为 L，其上的边界条件为

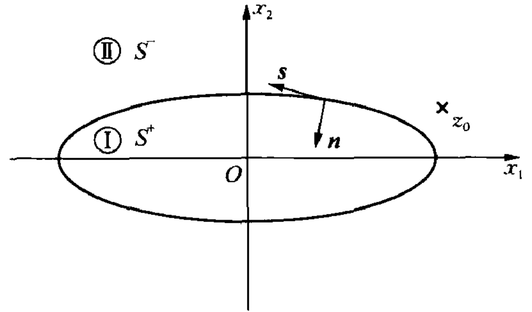


图 7-7 椭圆夹杂

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{I}} = \boldsymbol{U}^{\mathrm{II}},\quad \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{I}} = \boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{II}},\ z \in L \tag{7-91}$$

解本问题时取用第二种沿边界的运行方式或第二种边界自然坐标，$\boldsymbol{n}$ 为基体边界的外法线，由基体指向夹杂。切线 $\boldsymbol{s}$ 的方向相对于基体按顺时针方向，沿边界运行时基体保持在右边（取用公式(4-26b)，(4-27b)等，这样可直接引用文献[100]中的公式）。按 1.5.4 节，把 z_j 平面上椭圆夹杂的内部变换到ς平面上的圆环域：$\rho_{0j} \leqslant \rho_j \leqslant 1$，变换函数是

$$\begin{gathered}
z_j = c_j \varsigma_j + d_j \varsigma_j^{-1},\ c_j = (a - \mathrm{i}\mu_j b)/2,\ d_j = (a + \mathrm{i}\mu_j b)/2 \\
\rho_{0j} = |\sqrt{m_j}|,\quad \rho_{0j}^4 = m_j \overline{m}_j,\ m_j = d_j/c_j = (a+\mathrm{i}\mu_j b)/(a - \mathrm{i}\mu_j b)
\end{gathered} \tag{7-92}$$

本小节中由于下标太多，所以把介质Ⅰ和Ⅱ写成上标。当奇点载荷位于椭圆夹杂外部时，可直接推广各向异性弹性体中的公式，按文献[8, 100]，寻找下列形式的解

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{U}^{\mathrm{II}} = {} & \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}[\boldsymbol{A}^{\mathrm{II}}\langle \ln(\varsigma_j^{\mathrm{II}} - \varsigma_{0j}^{\mathrm{II}})\rangle \boldsymbol{q}^{\mathrm{II}}] + \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\sum_{\beta=1}^{4}\{\boldsymbol{A}^{\mathrm{II}}\langle \ln[(\varsigma_j^{\mathrm{II}})^{-1} - \bar{\varsigma}_{0\beta}^{\mathrm{II}}]\rangle \boldsymbol{q}''_{\beta}\} + \\
& \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\sum_{\delta=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\delta}\boldsymbol{A}^{\mathrm{II}}\langle (\varsigma_j^{\mathrm{II}})^{-\delta}\rangle \boldsymbol{g}_{\delta}\right]
\end{aligned} \tag{7-93}$$

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{I}} - \boldsymbol{U}_0^{\mathrm{I}} = \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\sum_{\beta=1}^{4}[\boldsymbol{A}^{\mathrm{I}}\langle \ln(z_j^{\mathrm{I}} - y_{j\beta}^{\mathrm{I}})\rangle \boldsymbol{q}'_{\beta}] + \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\sum_{\delta=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\delta}\boldsymbol{A}^{\mathrm{I}}\langle f_{j\delta}^{\mathrm{I}}\rangle \boldsymbol{h}_{\delta}\right) \tag{7-94}$$

上两式中 $\boldsymbol{U}_0^{\mathrm{I}}$，$\boldsymbol{q}'_{\beta}$，$\boldsymbol{q}''_{\beta}$，$\boldsymbol{g}_{\delta}$，$\boldsymbol{h}_{\delta}$ 为待定的常数矢量，$\langle f(z_j)\rangle = \mathrm{diag}[f(z_j)]$ 和

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{q}^{\mathrm{II}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{II\,T}}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{II\,T}}\boldsymbol{p},\quad f_{j\delta}^{\mathrm{I}} = (\varsigma_j^{\mathrm{I}})^{\delta} + (m_j^{\mathrm{I}})^{\delta}(\varsigma_j^{\mathrm{I}})^{-\delta} \\
z_{0j}^{\mathrm{II}} = x_{01} + \mu_j^{\mathrm{II}} x_{02} = c_j^{\mathrm{II}}\varsigma_{0j}^{\mathrm{II}} + d_j^{\mathrm{II}}(\varsigma_{0j}^{\mathrm{II}})^{-1} \\
y_{j\beta}^{\mathrm{I}} = y_{j\beta1} + \mu_j^{\mathrm{I}} y_{j\beta2} = c_j^{\mathrm{I}}\varsigma_{0\beta}^{\mathrm{II}} + d_j^{\mathrm{I}}(\varsigma_{0\beta}^{\mathrm{II}})^{-1}
\end{gathered} \tag{7-95}$$

式(7-93)中的第一项代表基体Ⅱ充满整个空间时的奇点载荷解，第二项可看成基体Ⅱ的 16 个像奇异载荷的解，像奇异载荷位于$(\bar{\varsigma}_{0\beta}^{\mathrm{II}})^{-1}$，且 $|(\bar{\varsigma}_{0\beta}^{\mathrm{II}})^{-1} < 1|$。同样，式(7-94)中的第一项可看成夹杂 Ⅰ 中的 16 个像奇异载荷的解，像奇异载荷位于$(y_{j\beta1}^{\mathrm{I}}, y_{j\beta2}^{\mathrm{I}})$。式(7-93)中的第三项和式(7-94)中的第二项的无穷级数用来满足界面上的连续性条件。注意到

$$z_j^{\mathrm{I}} - y_{j\beta}^{\mathrm{I}} = c_j^{\mathrm{I}}(\varsigma_j^{\mathrm{I}} - \varsigma_{0\beta}^{\mathrm{II}}) + d_j^{\mathrm{I}}[(\varsigma_j^{\mathrm{I}})^{-1} - (\varsigma_{0\beta}^{\mathrm{II}})^{-1}] = c_j^{\mathrm{I}}(\varsigma_j^{\mathrm{I}} - \varsigma_{0\beta}^{\mathrm{II}})[1 - \tau_{j\beta}^{\mathrm{I}}(\varsigma_j^{\mathrm{I}})^{-1}]$$

$$\tau_{j\beta}^{\mathrm{I}} = m_j^{\mathrm{I}}(\varsigma_{0\beta}^{\mathrm{II}})^{-1}$$

利用上式和 $\mathrm{Im}(F) = -\mathrm{Im}(\overline{F})$ 后，则在椭圆边界上$\varsigma_i = \sigma = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$，式(7-93)和(7-94)分别取值

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{II}} = \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\Big[-\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{II}}\langle\ln(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi}-\overline{\varsigma}_{0j}^{\mathrm{II}})\rangle\overline{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{II}} + \sum_{\beta=1}^{4}\ln(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi}-\overline{\varsigma}_{0\beta}^{\mathrm{II}})\boldsymbol{A}^{\mathrm{II}}\boldsymbol{q}''_{\beta} + \sum_{\delta=1}^{\infty}\frac{1}{\delta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta\psi}\boldsymbol{A}^{\mathrm{II}}\boldsymbol{g}_{\delta}\Big] \tag{7-96}$$

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{I}} - \boldsymbol{U}_0^{\mathrm{I}} = \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\Big\{\sum_{\beta=1}^{4}[\boldsymbol{A}^{\mathrm{I}}\langle\ln c_j^{\mathrm{I}}\rangle\boldsymbol{q}'_{\beta}) - \ln(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi}-\overline{\varsigma}_{0\beta}^{\mathrm{II}})\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{q}}'_{\beta} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{I}}\langle\ln(1-\tau_{j\beta}^{\mathrm{I}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi})\boldsymbol{q}'_{\beta}\rangle] + \sum_{\delta=1}^{\infty}\frac{1}{\delta}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta\psi}[-\overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{h}}_{\delta} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{I}}\langle(m_j^{\mathrm{I}})^{\delta}\rangle\boldsymbol{h}_{\delta}]\Big\} \tag{7-97}$$

在式(7-93)和(7-96)中，把 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{II}}$ 换成 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{II}}$ 后便得到 $\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{II}}$ 的表达式，在式(7-94)和(7-97)中，把 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{I}}$ 换成 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{I}}$、把 $\boldsymbol{u}_0^{\mathrm{I}}$ 换成 $\boldsymbol{\Phi}_0^{\mathrm{I}}$ 后便得到 $\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{I}}$ 的表达式，如和式(7-93)和(7-94)对应的是

$$\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{II}} = \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}[\boldsymbol{B}^{\mathrm{II}}\langle\ln(\varsigma_j^{\mathrm{II}}-\varsigma_{0j}^{\mathrm{II}})\rangle\boldsymbol{q}^{\mathrm{II}}] + \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\sum_{\beta=1}^{4}\{\boldsymbol{B}^{\mathrm{II}}\langle\ln[(\varsigma_j^{\mathrm{II}})^{-1}-\overline{\varsigma}_{0\beta}^{\mathrm{II}}]\rangle\boldsymbol{q}''_{\beta}\} + \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\sum_{\delta=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{\delta}\boldsymbol{B}^{\mathrm{II}}\langle(\varsigma_j^{\mathrm{II}})^{-\delta}\rangle\boldsymbol{g}_{\delta}\Big] \tag{7-98}$$

$$\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{I}} - \boldsymbol{\Phi}_0^{\mathrm{I}} = \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\sum_{\beta=1}^{4}[\boldsymbol{B}^{\mathrm{I}}\langle\ln(z_j^{\mathrm{I}}-y_{j\beta}^{\mathrm{I}})\rangle\boldsymbol{q}'_{\beta}] + \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\sum_{\delta=1}^{\infty}\Big(\frac{1}{\delta}\boldsymbol{B}^{\mathrm{I}}\langle f_{j\delta}^{\mathrm{I}}\rangle\boldsymbol{h}_{\delta}\Big)$$

把这些表达式代入界面连续性条件(7-91)，并计及 $\ln(1-x) = -\sum_{\delta=1}^{\infty}(x^{\delta}/\delta)$，便得求解待定函数的下列方程

$$\boldsymbol{U}_0^{\mathrm{I}} = -\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\{\boldsymbol{A}^{\mathrm{I}}\langle\ln c_j^{\mathrm{I}}\rangle\boldsymbol{q}'\},\quad \boldsymbol{\Phi}_0^{\mathrm{I}} = -\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\{\boldsymbol{B}^{\mathrm{I}}\langle\ln c_j^{\mathrm{I}}\rangle\boldsymbol{q}'\},\quad \boldsymbol{q}' = \sum_{\beta=1}^{4}\boldsymbol{q}'_{\beta} \tag{7-99a}$$

$$\boldsymbol{A}^{\mathrm{II}}\boldsymbol{q}''_{\beta} + \overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{q}'_{\beta}} = \overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{II}}\boldsymbol{I}_{\beta}\overline{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{II}},\quad \boldsymbol{B}^{\mathrm{II}}\boldsymbol{q}''_{\beta} + \overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{q}'_{\beta}} = \overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{II}}\boldsymbol{I}_{\beta}\overline{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{II}} \tag{7-99b}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{\mathrm{II}}\boldsymbol{g}_{\delta} + \overline{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{h}}_{\delta} &= \boldsymbol{A}^{\mathrm{I}}\Big[\langle(m_j^{\mathrm{I}})^{\delta}\rangle\boldsymbol{h}_{\delta} - \sum_{\beta=1}^{4}\langle(\tau_{j\beta}^{\mathrm{I}})^{\delta}\rangle\boldsymbol{q}'_{\beta}\Big]\\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{II}}\boldsymbol{g}_{\delta} + \overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{h}}_{\delta} &= \boldsymbol{B}^{\mathrm{I}}\Big[\langle(m_j^{\mathrm{I}})^{\delta}\rangle\boldsymbol{h}_{\delta} - \sum_{\beta=1}^{4}\langle(\tau_{j\beta}^{\mathrm{I}})^{\delta}\rangle\boldsymbol{q}'_{\beta}\Big]\end{aligned} \tag{7-99c}$$

由式(7-99b)还可推出

$$\boldsymbol{B}^{\mathrm{II}}\boldsymbol{q}''_{\beta} = (\boldsymbol{Y}_{\mathrm{II}} + \overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}})^{-1}(\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}} - \overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}})\overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{II}}\boldsymbol{I}_{\beta}\overline{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{II}},\quad \overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{I}}\boldsymbol{q}'_{\beta} = (\boldsymbol{Y}_{\mathrm{II}} + \overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}})^{-1}(\boldsymbol{Y}^{\mathrm{II}} + \overline{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{II}})\overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{II}}\boldsymbol{I}_{\beta}\overline{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{II}} \tag{7-100}$$

式中 $\boldsymbol{Y}_{\alpha}$ 由式(6-9)表示，即 $\boldsymbol{Y}_{\alpha} = \mathrm{i}\boldsymbol{A}_{\alpha}\boldsymbol{B}_{\alpha}^{-1}$。

7.4.2 奇点载荷位于椭圆夹杂内部

当奇点载荷位于椭圆夹杂内部时，可取下列形式的解

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{II}} = \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}[\boldsymbol{A}^{\mathrm{II}}\langle\ln(\varsigma_j^{\mathrm{II}}-\varsigma_{0j}^{\mathrm{I}})\rangle\boldsymbol{q}^{\mathrm{II}}] + \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\sum_{\beta=1}^{4}\{\boldsymbol{A}^{\mathrm{II}}\langle\ln[(\varsigma_j^{\mathrm{II}})^{-1}-(\varsigma_{0\beta}^{\mathrm{I}})^{-1}]\rangle\boldsymbol{q}''_{\beta}\} +$$

$$\frac{1}{\pi}\text{Im}\sum_{\delta=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\delta}\boldsymbol{A}^{\mathrm{II}}\langle(\varsigma_j^{\mathrm{II}})^{-\delta}\rangle\boldsymbol{g}_\delta\right] \tag{7-101}$$

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{I}}-\boldsymbol{U}_0^{\mathrm{I}}=\frac{1}{\pi}\text{Im}[\boldsymbol{A}^{\mathrm{I}}\ln(z_j^{\mathrm{I}}-z_{0j}^{\mathrm{I}})\boldsymbol{q}^{\mathrm{I}}]+\frac{1}{\pi}\text{Im}\sum_{\beta=1}^{4}[\boldsymbol{A}^{\mathrm{I}}\langle\ln(z_j^{\mathrm{I}}-\hat{y}_{j\beta}^{\mathrm{I}})\rangle(\boldsymbol{q}'_\beta-\boldsymbol{I}_\beta\boldsymbol{q}^{\mathrm{I}})]+$$

$$\frac{1}{\pi}\text{Im}\sum_{\delta=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\delta}\boldsymbol{A}^{\mathrm{I}}\langle f_{j\delta}^{\mathrm{I}}\rangle\boldsymbol{h}_\delta\right) \tag{7-102}$$

式中

$$\boldsymbol{q}^\alpha=\boldsymbol{B}^{\alpha\mathrm{T}}\boldsymbol{b}+\boldsymbol{A}^{\alpha\mathrm{T}}\boldsymbol{p},\ \alpha=\mathrm{I},\mathrm{II}$$

$$z_{0j}^{\mathrm{I}}=x_{01}+\mu_j^{\mathrm{I}}x_{02}=c_j^{\mathrm{I}}\varsigma_{0j}^{\mathrm{I}}+d_j^{\mathrm{I}}(\varsigma_{0j}^{\mathrm{I}})^{-1},\quad \hat{y}_{j\beta}^{\mathrm{I}}=\hat{y}_{j\beta1}+\mu_j^{\mathrm{I}}\hat{y}_{j\beta2}=c_j^{\mathrm{I}}(\bar{\varsigma}_{0\beta}^{\mathrm{I}})^{-1}+d_j^{\mathrm{I}}\bar{\varsigma}_{0\beta}^{\mathrm{I}} \tag{7-103}$$

当 z_0 在椭圆内部时,需要从 z_0 经过基体到∞作一割线,式(7-101)和(7-102)第一项的值在割线的两岸有间断。

式(7-101)第二项可以看成基体Ⅱ的16个像奇异载荷的解,像奇异载荷的作用点位于$\varsigma_{0\beta}^{\mathrm{I}}$,且$|\varsigma_{0\beta}^{\mathrm{I}}<1|$。同样,式(7-102)中的第二项可以看成夹杂$I$中的16个像奇异载荷的解,像奇异载荷的作用点位于$(y_{j\beta1},\ y_{j\beta2})$。

在式(7-101)中,把$\boldsymbol{A}^{\mathrm{II}}$换成$\boldsymbol{B}^{\mathrm{II}}$后便得到$\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{II}}$的表达式,在式(7-102)中,把$\boldsymbol{A}^{\mathrm{I}}$换成$\boldsymbol{B}^{\mathrm{I}}$、把$\boldsymbol{U}_0^{\mathrm{I}}$换成$\boldsymbol{\Phi}_0^{\mathrm{I}}$后,便得到$\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{I}}$的表达式。

把解代入边界条件式(7-91),得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}_0^{\mathrm{I}}&=-\frac{1}{\pi}\text{Im}\sum_{\beta=1}^{4}[\boldsymbol{A}^{\mathrm{I}}\langle\ln c_j^{\mathrm{I}}\rangle\boldsymbol{q}'+\ln(-\varsigma_{0\beta}^{\mathrm{I}})(\boldsymbol{A}^{\mathrm{I}}\boldsymbol{I}_\beta\boldsymbol{q}^{\mathrm{I}}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{II}}\boldsymbol{I}_\beta\boldsymbol{q}^{\mathrm{II}})]\\ \boldsymbol{\Phi}_0^{\mathrm{I}}&=-\frac{1}{\pi}\text{Im}\sum_{\beta=1}^{4}[\boldsymbol{B}^{\mathrm{I}}\langle\ln c_j^{\mathrm{I}}\rangle\boldsymbol{q}'+\ln(-\varsigma_{0\beta}^{\mathrm{I}})(\boldsymbol{B}^{\mathrm{I}}\boldsymbol{I}_\beta\boldsymbol{q}^{\mathrm{I}}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{II}}\boldsymbol{I}_\beta\boldsymbol{q}^{\mathrm{II}})]\end{aligned} \tag{7-104a}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{\mathrm{II}}\boldsymbol{q}''_\beta+\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{q}'_\beta}&=\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{II}}\boldsymbol{I}_\beta\bar{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{II}}+2\text{Re}(\boldsymbol{A}^{\mathrm{I}}\boldsymbol{I}_\beta\boldsymbol{q}^{\mathrm{I}}-\boldsymbol{A}^{\mathrm{II}}\boldsymbol{I}_\beta\boldsymbol{q}^{\mathrm{II}})\\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{II}}\boldsymbol{q}''_\beta+\bar{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{q}'_\beta}&=\bar{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{II}}\boldsymbol{I}_\beta\bar{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{II}}+2\text{Re}(\boldsymbol{B}^{\mathrm{I}}\boldsymbol{I}_\beta\boldsymbol{q}^{\mathrm{I}}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{II}}\boldsymbol{I}_\beta\boldsymbol{q}^{\mathrm{II}})\end{aligned} \tag{7-104b}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^{\mathrm{II}}\boldsymbol{g}_\delta+\bar{\boldsymbol{A}}^{\mathrm{I}}\bar{\boldsymbol{h}}_\delta&=\boldsymbol{A}^{\mathrm{I}}\left[\langle(m_j^{\mathrm{I}})^\delta\rangle\boldsymbol{h}_\delta-\langle(\tau_{0j}^{\mathrm{I}})^\delta\rangle\boldsymbol{q}^{\mathrm{I}}-\sum_{\beta=1}^{4}\langle(\hat{\tau}_{j\beta}^{\mathrm{I}})^\delta\rangle(\boldsymbol{q}'_\beta-\boldsymbol{I}_\beta\boldsymbol{q}^{\mathrm{I}})\right]\\ \boldsymbol{B}^{\mathrm{II}}\boldsymbol{g}_\delta+\bar{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{I}}\bar{\boldsymbol{h}}_\delta&=\boldsymbol{B}^{\mathrm{I}}\left[\langle(m_j^{\mathrm{I}})^\delta\rangle\boldsymbol{h}_\delta-\langle(\tau_{0j}^{\mathrm{I}})^\delta\rangle\boldsymbol{q}^{\mathrm{I}}-\sum_{\beta=1}^{4}\langle(\hat{\tau}_{j\beta}^{\mathrm{I}})^\delta\rangle(\boldsymbol{q}'_\beta-\boldsymbol{I}_\beta\boldsymbol{q}^{\mathrm{I}})\right]\end{aligned} \tag{7-104c}$$

$$\tau_{0j}^{\mathrm{I}}=m_j^{\mathrm{I}}(\varsigma_{0j}^{\mathrm{I}})^{-1},\ \hat{\tau}_{j\beta}^{\mathrm{I}}=m_j^{\mathrm{I}}\bar{\varsigma}_{0\beta}^{\mathrm{II}}$$

7.4.3 奇点载荷位于椭圆夹杂边界上

当奇点载荷位于椭圆夹杂边界上时,式(7-93)和(7-94)分别化为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}^{\mathrm{II}}=&\frac{1}{\pi}\text{Im}[\boldsymbol{A}^{\mathrm{II}}\langle\ln(\varsigma_j^{\mathrm{II}}-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi_0})\rangle\boldsymbol{q}^{\mathrm{II}}]+\frac{1}{\pi}\text{Im}\{\boldsymbol{A}^{\mathrm{II}}\langle\ln[(\varsigma_j^{\mathrm{II}})^{-1}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi_0}]\rangle\boldsymbol{q}''\}+\\ &\frac{1}{\pi}\text{Im}\sum_{\delta=1}^{\infty}\left[\frac{1}{\delta}\boldsymbol{A}^{\mathrm{II}}\langle(\varsigma_j^{\mathrm{II}})^{-\delta}\rangle\boldsymbol{g}_\delta\right]\end{aligned} \tag{7-105}$$

$$\boldsymbol{U}^{\mathrm{I}}-\boldsymbol{U}_0^{\mathrm{I}}=\frac{1}{\pi}\text{Im}[\boldsymbol{A}^{\mathrm{I}}\langle\ln(z_j^{\mathrm{I}}-z_{0j}^{\mathrm{I}})\rangle\boldsymbol{q}']+\frac{1}{\pi}\text{Im}\sum_{\delta=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\delta}\boldsymbol{A}^{\mathrm{I}}\langle f_{j\delta}^{\mathrm{I}}\rangle\boldsymbol{h}_\delta\right) \tag{7-106}$$

式中

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{q}'' &= \sum_{\beta=1}^{4}\boldsymbol{q}''_{\beta} = (\boldsymbol{B}^{\mathrm{II}})^{-1}(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{II}}+\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}})^{-1}(\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}}-\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}})\overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{II}}\ \overline{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{II}} \\
\boldsymbol{q}' &= \sum_{\beta=1}^{4}\boldsymbol{q}'_{\beta} = (\boldsymbol{B}^{\mathrm{I}})^{-1}(\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}+\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}})^{-1}(\boldsymbol{Y}^{\mathrm{II}}+\overline{\boldsymbol{Y}}^{\mathrm{II}})\overline{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{II}}\ \overline{\boldsymbol{q}}^{\mathrm{II}} \\
z_0 &= x_{01}+\mathrm{i}x_{02} = a\cos\psi_0+\mathrm{i}b\sin\psi_0
\end{aligned}
\qquad (7-107)
$$

由式(7-101)和(7-102)可以得到相同的结果。在式(7-105)中,把 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{II}}$ 换成 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{II}}$ 后便得到 $\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{II}}$ 的表达式,在式和(7-106)中,把 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{I}}$ 换成 $\boldsymbol{B}^{\mathrm{I}}$、把 $\boldsymbol{u}_0^{\mathrm{I}}$ 换成 $\boldsymbol{\Phi}_0^{\mathrm{I}}$ 后,便得到 $\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{I}}$ 的表达式。

7.4.4 位错和椭圆夹杂相互作用的力

按 Eshelby 理论,物质力定义为总机械能和电能之和 U 对缺陷位置的负梯度,本节稍微改变为总电焓 H^{e} 对缺陷位置的负梯度,这对线弹性介质是可以的。当不存在电能和机械载荷时,系统的总电焓等于把位错从无穷远处移到目前位错作用点 $z_0(x_{01}+\mathrm{i}x_{02})$ 所作的机械功和电功之和,即

$$
H^{\mathrm{e}} = \frac{1}{2}\int_{x_{01}+\delta}^{\infty}(b_i\sigma_{2i}+b_4D_2)\mathrm{d}x_1,\ \delta\to 0 \qquad (7-108)
$$

1) 位错位于基体内

当位错位于基体内时,式(7-108)可以写成

$$
\begin{aligned}
H^{\mathrm{e}} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{II}}\Big|_{z_{0j}^{\mathrm{II}}+\delta_j}^{z_{0j}^{\mathrm{II}}=\Lambda_j},\ \Lambda_j\to\infty,\ \delta_j\to 0 \\
\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{II}}\Big|_{z_{0j}^{\mathrm{II}}+\delta}^{z_{0j}^{\mathrm{II}}=\Lambda_j} &= \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\Big\{\boldsymbol{B}^{\mathrm{II}}\left\langle\ln\frac{\Lambda_j}{\delta_j}\right\rangle\boldsymbol{q}^{\mathrm{II}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{II}}\left\langle\ln\Big(1-\frac{m_j^{\mathrm{II}}}{\varsigma_{0j}^{\mathrm{II}}\varsigma_{0j}^{\mathrm{II}}}\Big)\right\rangle\boldsymbol{q}^{\mathrm{II}}- \\
&\quad \sum_{\beta=1}^{4}\boldsymbol{B}^{\mathrm{II}}\left\langle\ln\Big(1-\frac{1}{\varsigma_{0j}^{\mathrm{II}}\varsigma_{0\beta}^{\mathrm{II}}}\Big)\right\rangle\boldsymbol{q}''_{\beta}-\sum_{\delta=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{\delta}\boldsymbol{B}^{\mathrm{II}}\langle(\varsigma_{0j}^{\mathrm{II}})^{-\delta}\rangle\boldsymbol{g}_{\delta}\Big]\Big\}
\end{aligned}
\qquad (7-109)
$$

除去位错自身引起的能量的奇异性部分,得到位错和介质相互作用的作用能为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{H}_{\mathrm{int}}^{\mathrm{e}\,\mathrm{II}} &= \frac{1}{2\pi}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{Im}\Big\{\boldsymbol{B}^{\mathrm{II}}\left\langle\ln\Big(1-\frac{m_j^{\mathrm{II}}}{\varsigma_{0j}^{\mathrm{II}}\varsigma_{0j}^{\mathrm{II}}}\Big)\right\rangle\boldsymbol{q}^{\mathrm{II}}-\sum_{\beta=1}^{4}\boldsymbol{B}^{\mathrm{II}}\left\langle\ln\Big(1-\frac{1}{\varsigma_{0j}^{\mathrm{II}}\varsigma_{0\beta}^{\mathrm{II}}}\Big)\right\rangle\boldsymbol{q}_{\beta}^{\mathrm{II}}- \\
&\quad \sum_{\delta=1}^{\infty}\Big[\frac{1}{\delta}\boldsymbol{B}^{\mathrm{II}}\langle(\varsigma_{0j}^{\mathrm{II}})^{-\delta}\rangle\boldsymbol{g}_{\delta}\Big]\Big\}
\end{aligned}
\qquad (7-110)
$$

2) 位错位于夹杂内

当位错位于夹杂内时,有

$$
\begin{aligned}
H^{\mathrm{e}} &= \frac{1}{2}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{II}}\Big|_{z_{0j}^{\mathrm{II}*}}^{z_{0j}^{\mathrm{II}}=\Lambda_j}+\frac{1}{2}\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\cdot\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{I}}\Big|_{z_{0j}^{\mathrm{I}}+\delta_j}^{z_{0j}^{\mathrm{I}*}},\ z_{0j}^{\mathrm{II}*}=z_{0j}^{\mathrm{I}*} \\
\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{II}}\Big|_{z_{0j}^{\mathrm{II}*}}^{z_{0j}^{\mathrm{II}}-\Lambda_j}+\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{I}}\Big|_{z_{0j}^{\mathrm{I}}+\delta_j}^{z_{0j}^{\mathrm{I}*}} &= \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\Big[\boldsymbol{B}^{\mathrm{II}}\langle\ln\Lambda_j\rangle\boldsymbol{q}^{\mathrm{II}}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{I}}\langle\ln\delta_j\rangle\boldsymbol{q}^{\mathrm{I}}-\sum_{\delta-1}^{\infty}\frac{1}{\delta}\boldsymbol{B}^{\mathrm{I}}\langle f_{j\delta}^{\mathrm{I}}\rangle\boldsymbol{h}_{\delta}- \\
&\quad \sum_{\beta=1}^{4}\boldsymbol{B}^{\mathrm{I}}\langle\ln(z_{0j}^{\mathrm{I}}-\hat{y}_{j\beta}^{\mathrm{I}})\rangle(\boldsymbol{q}'_{\beta}-\boldsymbol{I}_{\beta}\boldsymbol{q}^{\mathrm{I}})- \\
&\quad \sum_{\beta=1}^{4}\ln(-\varsigma_{0\beta}^{\mathrm{I}})(-\boldsymbol{B}^{\mathrm{II}}\boldsymbol{q}''_{\beta}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{I}}\boldsymbol{I}_{\beta}\boldsymbol{q}^{\mathrm{I}}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{II}}\boldsymbol{I}_{\beta}\boldsymbol{q}^{\mathrm{II}})\Big]
\end{aligned}
\qquad (7-111)
$$

除去在位错自身能量的奇异性部分，得到位错和介质相互作用的作用能为

$$H_{\mathrm{int}}^{\mathrm{e\,I}} = \frac{\boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}}{2\pi}\mathrm{Im}\Big[-\sum_{\delta=1}^{\infty}\frac{1}{\delta}\boldsymbol{B}^{\mathrm{I}}\langle f_{0j\delta}^{\mathrm{I}}\rangle\boldsymbol{h}_{\delta}-\sum_{\beta=1}^{4}\boldsymbol{B}^{\mathrm{I}}\langle\ln(z_{0j}^{\mathrm{I}}-y_{j\beta}^{\mathrm{I}})\rangle(\boldsymbol{q}_{\beta}'-\boldsymbol{I}_{\beta}\boldsymbol{q}^{\mathrm{I}})+$$

$$\sum_{\beta=1}^{4}\ln(-\varsigma_{0\beta}^{\mathrm{I}})(-\boldsymbol{B}^{\mathrm{II}}\boldsymbol{q}_{\beta}''+\boldsymbol{B}^{\mathrm{I}}\boldsymbol{I}_{\beta}\boldsymbol{q}^{\mathrm{I}}-\boldsymbol{B}^{\mathrm{II}}\boldsymbol{I}_{\beta}\boldsymbol{q}^{\mathrm{II}})\Big] \tag{7-112}$$

沿 s 方向作用在单位长度位错上的力为

$$\boldsymbol{F} = -\partial H_{\mathrm{int}}^{\mathrm{e}}/\partial \boldsymbol{s} \tag{7-113}$$

7.4.5 算例

基体为材料 PZT－5H，夹杂为环氧树脂。讨论两种位错情况，情况①：只有机械位错 b_1，即 $\boldsymbol{b}/2b=(1,0,0,0)$；情况②：只有电位错 b_4，即 $\boldsymbol{b}/2b=(0,0,0,10^9)$。通常的文献中给出的材料常数是在晶体坐标系中测量的，即取 x_3 轴为极化轴，测得的材料常数为

$$C_{11}^{\mathrm{II}}=126,\ C_{33}^{\mathrm{II}}=117,\ C_{44}^{\mathrm{II}}=35.3,\ C_{12}^{\mathrm{II}}=55,\ C_{13}^{\mathrm{II}}=53(\mathrm{GPa})$$

$$e_{31}^{\mathrm{II}}=-6.5,\ e_{33}^{\mathrm{II}}=23.3,\ e_{15}^{\mathrm{II}}=17.0(\mathrm{C/m^2})$$

$$\epsilon_{11}^{\mathrm{II}}=15.1\times10^{-9},\ \epsilon_{33}^{\mathrm{II}}=13.0\times10^{-9}(\mathrm{C^2/N\cdot m^2})$$

夹杂为环氧树脂，为了组成式(5－15)时出现重根，材料常数人为地作了些许变动，取为

$$C_{11}^{\mathrm{I}}=6.43,\ C_{33}^{\mathrm{I}}=6.429,\ C_{44}^{\mathrm{I}}=1.07,\ C_{12}^{\mathrm{I}}=4.29,\ C_{13}^{\mathrm{I}}=4.289(\mathrm{GPa})$$

$$e_{31}^{\mathrm{I}}=e_{33}^{\mathrm{I}}=e_{15}^{\mathrm{I}}=0(\mathrm{C/m^2}),\quad \epsilon_{11}^{\mathrm{I}}=5.0\times10^{-9},\ \epsilon_{33}^{\mathrm{I}}=5.001\times10^{-9}(\mathrm{C^2/N\cdot m^2})$$

由于本节中前面的讨论是取 x_2 轴为极化方向的，计算时要注意这点。

图 7－8 和 7－9 分别表示环氧树脂椭圆夹杂情况下的位错情况①和②下的作用在位错上的力的等高线；图 7－10 和 7－11 分别表示刚性椭圆夹杂情况下的位错情况①和②的作用在位错上的力的等高线；椭圆孔的情况比较接近环氧树脂椭圆夹杂的情况。图中取量纲一坐标 $x_1/2b$, $x_2/2b$; F_1 为单位长度位错上的量纲一滑移力，F_2 为量纲一攀移力，取

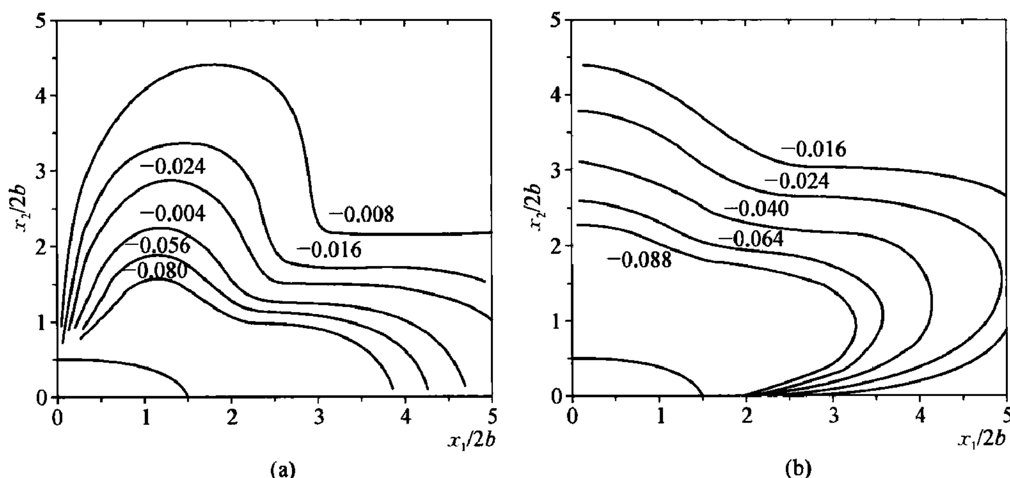


图 7－8 PZT－5H/环氧树脂夹杂在 $\boldsymbol{b}/2b=(1,0,0,0)$ 作用下

(a) 量纲一滑移力 F_1 的等高线；(b) 量纲一攀移力 F_2 的等高线

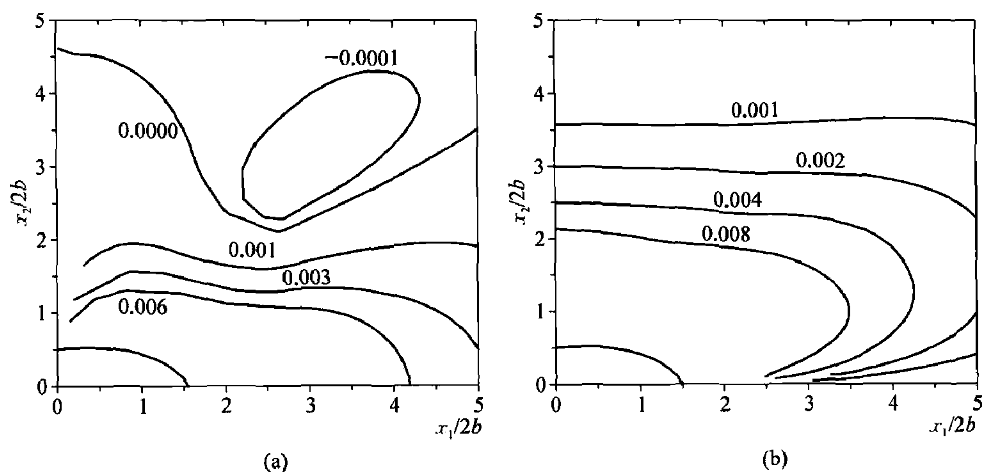


图 7-9 PZT-5H/环氧树脂夹杂在 $\boldsymbol{b}/2b=(0, 0, 0, 10^9)$ 作用下

(a) 量纲一滑移力 F_1 的等高线；(b) 量纲一攀移力 F_2 的等高线

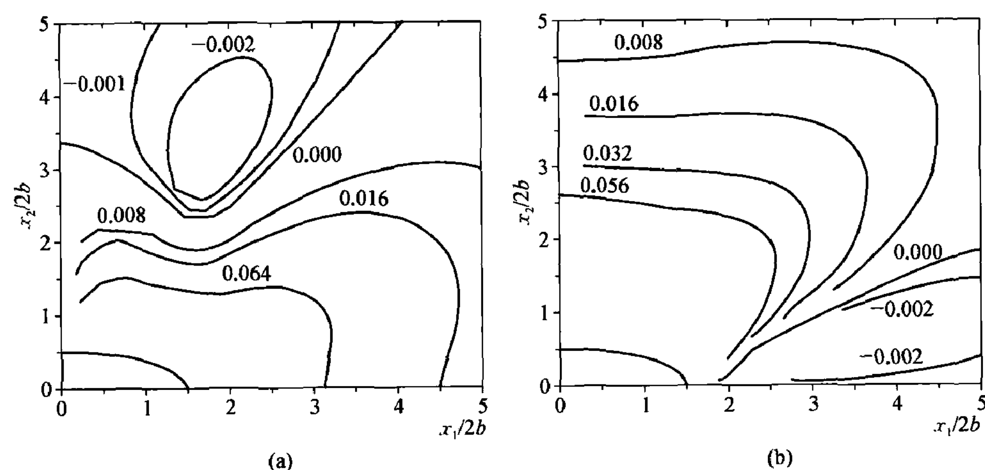


图 7-10 PZT-5H/刚性夹杂在 $\boldsymbol{b}/2b=(1, 0, 0, 0)$

(a) 量纲一滑移力 F_1 的等高线；(b) 量纲一攀移力 F_2 的等高线

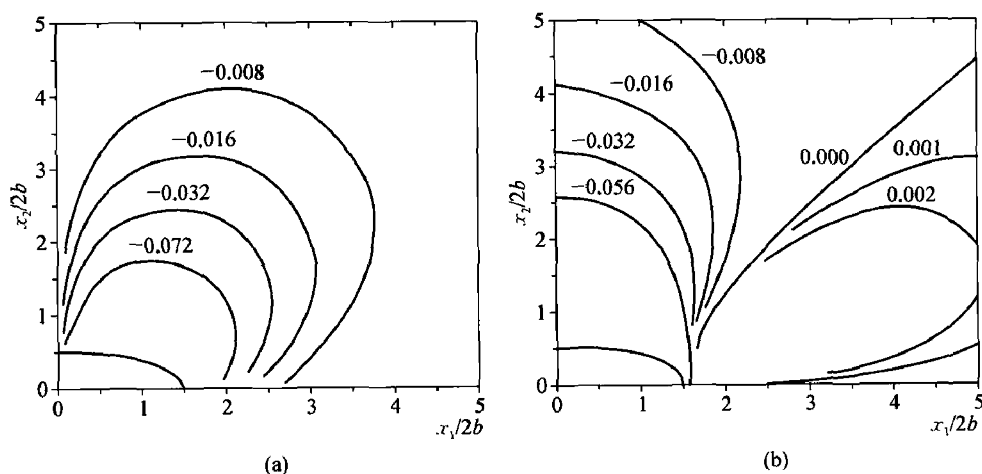


图 7-11 PZT-5H/刚性夹杂在 $\boldsymbol{b}/2b=(0, 0, 0, 10^9)$

(a) 量纲一滑移力 F_1 的等高线；(b) 量纲一攀移力 F_2 的等高线

$$F_1 = -\frac{1}{\alpha}\frac{\partial H_{\text{int}}^{e}}{\partial x_1} = -\frac{4\pi}{L_{11}m}\frac{\partial H_{\text{int}}^{e}}{\partial x_1}\times 10^9, \quad F_2 = -\frac{4\pi}{L_{11}{}^{m}}\frac{\partial H_{\text{int}}^{e}}{\partial x_2}\times 10^9$$

$$\alpha = \frac{1}{4\pi}L_{11}\times 10^{-9}m, \; m = 1\ \text{m}, \; L_{11} = -2\text{i}B_{11}^2$$

讨论椭圆夹杂和奇点载荷相互作用的论文很多,如文献[101]～[104]。

7.5 压电体中的电偶极子[96, 97, 105]

7.5.1 均匀压电体中的孤立电偶极子的解

王和匡[97, 105]以及王[96]详细地讨论了电偶极子的各种情形,这对裂尖畸变的研究具有意义。设无限电介质中在 z_0 点作用有垂直于平面的线密度为$(-q_e)$的直线分布的负电荷,即作用广义集中载荷 $-q_e\boldsymbol{i}_4$, $\boldsymbol{i}_4 = [0, 0, 0, 1]^{\text{T}}$,其解可由式(7-2)得到

$$\boldsymbol{U}_0 = -\frac{1}{\pi\text{i}}\text{Re}[\boldsymbol{A}\langle\ln(z_j - z_{0j})\rangle\boldsymbol{A}^{\text{T}}q_e\boldsymbol{i}_4], \quad \boldsymbol{\Phi}_0 = -\frac{1}{\pi\text{i}}\text{Re}[\boldsymbol{B}\langle\ln(z_j - z_{0j})\rangle\boldsymbol{A}^{\text{T}}q_e\boldsymbol{i}_4] \tag{7-114a}$$

又设在 z_1 点作用有垂直于平面的线密度为$(+q_e)$的直线分布的正电荷 $q_e\boldsymbol{i}_4$,其解为

$$\boldsymbol{U}_1 = \frac{1}{\pi\text{i}}\text{Re}[\boldsymbol{A}\langle\ln(z_j - z_{1j})\rangle\boldsymbol{A}^{\text{T}}q_e\boldsymbol{i}_4], \quad \boldsymbol{\Phi}_1 = \frac{1}{\pi\text{i}}\text{Re}[\boldsymbol{B}\langle\ln(z_j - z_{1j})\rangle\boldsymbol{A}^{\text{T}}q_e\boldsymbol{i}_4] \tag{7-114b}$$

设

$$z_1 - z_0 = d(\cos\theta + \text{i}\sin\theta) \to 0, \quad z_{1j} - z_{0j} = d(\cos\theta + \mu_j\sin\theta) \to 0$$
$$\lim_{q_e\to\infty,\ d\to 0} q_e\boldsymbol{d} = \boldsymbol{p}_e \tag{7-115}$$

式中 $\boldsymbol{p}_e$ 为电偶极矩矢量,$d=|\boldsymbol{d}|$为正、负电荷间的距离,方向由负电荷指向正电荷。利用

$$\lim_{d\to 0,\ q_e d\to p_e}[q_e\ln(z_j - z_{1j}) - q_e\ln(z_j - z_{0j})] = \lim_{d\to 0,\ q_e d\to p}q_e\ln\frac{z_j - z_{1j}}{z_j - z_{0j}} =$$
$$\lim_{d\to 0,\ q_e d\to p_e}q_e\ln\left(1 - \frac{d(\cos\theta + \mu_j\sin\theta)}{z_j - z_{0j}}\right) = -p_e\frac{\cos\theta + \mu_j\sin\theta}{z_j - z_{0j}} \tag{7-116}$$

叠加式(7-114a)和(7-114b),便得存在电偶极子时的解 $\boldsymbol{U}_p = \boldsymbol{U}_1 + \boldsymbol{U}_0$, $\boldsymbol{\Phi}_p = \boldsymbol{\Phi}_1 + \boldsymbol{\Phi}_0$ 为

$$\boldsymbol{U}_p = \text{Re}\left[\frac{\text{i}p_e}{\pi}\boldsymbol{A}\left\langle\frac{\cos\theta + \mu_j\sin\theta}{z_j - z_{0j}}\right\rangle\boldsymbol{A}^{\text{T}}\boldsymbol{i}_4\right], \quad \boldsymbol{\Phi}_p = \text{Re}\left[\frac{\text{i}p_e}{\pi}\boldsymbol{B}\left\langle\frac{\cos\theta + \mu_j\sin\theta}{z_j - z_{0j}}\right\rangle\boldsymbol{A}^{\text{T}}\boldsymbol{i}_4\right] \tag{7-117}$$

相应地,广义应力为

$$\boldsymbol{\Sigma}_2 = \boldsymbol{\Phi}_{,1} = \lim_{d\to 0,\ q_e d\to p}\text{Re}\left[\frac{p_e}{\pi\text{i}}\boldsymbol{B}\left\langle\frac{1}{z_j - z_{1j}} - \frac{1}{z_j - z_{0j}}\right\rangle\boldsymbol{A}^{\text{T}}\boldsymbol{i}_4\right] =$$
$$\text{Re}\left[\frac{p_e}{\pi\text{i}}\boldsymbol{B}\left\langle\frac{\cos\theta + \mu_j\sin\theta}{(z_j - z_{0j})^2}\right\rangle\boldsymbol{A}^{\text{T}}\boldsymbol{i}_4\right]$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_1 = -\boldsymbol{\Phi}_{,2} = -\operatorname{Re}\left[\frac{p_e}{\pi \mathrm{i}}\boldsymbol{B}\left\langle \mu_j \frac{\cos\theta + \mu_j \sin\theta}{(z_j - z_{0j})^2}\right\rangle \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{i}_4\right] \tag{7-118}$$

7.5.2 均匀压电体中的孤立电偶极子和裂纹的相互作用

设电介质中有一中心裂纹 $|x_1| \leqslant a$，$x_2 = 0$，裂纹面自由，在点 z_0 有一强度为 p_e，与 x_1 轴成 θ 角的电偶极子。令 $\boldsymbol{U}_p$，$\boldsymbol{\Phi}_p$ 为电偶极子作用在均匀介质中的解，它们在裂纹面上产生的面力为式(7-118) 中的 $\boldsymbol{\Sigma}_2$。设 $\boldsymbol{U}_c$，$\boldsymbol{\Phi}_c$ 为在裂纹面上施加 $\boldsymbol{t} = -\boldsymbol{\Sigma}_2$ 时的均匀介质的解，则同时存在孤立电偶极子和裂纹的解为

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_p + \boldsymbol{U}_c,\quad \boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}_p + \boldsymbol{\Phi}_c \tag{7-119}$$

按式(5-32)，在裂纹面上施加 $\boldsymbol{t} = -\boldsymbol{\Sigma}_2$ 时的均匀介质的解为

$$\boldsymbol{h}_c(z) = \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}_c(z) = \boldsymbol{Q}(z)\left[\boldsymbol{C} + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{\boldsymbol{\Sigma}_0(x_1)\,\mathrm{d}x_1}{\boldsymbol{Q}^+(x_1)(x_1 - z)}\right],\ \boldsymbol{Q}(z) = \operatorname{diag}[X_{0j}(z)] \tag{7-120}$$

式中 $X_{0j}(z) = \omega_j / \sqrt{z^2 - a^2}$。把式(7-118) 代入上式，其中的积分项可用式(1-131) 求解，即有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-a}^{a} \frac{1}{X_0^+(x_1 - z)}\mathrm{d}x_1 = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{X_0(z)} - z\right] = \frac{1}{2}(\sqrt{z^2 - a^2} - z)$$

上式也可如下积出

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-a}^{a} \frac{1}{X_0^+(x_1 - z)}\mathrm{d}x_1 = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-a}^{a} \frac{-\mathrm{i}\sqrt{a^2 - x_1^2}}{(x_1 - z)}\mathrm{d}x_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{z^2 - a^2} - z)$$

再利用

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} \frac{\sqrt{a^2 - x_1^2}}{(x_1 - z)(x_1 - z_{0j})}\mathrm{d}x_1 &= \int_{-a}^{a} \frac{1}{z - z_{0j}}\frac{\sqrt{a^2 - x_1^2}}{x_1 - z}\mathrm{d}x_1 - \int_{-a}^{a} \frac{1}{z - z_{0j}}\frac{\sqrt{a^2 - x_1^2}}{x_1 - z_{0j}}\mathrm{d}x_1 = \\ &-\frac{\pi}{z - z_{0j}}(\sqrt{z^2 - a^2} - z) + \frac{\pi}{z - z_{0j}}(\sqrt{z_{0j}^2 - a^2} - z_{0j}) = \\ &\pi\left(1 + \frac{\sqrt{z_{0j}^2 - a^2} - \sqrt{z^2 - a^2}}{z - z_{0j}}\right)\end{aligned}$$

从而得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{h}_c(z) = \frac{1}{2\sqrt{z^2 - a^2}}\operatorname{Re}\Bigg\{\frac{p_e}{\pi\mathrm{i}}\boldsymbol{B}\cdot\Bigg\langle(\cos\theta + \mu_j\sin\theta)\Bigg[\frac{\sqrt{z_{0j}^2 - a^2}}{(z - z_{0j})^2} - \\ \frac{\sqrt{z^2 - a^2}}{(z - z_{0j})^2} + \frac{z_{0j}}{(z - z_{0j})\sqrt{z_{0j}^2 - a^2}}\Bigg]\Bigg\rangle\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{i}_4\Bigg\}\end{aligned} \tag{7-121}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_{2c}(x_1) = 2\operatorname{Re}\boldsymbol{h}_c(x_1)$$

应力强度因子为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{K} &= \lim_{x_1 \to a}\sqrt{2\pi(x_1 - a)}[\boldsymbol{\Sigma}_{2p}(x_1) + \boldsymbol{\Sigma}_{2c}(x_1)] = \lim_{x_1 \to a}\sqrt{2\pi(x_1 - a)}\boldsymbol{\Sigma}_{2c}(x_1) = \\ &p_e\sqrt{\frac{a}{\pi}}\operatorname{Im}\left\{\boldsymbol{B}\left\langle(\cos\theta + \mu_j\sin\theta)\left[\frac{1}{(z_{0j} - a)\sqrt{z_{0j}^2 - a^2}}\right]\right\rangle\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{i}_4\right\}\end{aligned} \tag{7-122}$$

若电偶极子位于右裂尖附近，引入裂尖局部极坐标系 (ρ, Θ)，$\rho \ll a$（图 7 - 12），则 $z_{0j} = a + \rho(\cos\Theta + \mu_j \sin\Theta)$，式（7 - 122）可近似表示为

$$\boldsymbol{K} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\, p_e \frac{1}{\rho\sqrt{\rho}} \mathrm{Im}\left\{ \boldsymbol{B} \left\langle \left[\frac{\cos\theta + \mu_j \sin\theta}{(\cos\Theta + \mu_j \sin\Theta)^{3/2}} \right] \right\rangle \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{i}_4 \right\} \tag{7 - 123}$$

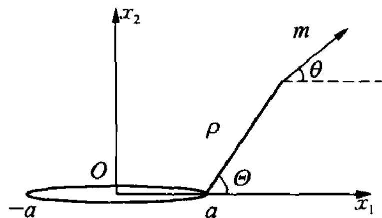


图 7 - 12　裂纹与电偶极子的几何位置

上述公式可以应用铁电体裂尖畴变理论中去。

图 7 - 13(a)、(c)、(b)分别给出 PZT - 5H 中心裂纹的正前方点$(2a, 0)$、正上方点(a, a)和 45°斜前方点$(a+a/\sqrt{2}, a/\sqrt{2})$的孤立点偶极子的偶极矩与 x_1 轴夹角在$[0, 2\pi]$范围内变化时，右裂尖的规范化广义应力强度因子$\widetilde{K}_j = K_j / p_e a^{-3/2}$随偶极子方向 θ 的变化曲线。

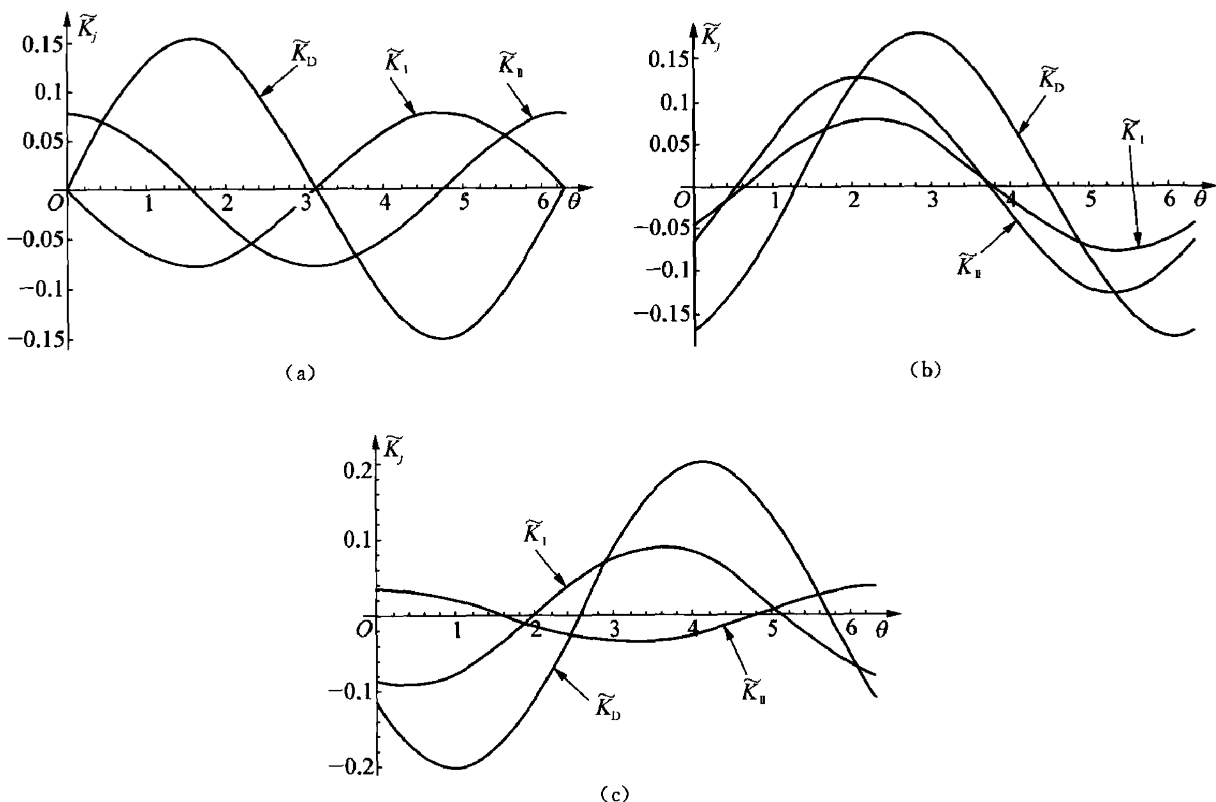


图 7 - 13　偶极子处于不同位置时右裂尖的规范化应力强度因子$\widetilde{K}_j = K_j / p_e a^{-3/2}$与偶极子方向 θ 的关系

(a) 偶极子位置$(2a, 0)$；(b) 偶极子位置$(a + a/\sqrt{2}, a/\sqrt{2})$；(c) 偶极子位置$(a, a)$

7.5.3　双压电体界面上的电偶极子

设在$(x_{01}, 0)$点作用有负电荷$-q_e$，或 $\boldsymbol{p} = -q_e \boldsymbol{i}_4$ 在$(x_{01}+d, 0)$点作用有正电荷$+q_e$或 $\boldsymbol{p} = q_e \boldsymbol{i}_4$，且有 $\lim\limits_{q_e \to \infty,\, d \to 0} q_e d = p_e$。双压电体界面上奇点载荷的解已在 7.1.3 节中研究过，因此采用叠加法便可得到电偶极子的解。按式（7 - 18）和（7 - 24），其解为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{U}_{ad} &= 2\mathrm{Re}[\boldsymbol{A}_\alpha \langle \ln(z_{\alpha j} - x_{01} - d) - \ln(z_{\alpha j} - x_{01}) \rangle_\alpha \boldsymbol{V}_\alpha q_e] \boldsymbol{i}_4 \\
\boldsymbol{\Phi}_{ad} &= 2\mathrm{Re}[\boldsymbol{B}_\alpha \langle \ln(z_{\alpha j} - x_{01} - d) - \ln(z_{\alpha j} - x_{01}) \rangle_\alpha \boldsymbol{V}_\alpha q_e] \boldsymbol{i}_4
\end{aligned}
\tag{7-124}
$$

注意到

$$
\lim_{q_e d \to p_e,\ d \to 0} [\ln(z_{\alpha j} - x_{01} - d) - \ln(z_{\alpha j} - x_{01}) q_e] = -\frac{p_e}{z_\alpha - x_{01}}
$$

则式(7 - 124)最终化为

$$
\boldsymbol{U}_{ad} = -2p_e \mathrm{Re}\left(\boldsymbol{A}_\alpha \left\langle \frac{1}{z_{\alpha j} - x_{01}} \right\rangle \boldsymbol{V}_\alpha\right) \boldsymbol{i}_4, \quad \boldsymbol{\Phi}_{ad} = -2p_e \mathrm{Re}\left(\boldsymbol{B}_\alpha \left\langle \frac{1}{z_{\alpha j} - x_{01}} \right\rangle \boldsymbol{V}_\alpha\right) \boldsymbol{i}_4 \tag{7-125}
$$

7.5.4 双压电体界面上的电偶极子和裂纹的相互作用

设无限大板中有一长 $2a$ 中心裂纹,裂纹前方(x_{01}, 0)点处有一强度为 p_e 的电偶极子。这一问题可用叠加法求解,即解可表成式(7 - 119)的形式。单独存在电偶极子时的解 $\boldsymbol{\Phi}_{ad}$ 仍由式(7 - 125)或(7 - 124)表示。为积分方便,取式(7 - 124),从而它在裂纹的位置产生的应力为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1) &= 2\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{B}_\alpha \left\langle \frac{1}{x_1 - x_{01} - d} - \frac{1}{x_1 - x_{01}} \right\rangle_\alpha \boldsymbol{V}_\alpha q_e\right) \boldsymbol{i}_4 = \\
& 2q_e \left(\frac{1}{x_1 - x_{01} - d} - \frac{1}{x_1 - x_{01}}\right) \mathrm{Re}(\boldsymbol{B}_\alpha \boldsymbol{V}_\alpha) \boldsymbol{i}_4 = \frac{q_e}{\pi}\left(\frac{1}{x_1 - x_{01} - d} - \frac{1}{x_1 - x_{01}}\right) \boldsymbol{\Omega}_2 \boldsymbol{i}_4
\end{aligned}
\tag{7-126}
$$

上式中已利用了 $2\mathrm{Re}(\boldsymbol{B}_\alpha \boldsymbol{V}_\alpha) = \boldsymbol{\Omega}_2/\pi$。把 $\boldsymbol{t}(x_1) = -\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1)$ 施加到裂纹面上,其解便是 $\boldsymbol{\Phi}_{ac}$。按式(6 - 23),由无穷远处广义应力为零和广义位移的单值性条件,推知只需其中的特解部分,即

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{h}_c(z) &= \boldsymbol{B}\boldsymbol{F}(z) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \boldsymbol{P}(z) \int_L \frac{\boldsymbol{t}(x_1)\mathrm{d}x_1}{\boldsymbol{P}^+(x_1)(x_1 - z)} = \\
& -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \boldsymbol{P}(z) \left\{ \int_L \frac{[\boldsymbol{P}^+(x_1)]^{-1}}{x_1 - z} \left(\frac{1}{x_1 - x_{01} - d} - \frac{1}{x_1 - x_{01}}\right) \mathrm{d}x_1 \right\} \frac{q_e}{\pi} \boldsymbol{\Omega}_2 \boldsymbol{i}_4 \\
\boldsymbol{P}(z) &= \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{Q}(z),\ \boldsymbol{Q}(z) = \langle Y_0(z) \rangle,\ \boldsymbol{\Omega} = [\boldsymbol{\omega}^{(1)}, \boldsymbol{\omega}^{(2)}, \boldsymbol{\omega}^{(3)}, \boldsymbol{\omega}^{(4)}]
\end{aligned}
\tag{7-127}
$$

式中 $\boldsymbol{\Omega}_2$ 由式(7 - 23)表示。积出上式,并顾及 $q_e d \to p_e$, $d \to 0$,便得

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{h}_c(z) = (\boldsymbol{I} + \overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H})^{-1} \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{Q}(z) \lim_{q_e d \to p_e,\ d \to 0} \bigg\langle & \frac{1}{Y_0(z)} \left(\frac{1}{z - x_{01}} - \frac{1}{z - x_{01} - d}\right) + \\
& \frac{1}{Y_0(x_{01} + d)} \frac{1}{z - x_{01} - d} - \frac{1}{Y_0(d)} \frac{1}{z - x_{01}} \bigg\rangle \boldsymbol{\Omega}^{-1} \frac{q_e}{\pi} \boldsymbol{\Omega}_2 \boldsymbol{i}_4
\end{aligned}
$$

取一级近似,上式化为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{h}_c(z) &= (\boldsymbol{I} + \overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H})^{-1} \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{Q}(z) \cdot \\
& \left\langle -\frac{1}{Y_0(z)} \frac{1}{(z - x_{01})^2} + \frac{1}{Y_0(x_{01})} \frac{1}{z - x_{01}} \left(\frac{1}{z - x_{01}} + \frac{x_{01} - 2\mathrm{i}a\varepsilon_j}{x_{01}^2 - a^2}\right) \right\rangle \boldsymbol{\Omega}^{-1} \frac{p_e}{\pi} \boldsymbol{\Omega}_2 \boldsymbol{i}_4
\end{aligned}
\tag{7-128}
$$

式中 $\boldsymbol{H}$ 由式(6-9)表示。按式(6-34)和上式，结合面上裂尖前方应力的主奇异项为

$$\boldsymbol{\Sigma}_{2c}(x_1)=\boldsymbol{h}_c^{+}(x_1)+\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{h}_c^{-}(x_1)=(\boldsymbol{I}+\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H})\boldsymbol{h}_c(x_1)=$$

$$\boldsymbol{\Omega}\left[(2a)^{-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\varepsilon_j}(x_1-a)^{-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\varepsilon_j}\right]\left\langle\frac{1}{Y_0(x_{01})}\frac{1}{a-x_{01}}\left(\frac{1}{a-x_{01}}+\frac{x_{01}-2\mathrm{i}a\varepsilon_j}{x_{01}^2-a^2}\right)\right\rangle\boldsymbol{\Omega}^{-1}\frac{p_e}{\pi}\boldsymbol{\Omega}_2\boldsymbol{i}_4 \tag{7-129}$$

按式(6-38)和上式，裂尖右方结合面上的广义应力强度因子为

$$\boldsymbol{K}=[K_{\mathrm{II}},K_{\mathrm{I}},K_{\mathrm{III}},K_D]^{\mathrm{T}}=\lim_{x_1\to a}\sqrt{2\pi(x_1-a)}\,\boldsymbol{\Omega}\langle(x_1-a)^{-\mathrm{i}\varepsilon_j}\rangle\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1)=$$

$$\frac{p_e}{\sqrt{\pi a}}\boldsymbol{\Omega}\left\langle(2a)^{-\mathrm{i}\varepsilon_j}\left[\frac{1}{Y_0(x_{01})(a-x_{01})}\right]\left(\frac{1}{a-x_{01}}+\frac{x_{01}-2\mathrm{i}a\varepsilon_j}{x_{01}^2-a^2}\right)\right\rangle\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\Omega}_2\boldsymbol{i}_4=$$

$$p_e\sqrt{\frac{a}{\pi}}\frac{1}{(x_{01}-a)\sqrt{x_{01}^2-a^2}}\boldsymbol{\Omega}\left\langle(2a)^{-\mathrm{i}\varepsilon_j}(1+2\mathrm{i}\varepsilon_j)\left(\frac{x_{01}+a}{x_{01}-a}\right)^{\mathrm{i}\varepsilon_j}\right\rangle\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\Omega}_2\boldsymbol{i}_4 \tag{7-130}$$

由上式看出，当电偶极子离右裂尖很近，即 $\rho=x_{01}-a\to0$ 时，便得

$$\boldsymbol{K}=p_e\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\boldsymbol{\Omega}\left[(1+2\mathrm{i}\varepsilon_j)\rho^{-\frac{3}{2}-\mathrm{i}\varepsilon_j}\right]\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\Omega}_2\boldsymbol{i}_4 \tag{7-131}$$

7.6 椭圆孔与副裂纹的相互作用

7.6.1 求解方法

设无限电介质中存在一个椭圆孔和一个副裂纹，受到无穷远处的广义应力作用。令坐标轴 x_1 和 x_2 分别沿椭圆孔的长轴和短轴，长为 $2c_0$ 的副裂纹中点的坐标为 $z^{(0)}(x^{(0)}+\mathrm{i}x_2^{(0)})$，和 x_1 轴的夹角为 γ；$z^{(0)}$ 到$(a,0)$的连线长为 d_0，和 x_1 轴的夹角为 α(图 7-14)。Zhou、Zhao 和 Kuang[106] 用连续分布广义位错法来解这一问题。这一方法的要点是：①求解问题 Ⅰ，即求解

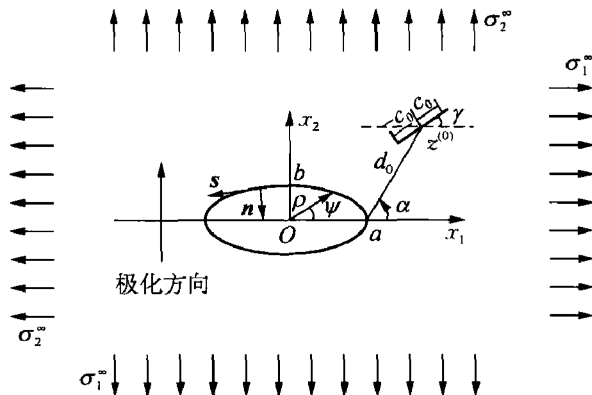


图 7-14 椭圆孔和微裂纹的几何位置

无限电介质中存在一个椭圆孔受到无穷远处的广义应力作用时的解。②求解问题Ⅱ，即求出带有椭圆孔的无限介质单独存在奇点载荷时的解，作为格林函数。③把副裂纹用未知密度的连续分布的广义位错代替，取用问题Ⅱ中的格林函数解；这种连续分布的广义位错的解，不会在椭圆孔边界上产生广义面力，但在裂纹面上产生面力。④问题Ⅰ的解已满足孔边界的边界条件，但在裂纹面上产生广义面力，⑤把③和④中求得的在裂纹面上的广义面力叠加，使之满足副裂纹面上的边界条件，由此来求分布位错的密度。

具体求解时采用 1.5.4 节的变换方法，把 z_j 平面变换到ς_j 平面，把 z，z_j 平面上的椭圆边界变换到ς_j 平面上的单位圆周。变换函数为

$$z_j = \omega(\varsigma_j) = c_j\varsigma_j + d_j\varsigma_j^{-1},\ \varsigma_j = (z_j + \sqrt{z_j^2 - 4c_jd_j})/2c_j$$
$$c_j = \frac{1}{2}(a - \mathrm{i}\mu_j b),\ d_j = \frac{1}{2}(a + \mathrm{i}\mu_j b) \tag{7-132}$$

7.6.2 带有圆孔的无限介质存在奇点载荷的解

现在来讨论问题Ⅱ的解。和 4.4 节的解法类似，把这一问题看成下列两个问题的叠加：①问题 a：均匀介质中在 $z_0(x_{01}+\mathrm{i}x_{02})$ 点存在一奇点载荷；②问题 b：椭圆孔的边界上作用分布载荷；③问题 a 和 b 合成后满足原问题。

1）问题 a 的解

我们已研究过多次，其解为

$$\boldsymbol{U}^{(a)} = \mathrm{Re}[(1/\pi\mathrm{i})\boldsymbol{A}\langle\ln(z_j - z_{0j})\rangle\boldsymbol{q}] = \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}[\boldsymbol{A}\langle\ln(z_j - z_{0j})\rangle\boldsymbol{q}],\ \boldsymbol{q} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{p}$$
$$\boldsymbol{\Phi}^{(a)} = \mathrm{Re}[(1/\pi\mathrm{i})\boldsymbol{B}\langle\ln(z_j - z_{0j})\rangle\boldsymbol{q}] = \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}[\boldsymbol{B}\langle\ln(z_j - z_{0j})\rangle\boldsymbol{q}] \tag{7-133}$$

利用关系

$$\ln(z_j - z_{0j}) = \ln(\varsigma_j - \varsigma_{0j}) + \ln\{c_j[1 - (d_j/c_j/\varsigma_j\varsigma_{0j})]\} \tag{7-134}$$

沿ς平面上的单位圆 Γ，有

$$\boldsymbol{\Phi}_\Gamma^{(a)} = \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}(\boldsymbol{B}\langle\ln(\sigma - \varsigma_{0j}) + \ln\{c_j[1 - (d_j/c_j/\sigma\varsigma_{0j})]\}\rangle\boldsymbol{q}) \tag{7-135}$$

和 7.4 节一样，本小节中取用由基体指向夹杂，即基体的外法线。用 s 表示边界切线方向，沿 s 方向运行时式基体保持在右边（参阅图 1-10 和公式 4-26b，4-27b 等，这主要为了可直接引用文献中的公式）。按式(4-27b)，作用在椭圆边界上的面力为 $\boldsymbol{t} = \mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}/\mathrm{d}s$。

利用式(1-53)的 $\mathrm{d}s = \rho(\psi)\mathrm{d}\psi$，$\rho^2 = a^2\sin^2\psi + b^2\cos^2\psi$ 和

$$\ln(\sigma - \varsigma_{0j}) = \ln(-\varsigma_{0j}) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{\sigma}{\varsigma_{0j}}\right)^k = \ln(-\varsigma_{0j}) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{1}{\varsigma_{0j}}\right)^k(\cos k\psi + \mathrm{i}\sin k\psi)$$

$$\ln\left[c_j\left(1 - \frac{d_j/c_j}{\sigma\varsigma_{0j}}\right)\right] = \ln c_j - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{d_j/c_j}{\sigma\varsigma_{0j}}\right)^k = \ln c_j - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\frac{d_j/c_j}{\varsigma_{0j}}\right)^k(\cos k\psi - \mathrm{i}\sin k\psi)$$

便得

$$t^{(a)} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_\Gamma^{(a)}}{\mathrm{d}s} = \frac{1}{\pi\rho(\psi)}\mathrm{Im}\left\{\boldsymbol{B}\sum_{k=1}^{\infty}\left\langle\left[\left(\frac{1}{\varsigma_{0j}}\right)^k + \left(\frac{d_j/c_j}{\varsigma_{0j}}\right)^k\right]\sin k\psi + \mathrm{i}\left[\left(\frac{d_j/c_j}{\varsigma_{0j}}\right)^k - \left(\frac{1}{\varsigma_{0j}}\right)^k\right]\cos k\psi\right\rangle\boldsymbol{q}\right\} \tag{7-136}$$

2) 问题 b 的解

可取

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}^{(b)} &= 2\mathrm{Re}\sum_{m=1}^{\infty}[\boldsymbol{A}\langle\varsigma_j^{-m}\rangle(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_m + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_m)]\\ \boldsymbol{\Phi}^{(b)} &= 2\mathrm{Re}\sum_{m=1}^{\infty}[\boldsymbol{B}\langle\varsigma_j^{-m}\rangle(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_m + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}_m)]\end{aligned} \tag{7-137}$$

式中 $\boldsymbol{g}_m$，$\boldsymbol{h}_m$ 为待定实矢量,由边界条件确定。在单位圆 Γ 上有

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{U}_\Gamma^{(b)} = \sum_{m=1}^{\infty}[\cos(m\psi)\boldsymbol{h}_m - \sin(m\psi)\hat{\boldsymbol{h}}_m],\quad \boldsymbol{\Phi}_\Gamma^{(b)} = \sum_{m=1}^{\infty}[\cos(m\psi)\boldsymbol{g}_m - \sin(m\psi)\hat{\boldsymbol{g}}_m]\\ &\boldsymbol{t}^{(b)} = \mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}_\Gamma^{(b)}/\mathrm{d}s = -[1/\rho(\psi)]\sum_{m=1}^{\infty}m[\sin(m\psi)\boldsymbol{g}_m + \cos(m\psi)\hat{\boldsymbol{g}}_m]\\ &\hat{\boldsymbol{h}}_m = \boldsymbol{S}\boldsymbol{h}_m + \boldsymbol{M}\boldsymbol{g}_m,\quad \hat{\boldsymbol{g}}_m = \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_m - \boldsymbol{L}\boldsymbol{h}_m\end{aligned} \tag{7-138}$$

式中 $\boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{L}$ 由式(4-35)表示。利用 $\boldsymbol{S}$，$\boldsymbol{M}$，$\boldsymbol{L}$ 之间的关系,由上式还可推出

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{h}_m = \boldsymbol{L}^{-1}(\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}_m - \hat{\boldsymbol{g}}_m),\quad \boldsymbol{g}_m = -\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{S}\boldsymbol{h}_m - \hat{\boldsymbol{h}}_m),\\ &\hat{\boldsymbol{h}}_m = \boldsymbol{L}^{-1}(\boldsymbol{g}_m + \boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{g}}_m),\quad \hat{\boldsymbol{g}}_m = -\boldsymbol{M}^{-1}(\boldsymbol{h}_m + \boldsymbol{S}\hat{\boldsymbol{h}}_m)\end{aligned}$$

3) 椭圆孔内充满空气的解

有关椭圆孔内充满空气的解的问题已在 4.4.2 节中讨论过,本节采用那里所采用的符号。其解可用复势 $\phi(\varsigma) = \phi[\omega(\varsigma)]$ 去求。有下述关系

$$\begin{aligned}&\varphi^{\mathrm{c}}(x_1,x_2) = \phi(z) + \overline{\phi(z)},\quad 或\ \varphi^{\mathrm{c}}(\rho,\psi) = \phi(\varsigma) + \overline{\phi(\varsigma)}\\ &\phi(\varsigma) = \phi[\omega(\varsigma)],\quad z = \omega(\varsigma) = c\varsigma + d\frac{1}{\varsigma},\ c = \frac{a+b}{2},\ d = \frac{a-b}{2}\\ &\overline{E}^{\mathrm{c}} = (E_1^{\mathrm{c}} - \mathrm{i}E_2^{\mathrm{c}}) = -2\varphi'^{\mathrm{c}}(z),\ \varphi'^{\mathrm{c}}(z) = \mathrm{d}\varphi^{\mathrm{c}}(z)/\mathrm{d}z\end{aligned} \tag{7-139}$$

问题的解为

$$\phi(\varsigma) = \sum_{m=1}^{\infty}a_m^{\mathrm{c}}[\varsigma^m + (d/c)^m\varsigma^{-m}] \tag{7-140}$$

对于充满空气的椭圆孔,边界上的电位移值为

$$D_\Gamma^{\mathrm{c}} = -2\epsilon^{\mathrm{c}}\mathrm{Im}\frac{\mathrm{d}\phi(\sigma)}{\mathrm{d}s} = -\frac{2\epsilon^{\mathrm{c}}}{\rho^{\mathrm{c}}}\sum_{m=1}^{\infty}\{[-m(1+(d/c)^m)\mathrm{Im}\,a_m^{\mathrm{c}}]\sin m\psi + [m(1-(d/c)^m)\mathrm{Re}\,a_m^{\mathrm{c}}]\cos m\psi\} \tag{7-141}$$

4）问题的格林函数

问题 a 和 b 在椭圆孔边界上产生的广义应力与椭圆孔内空气的解叠加，使椭圆孔边界上的条件得到满足。为此必须有

$$\boldsymbol{t}^{(b)} = -\boldsymbol{t}^{(a)} + \boldsymbol{D}_\Gamma^c \boldsymbol{i}_4,\ \boldsymbol{i}_4 = [0,\ 0,\ 0,\ 1]^T \tag{7-142}$$

把式(7-136)、(7-138)和(7-141)代入(7-142)，可得

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{g}_m = \boldsymbol{g}_{m1} + \boldsymbol{g}_{m2},\quad \hat{\boldsymbol{g}}_m = \hat{\boldsymbol{g}}_{m1} + \hat{\boldsymbol{g}}_{m2}\\
&\boldsymbol{g}_{m1} = \frac{1}{m\pi}\mathrm{Im}\left[\boldsymbol{B}\left\langle\left(\frac{1}{\varsigma_{0j}}\right)^m + \left(\frac{d_j/c_j}{\varsigma_{0j}}\right)^m\right\rangle\boldsymbol{q}\right],\ \boldsymbol{g}_{m2} = -2\epsilon^c[1+(d/c)^m]\mathrm{Im}\, a_m^c \boldsymbol{i}_4\\
&\hat{\boldsymbol{g}}_{m1} = \frac{1}{m\pi}\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{B}\left\langle\left(\frac{d_j/c_j}{\varsigma_{0j}}\right)^m - \left(\frac{1}{\varsigma_{0j}}\right)^m\right\rangle\boldsymbol{q}\right],\ \hat{\boldsymbol{g}}_{m2} = 2\epsilon^c[1-(d/c)^m]\mathrm{Re}\, a_m^c \boldsymbol{i}_4
\end{aligned} \tag{7-143}$$

式中 $\boldsymbol{g}_m$，$\hat{\boldsymbol{g}}_m$ 都分为两部分，第一部分和边界面力(自由)相关，第二部分和边界电位移连续相关。电介质内的应力函数可由式(7-133)和(7-137)叠加得到

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Phi} = \boldsymbol{\Phi}^{(a)} + \boldsymbol{\Phi}^{(b)} = \boldsymbol{\Phi}^{(1)} + \boldsymbol{\Phi}^{(2)}\\
&\boldsymbol{\Phi}^{(1)} = 2\mathrm{Re}\sum_{m=1}^{\infty}[\boldsymbol{B}\langle\varsigma_j^{-m}\rangle(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{g}_{m1} + \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{h}_{m1})] + \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}[\boldsymbol{B}\langle\ln(z_j - z_{0j})\rangle\boldsymbol{q}]\\
&\boldsymbol{\Phi}^{(2)} = 2\mathrm{Re}\sum_{m=1}^{\infty}[\boldsymbol{B}\langle\varsigma_j^{-m}\rangle(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{g}_{m2} + \boldsymbol{B}^T\boldsymbol{h}_{m2})]
\end{aligned} \tag{7-144}$$

把式(7-138) 的第四式和(7-143)代入(7-144)的第二式，并利用 $\ln(\sigma - \varsigma_{0j})$ 等的展开式和

$$\sum_{m=1}^{\infty}\varsigma_j^{-m}\bar{\varsigma}_{0k}^{-m}/m = -\ln(1-\varsigma_j^{-1}\bar{\varsigma}_{0k}^{-1}),\ |\varsigma_j^{-1}\bar{\varsigma}_{0k}^{-1}| < 1$$

便得到

$$\boldsymbol{\Phi}^{(1)} = \frac{1}{\pi}\mathrm{Im}[\boldsymbol{B}\langle\ln(\varsigma_j - \varsigma_{0j})\rangle\boldsymbol{q}] + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{4}\mathrm{Im}[\boldsymbol{B}\langle\ln(\varsigma_j^{-1} - \bar{\varsigma}_{0k})\rangle\boldsymbol{B}^{-1}\bar{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{I}_k\bar{\boldsymbol{q}}] \tag{7-145}$$

由式(7-139)和(7-140)，得到孔边界上的电势

$$\varphi_\Gamma(\sigma) = 2\mathrm{Re}\phi(\sigma) = 2\mathrm{Re}\sum_{m=1}^{\infty}a_m^c\left\{\left[1+\left(\frac{d}{c}\right)^m\right]\cos m\psi + \mathrm{i}\left[1-\left(\frac{d}{c}\right)^m\right]\sin m\psi\right\} \tag{7-146}$$

比较上式和(7-138)的第一式以及单值性条件，可得

$$(\boldsymbol{h}_m)_4 = 2[1+(d/c)^m]\mathrm{Re}\,a_m^c,\quad (\hat{\boldsymbol{h}}_m)_4 = 2[1-(d/c)^m]\mathrm{Im}\,a_m^c,\ m \geqslant 1 \tag{7-147}$$

把式(7-143)和(7-147)代入(7-138)中的第三式，可得下述关系

$$\begin{aligned}
&2\left\{1+\left(\frac{d}{c}\right)^m + \epsilon^c\left[1-\left(\frac{d}{c}\right)^m\right]L_{44}^{-1}\right\}\mathrm{Re}\,a_m^c + 2\epsilon^c\left[1+\left(\frac{d}{c}\right)^m\right]L_{4i}^{-1}S_{4i}\,\mathrm{Im}\,a_m^c = C_{1m}\\
&-2\epsilon^c\left[1-\left(\frac{d}{c}\right)^m\right]L_{4i}^{-1}S_{4i}\,\mathrm{Re}\,a_m^c + 2\left\{\epsilon^c\left[1+\left(\frac{d}{c}\right)^m\right]L_{44}^{-1} + \left[1-\left(\frac{d}{c}\right)^m\right]\right\}\mathrm{Im}\,a_m^c = C_{2m}
\end{aligned} \tag{7-148}$$

式中

$$C_{1m}=\frac{\boldsymbol{L}_4^{-1}}{m\pi}\left\{\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\mathrm{Im}\left[\boldsymbol{B}\left\langle\frac{1+(d_j/c_j)^m}{\varsigma_{0j}^m}\right\rangle\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right]-\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{B}\left\langle\frac{(d_j/c_j)^m-1}{\varsigma_{0j}^m}\right\rangle\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right]\right\}\boldsymbol{p}+$$
$$\frac{\boldsymbol{L}_4^{-1}}{m\pi}\left\{\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\mathrm{Im}\left[\boldsymbol{B}\left\langle\frac{1+(d_j/c_j)^m}{\varsigma_{0j}^m}\right\rangle\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right]-\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{B}\left\langle\frac{(d_j/c_j)^m-1}{\varsigma_{0j}^m}\right\rangle\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right]\right\}\boldsymbol{b}$$
$$C_{2m}=\frac{\boldsymbol{L}_4^{-1}}{m\pi}\left\{\mathrm{Im}\left[\boldsymbol{B}\left\langle\frac{1+(d_j/c_j)^m}{\varsigma_{0j}^m}\right\rangle\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right]+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{B}\left\langle\frac{(d_j/c_j)^m-1}{\varsigma_{0j}^m}\right\rangle\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right]\right\}\boldsymbol{p}+$$
$$\frac{\boldsymbol{L}_4^{-1}}{m\pi}\left\{\mathrm{Im}\left[\boldsymbol{B}\left\langle\frac{1+(d_j/c_j)^m}{\varsigma_{0j}^m}\right\rangle\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right]+\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{B}\left\langle\frac{(d_j/c_j)^m-1}{\varsigma_{0j}^m}\right\rangle\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right]\right\}\boldsymbol{b}$$

(7 - 149)

式中 C_{1m}，C_{2m}是实数，$\boldsymbol{L}_4^{-1}=[L_{41}^{-1},\ L_{42}^{-1},\ L_{43}^{-1},\ L_{44}^{-1}]$。式(7 - 148)的解为

$$a_m^{\mathrm{c}}=\alpha_m/\beta_m,\quad C_m=C_{1m}+\mathrm{i}C_{2m}$$
$$\alpha_m=\frac{1}{2}[\overline{C}_m(d/c)^m(1-\epsilon^{\mathrm{c}}L_{44}^{-1}+\mathrm{i}\epsilon^{\mathrm{c}}L_{4i}^{-1}S_{4i})-C_m(1+\epsilon^{\mathrm{c}}L_{44}^{-1}+\mathrm{i}\epsilon^{\mathrm{c}}L_{4i}^{-1}S_{4i})] \quad (7-150)$$
$$\beta_m=[1-(d/c)^{2m}][1-(\epsilon^{\mathrm{c}}L_{44}^{-1})^2-(\epsilon^{\mathrm{c}}L_{4i}^{-1}S_{4i})^2]-2\epsilon^{\mathrm{c}}[1+(d/c)^{2m}]L_{44}^{-1}$$

利用关系 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{-1}\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{B}^{-1}/2$，$\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{L}^{-1}=\mathrm{i}\boldsymbol{B}^{-1}/2$，由式(7 - 143)和(7 - 144)，可推出

$$\boldsymbol{\Phi}^{(2)}=2\epsilon^{\mathrm{c}}\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{Im}\{\boldsymbol{B}\langle\varsigma_j^{-m}\rangle\boldsymbol{B}^{-1}[\overline{a}_m^{\mathrm{c}}-(d/c)^m a_m^{\mathrm{c}}]\boldsymbol{i}_4\} \quad (7-151)$$

7.6.3 带有裂纹的无限介质存在广义位错的解

椭圆的短半轴退化到零便成为裂纹，此时 $c=d=c_j=d_j=a/2$。式(7 - 150)简化为

$$\mathrm{Im}\,\alpha_m=-C_{2m}=-2\frac{\boldsymbol{L}_4^{-1}}{m\pi}\mathrm{Im}\left(\boldsymbol{B}\left\langle\frac{1}{\varsigma_{0j}^m}\right\rangle\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\right)$$
$$\beta_m=-4\epsilon^{\mathrm{c}}L_{44}^{-1},\quad \mathrm{Im}\,a_m^{\mathrm{c}}=C_{2m}/4\epsilon^{\mathrm{c}}L_{44}^{-1} \quad (7-152)$$

式(7 - 151)简化为

$$\boldsymbol{\Phi}^{(2)}=-4\epsilon^{\mathrm{c}}\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{Im}[\boldsymbol{B}\langle\varsigma_j^{-m}\rangle\boldsymbol{B}^{-1}(\mathrm{i}\,\mathrm{Im}\,a_m^{\mathrm{c}}\,\boldsymbol{i}_4)]=$$
$$-\frac{1}{L_{44}^{-1}}\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{Re}[\boldsymbol{B}\langle\varsigma_j^{-m}\rangle\boldsymbol{B}^{-1}(C_{2m}\boldsymbol{i}_4)]=-2\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{B}\left\langle\frac{C_{2m}}{2L_{44}^{-1}}\varsigma_j^{-m}\right\rangle\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{i}_4\right)$$

(7 - 153)

上式表明 $\boldsymbol{\Phi}^{(2)}$和ϵ^{c} 无关。式中

$$-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{C_{2m}}{2L_{44}^{-1}}\varsigma_j^{-m}=-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varsigma_j^{-m}L_{4j}^{-1}}{m\pi L_{44}^{-1}}\mathrm{Im}(\boldsymbol{B}\langle\varsigma_{0j}^{-m}\rangle\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}})\boldsymbol{b}=$$
$$-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{L_{4j}^{-1}}{mL_{44}^{-1}}\mathrm{Im}\left(\boldsymbol{B}\left\langle\frac{1}{\varsigma_j^m\varsigma_{0j}^m}\right\rangle\boldsymbol{q}+\overline{\boldsymbol{B}}\left\langle\frac{1}{\overline{\varsigma}_j^m\overline{\varsigma}_{0j}^m}\right\rangle\overline{\boldsymbol{q}}\right)= \quad (7-154)$$
$$(L_{4k}^{-1}/L_{44}^{-1})[B_{kl}\langle\ln(1-\varsigma_j^{-1}\varsigma_{0j}^{-1})\rangle q_l+\overline{B}_{kl}\langle\ln(1-\overline{\varsigma}_j^{-1}\overline{\varsigma}_{0j}^{-1})\rangle\overline{q}_l]$$

在右裂尖 $x_1 = a$ 处的应力强度因子为

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{K}(a) &= [K_{\mathrm{II}}, K_{\mathrm{I}}, K_{\mathrm{III}}, K_{\mathrm{D}}]^{\mathrm{T}} = \sqrt{2\pi} \lim_{z_j \to a,\, x_2=0} \sqrt{z_j - a}\boldsymbol{\Phi}_{,1} = \sqrt{\pi/a} \lim_{\varsigma_j \to 1} \partial\boldsymbol{\Phi}/\partial\varsigma_j = \\
&\sqrt{\frac{1}{\pi a}}\left[\mathrm{Im}\left(\boldsymbol{B}\left\langle\frac{1}{1-\varsigma_{0j}}\right\rangle\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right) - \sum_{j=1}^{4}\mathrm{Im}\left(\boldsymbol{B}\left\langle\frac{1}{1-\bar{\varsigma}_{0j}}\right\rangle\boldsymbol{B}^{-1}\bar{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{I}_j\bar{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\right)\right]\boldsymbol{b} - \\
&\frac{2}{\sqrt{\pi a}}\frac{L_{4j}^{-1}}{L_{44}^{-1}}\mathrm{Im}\left(\boldsymbol{B}\left\langle\frac{1}{1-\varsigma_{0j}}\right\rangle\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\boldsymbol{i}_4\right) = \\
&\frac{1}{\sqrt{\pi a}}\left[\mathrm{Im}\left(\boldsymbol{B}\left\langle 1-\sqrt{\frac{z_{0j}+a}{z_{0j}-a}}\right\rangle\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\right) - \frac{L_{4j}^{-1}}{L_{44}^{-1}}\mathrm{Im}\left(\boldsymbol{B}\left\langle 1-\sqrt{\frac{z_{0j}+a}{z_{0j}-a}}\right\rangle\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\boldsymbol{i}_4\right)\right]
\end{aligned}
\tag{7-155}
$$

$$
K_{\mathrm{D}}(a) = -\frac{L_{4m}^{-1}}{L_{44}^{-1}}K_m(a),\ m = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III} \tag{7-156}
$$

7.6.4 椭圆孔与副裂纹相互作用的连续位错方法

椭圆孔与副裂纹相互作用可用连续位错的方法处理。这一问题取下述两个问题的叠加:①问题 a:带有孔边自由的椭圆孔的无限压电介质在无穷远处承受均匀广义载荷;②问题 b:几何形状和原问题相同,但副裂纹用连续分布位错代替。由于问题 a 和 b 都满足椭圆孔上的边界条件,所以叠加后仍满足此边界条件;因此只需使问题 a 和 b 的解叠加后满足副裂纹面上应力自由的边界条件便得到原问题的解。本问题取用第二种沿边界的运行方式(图 7-10)。

对横观各向同性体,问题 a 的解已在 4.4 节作了详细的讨论,对于一般压电体可类似处理。设无穷远处的作用载荷为

$$
\boldsymbol{\Sigma}_1^{\infty} = [\sigma_{11}^{\infty}, \sigma_{21}^{\infty}, \sigma_{31}^{\infty}, D_1^{\infty}]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\Sigma}_2^{\infty} = [\sigma_{12}^{\infty}, \sigma_{22}^{\infty}, \sigma_{32}^{\infty}, D_2^{\infty}]^{\mathrm{T}} \tag{7-157}
$$

没有椭圆孔的无限介质中的解为

$$
\boldsymbol{\Phi}_1^{(\mathrm{a})} = \boldsymbol{\Sigma}_2^{\infty} x_1 - \boldsymbol{\Sigma}_1^{\infty} x_2 \tag{7-158}
$$

椭圆孔中空气内的电场可预先设为待定的常值 $E_i^{\mathrm{c}}(i = 1, 2)$,便有

$$
\varphi^{\mathrm{c}} = -E_1^{\mathrm{c}} x_1 - E_2^{\mathrm{c}} x_2,\quad D_i^{\mathrm{c}} = \epsilon^{\mathrm{c}} E_i^{\mathrm{c}},\ D_n^{\mathrm{c}} = D_i^{\mathrm{c}} n_i \tag{7-159}
$$

利用式(1-53)、(7-158)和(7-159),在原问题的椭圆孔的边界上产生的广义面力的负值是

$$
\begin{aligned}
-\boldsymbol{\Sigma}_n^{\Gamma} &= -(\boldsymbol{\Sigma}_1^{\infty} n_1 + \boldsymbol{\Sigma}_2^{\infty} n_2 - D_n^{\mathrm{c}}\boldsymbol{i}_4) = \\
&\frac{b}{\rho(\psi)}\cos\psi(\boldsymbol{\Sigma}_1^{\infty} - D_1^{\mathrm{c}}\boldsymbol{i}_4) + \frac{a}{\rho(\psi)}\sin\psi(\boldsymbol{\Sigma}_2^{\infty} - D_2^{\mathrm{c}}\boldsymbol{i}_4)
\end{aligned}
\tag{7-160}
$$

如在椭圆孔的边界上施加 $-\boldsymbol{\Sigma}_n^{\Gamma}$,则这一问题的解和式(7-158)表示的解之和便构成带有孔边自由的椭圆孔的无限压电介质在无穷远处承受均匀广义载荷的解。同时我们注意到无限介质中只在椭圆孔的边界上作用分布载荷时的一般解由式(7-137)表示,在椭圆孔边界上的

值由式(7－138)表示。对比式(7－160)、(7－159)和(7－138)可知，本问题中只在椭圆孔的边界上作用式(7－160)的载荷时，在式(7－138)中有

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{g}_1 = -a(\boldsymbol{\Sigma}_2^{\infty} - D_2^c \boldsymbol{i}_4), \quad \hat{\boldsymbol{g}}_1 = -b(\boldsymbol{\Sigma}_1^{\infty} - D_1^c \boldsymbol{i}_4), \quad \text{其余 } \boldsymbol{g}_m = \hat{\boldsymbol{g}}_m = \boldsymbol{0} \\ &(\boldsymbol{h}_1)_4 = -aE_1^c, \quad (\hat{\boldsymbol{h}}_1)_4 = bE_2^c \end{aligned} \tag{7-161}$$

由式(7－138)给出的 $\boldsymbol{h}_m$，$\hat{\boldsymbol{h}}_m$ 和 $\boldsymbol{g}_m$，$\hat{\boldsymbol{g}}_m$ 的关系可推出只有 $\boldsymbol{h}_1$，$\hat{\boldsymbol{h}}_1$ 不为零。式(7－161)中的$(\boldsymbol{h}_1)_4$，$(\hat{\boldsymbol{h}}_1)_4$ 应当和(7－138)的 $\boldsymbol{u}_\Gamma^{(b)}$ 给出的相同，从而利用 $\boldsymbol{h}_m$，$\hat{\boldsymbol{h}}_m$ 和 $\boldsymbol{g}_m$，$\hat{\boldsymbol{g}}_m$ 的关系可推出待定的椭圆孔中空气中的电位移 D_1^c，D_2^c 由下式确定

$$\begin{aligned} &\left(bL_{44}^{-1} - \frac{a}{\epsilon^c}\right)D_1^c - aL_{4i}^{-1}S_{4i}D_2^c = bL_{4i}^{-1}\sigma_{1i}^{\infty} - aL_{4i}^{-1}S_{ji}\sigma_{2j}^{\infty} \\ &bL_{4i}^{-1}S_{4i}D_1^c + \left(aL_{44}^{-1} - \frac{b}{\epsilon^c}\right)D_2^c = bL_{4i}^{-1}S_{ji}\sigma_{1j}^{\infty} + aL_{4i}^{-1}\sigma_{2i}^{\infty} \end{aligned} \tag{7-162}$$

根据上面的讨论，问题 a 的解 $\boldsymbol{\Phi}^{(a)}$ 可表为

$$\boldsymbol{\Phi}^{(a)} = \boldsymbol{\Sigma}_2^{\infty} x_1 - \boldsymbol{\Sigma}_1^{\infty} x_2 - \mathrm{Re}\{\boldsymbol{B}\langle\varsigma_j^{-1}\rangle\boldsymbol{B}^{-1}[a(\boldsymbol{\Sigma}_2^{\infty} - D_2^c\boldsymbol{i}_4)] - \mathrm{i}b(\boldsymbol{\Sigma}_1^{\infty} - D_1^c\boldsymbol{i}_4)\} \tag{7-163}$$

当椭圆退化为裂纹时，则 $b=0$，式(7－163) 和(7－162) 分别化为

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\Phi}^{(a)} = \boldsymbol{\Sigma}_2^{\infty} x_1 - \boldsymbol{\Sigma}_1^{\infty} x_2 - \mathrm{Re}[\boldsymbol{B}\langle\varsigma_j^{-1}\rangle\boldsymbol{B}^{-1}a(\boldsymbol{\Sigma}_2^{\infty} - D_2^c\boldsymbol{i}_4)] \\ &D_2^c = L_{4i}^{-1}\sigma_{2i}^{\infty}/L_{44}^{-1} \end{aligned} \tag{7-164}$$

对于问题 b，微裂纹上任一点 z 的解可由在 z_0 的单个位错的解沿裂纹积分得到

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Phi}^{(b)}(\xi) = &\frac{1}{\pi}\int_{-c_0}^{c_0}\left\{\mathrm{Im}[\boldsymbol{B}\langle\ln(\varsigma_j - \varsigma_{0j})\rangle\boldsymbol{q}] + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{4}\mathrm{Im}[\boldsymbol{B}\langle\ln(\varsigma_j^{-1} - \bar{\varsigma}_{0k})\rangle\boldsymbol{B}^{-1}\bar{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{I}_k\bar{\boldsymbol{q}}]\right\}\mathrm{d}\xi_0 + \\ &2\epsilon^c\int_{-c_0}^{c_0}\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{Im}\{\boldsymbol{B}\langle\varsigma_j^{-m}\rangle\boldsymbol{B}^{-1}[\bar{a}_m^c - (d/c)^m a_m^c]\boldsymbol{i}_4\}\mathrm{d}\xi_0 \end{aligned} \tag{7-165}$$

式中 $2c_0$ 是微裂纹长度，$\mathrm{d}\xi_0$ 是微裂纹上的位错微元。设副裂纹中点的坐标为 $z_j^{(0)}(x_1^{(0)} + \mu_j x_2^{(0)})$，和 x_1 轴的夹角为 γ，则副裂纹上任一点的坐标为 $z_j = z_j^{(0)} + \xi(\cos\gamma + \mu_j\sin\gamma)$，位错的位置为$z_{0j} = z_j^{(0)} + \xi_0(\cos\gamma + \mu_j\sin\gamma)$，其中 ξ，ξ_0 为在副裂纹的中点为零、从一端点开始沿副裂纹计算的代数长度。由式(4－26b)知，作用在副裂纹上的面力可由 $\partial\boldsymbol{\Phi}/\partial\xi = \partial\boldsymbol{\Phi}^{(a)}/\partial\xi + \partial\boldsymbol{\Phi}^{(b)}/\partial\xi$ 得到。利用关系

$$\begin{aligned} \ln(\varsigma_j - \varsigma_{0j}) = &\ln[(\varsigma_j - \varsigma_{0j})(z_j - z_{0j})] - \ln(z_j - z_{0j}) = \\ &\ln[(\varsigma_j - \varsigma_{0j})(c_j\varsigma_j + d_j\varsigma_j^{-1} - c_j\varsigma_{0j} - d_j\varsigma_{0j}^{-1})] - \ln(z_j - z_{0j}) = \\ &\ln[(\varsigma_j - \varsigma_{0j})^2(c_j - d_j\varsigma_j^{-1}\varsigma_{0j}^{-1})] - \ln(z_j - z_{0j}) = \\ &2\ln(\varsigma_j - \varsigma_{0j}) + \ln(c_j - d_j\varsigma_j^{-1}\varsigma_{0j}^{-1}) - \ln(z_j - z_{0j}) \end{aligned}$$

由上式推出(重复指标 j 不求和)

$$\ln(\varsigma_j - \varsigma_{0j}) = -\ln(c_j - d_j\varsigma_j^{-1}\varsigma_{0j}^{-1}) + \ln(z_j - z_{0j})$$

$$\partial\ln(\varsigma_j-\varsigma_{0j})/\partial\xi=-\partial\ln[d_j(c_j/d_j-\varsigma_j^{-1}\varsigma_{0j}^{-1})]/\partial\xi+\partial\ln(z_j-z_{0j})/\partial\xi=$$
$$-(\partial\varsigma_j/\partial\xi)\{[(c_j/d_j)\varsigma_j^2\varsigma_{0j}-\varsigma_j]\}^{-1}+(z_j-z_{0j})^{-1}(\cos\gamma+\mu_j\sin\gamma)=$$
$$-(\partial\varsigma_j/\partial\xi)\{[(c_j/d_j)\varsigma_j^2\varsigma_{0j}-\varsigma_j]\}^{-1}-1/(\xi_0-\xi)$$

则由式(7－163)和(7－165)知，由裂纹面上广义应力为零的条件，可以得到

$$-\frac{1}{\pi}\int_{c_0}^{c_0}\mathrm{Im}\left(\boldsymbol{BB}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}\frac{1}{\xi_0-\xi}\right)\mathrm{d}\xi_0+\int_{-c_0}^{c_0}\boldsymbol{K}_1(\xi,\xi_0)\boldsymbol{b}\mathrm{d}\xi_0+\int_{-c_0}^{c_0}\boldsymbol{K}_2(\xi,\xi_0)\mathrm{d}\xi_0=-\boldsymbol{T}^{(a)}(\xi) \tag{7-166}$$

式中

$$\boldsymbol{T}^{(a)}(\xi)=\boldsymbol{\Sigma}_2^{\infty}\cos\gamma-\boldsymbol{\Sigma}_1^{\infty}\sin\gamma+\mathrm{Re}\left[\boldsymbol{B}\left\langle\frac{\partial\varsigma_j/\partial\xi}{\varsigma_j^2}\right\rangle\boldsymbol{B}^{-1}a(\boldsymbol{\Sigma}_2^{\infty}-D_2^{\mathrm{c}}\boldsymbol{i}_4)-\mathrm{i}b(\boldsymbol{\Sigma}_1^{\infty}-D_1^{\mathrm{c}}\boldsymbol{i}_4)\right]$$
$$\boldsymbol{K}_1(\xi,\xi_0)=-\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\left\{\boldsymbol{B}\left\langle\frac{\partial\varsigma_j/\partial\xi}{\varsigma_j[(c_j/d_j)\varsigma_j\varsigma_{0j}-1]}\right\rangle\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\right\}-$$
$$\frac{1}{\pi}\sum_{l=1}^{4}\mathrm{Im}\left[\boldsymbol{B}\left\langle\frac{\partial\varsigma_j/\partial\xi}{\varsigma_j(1-\varsigma_j\bar{\varsigma}_{0l})}\right\rangle\boldsymbol{B}^{-1}\bar{\boldsymbol{B}}\boldsymbol{I}_l\bar{\boldsymbol{B}}^{\mathrm{T}}\right] \tag{7-167}$$
$$\boldsymbol{K}_2(\xi,\xi_0)=-2\epsilon^{\mathrm{c}}\sum_{m=1}^{\infty}\mathrm{Im}\left\{\boldsymbol{B}\left\langle\frac{\delta\,\partial\varsigma_j/\partial\xi}{\varsigma_j^{m+1}}\right\rangle\boldsymbol{B}^{-1}[\bar{a}_m^{\mathrm{c}}-(d/c)^m a_m^{\mathrm{c}}]\boldsymbol{i}_4\right\}$$

对于绝缘椭圆孔，$\boldsymbol{K}_2=0$。推导上式时应用了下述公式

$$\frac{\partial f(z_j)}{\partial\xi}=\frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial\xi}+\frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial\xi}=(\cos\gamma+\mu_j\sin\gamma)\frac{\partial f}{\partial z_j}$$
$$\frac{\partial\varsigma_j}{\partial\xi}=\frac{\partial\varsigma_j}{\partial z_j}\frac{\partial z_j}{\partial\xi}=\frac{\varsigma_j^2}{c_j\varsigma_j^2-d_j}(\cos\gamma+\mu_j\sin\gamma) \tag{7-168}$$

当椭圆孔退化为裂纹时，核函数 $\boldsymbol{K}_2(\xi,\xi_0)$ 退化为

$$\boldsymbol{K}_2=\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\left\{\boldsymbol{B}\left\langle\frac{L_{4m}^{-1}}{L_{44}^{-1}}\left[B_{ml}\left\langle\frac{\partial\varsigma_j/\partial\xi}{\varsigma_j(\varsigma_j\varsigma_{0l}-1)}\right\rangle B_{pl}-\bar{B}_{ml}\left\langle\frac{\partial\varsigma_j/\partial\xi}{\varsigma_j(\varsigma_j\bar{\varsigma}_{0l}-1)}\right\rangle\bar{B}_{pl}\right]b_p\right\rangle\boldsymbol{B}^{-1}\right\}\boldsymbol{i}_4 \tag{7-169}$$

令 $l'=\xi_0/c_0$，$l=\xi/c_0$，则式(7－166)可以写成

$$-\frac{1}{\pi}\int_{1}^{1}\mathrm{Im}[\boldsymbol{BB}^{\mathrm{T}}]\boldsymbol{b}(l')\frac{1}{l'-l}\boldsymbol{b}\mathrm{d}l'+\int_{-1}^{1}\boldsymbol{K}_1(l',l)\boldsymbol{b}\mathrm{d}l'+\int_{-1}^{1}\boldsymbol{K}_2(l',l)\mathrm{d}l'=-\boldsymbol{T}^{(a)}(l) \tag{7-170}$$

式中 $|l|<1$。围绕裂纹闭围线的广义位移单值性条件要求

$$\int_{-1}^{1}\boldsymbol{b}(l')\mathrm{d}l'=\boldsymbol{0} \tag{7-171}$$

因为 $\boldsymbol{b}$ 具有可积奇异性，因而引入正则函数 $\hat{\boldsymbol{b}}$

$$\hat{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{b}\sqrt{1-l'^2} \tag{7-172}$$

这样便把原问题化为一组奇异积分方程式(7-170)~(7-172)。这组奇异积分方程可用数值方法求解。在区间[-1, 1]按下列方法选择配点

$$l'_i=\cos\frac{(2i-1)\pi}{2n},\quad l_r=\cos\frac{r\pi}{n},\ i=1,2,\cdots,n,\ r=1,2,\cdots,n-1 \tag{7-173}$$

从而,对于绝缘孔($\boldsymbol{K}_2=\hat{\boldsymbol{K}}_2=\boldsymbol{0}$)和椭圆孔退化为主裂纹的情形,奇异积分方程组化为如下的代数方程组

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\hat{\boldsymbol{b}}(l'_i)\left\{\mathrm{Im}[\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}]\frac{1}{l'_i-l_r}-\pi\boldsymbol{K}_1(l'_i-l_r)-\pi\hat{\boldsymbol{K}}_2(l'_i-l_r)\right\}=\boldsymbol{T}^{(a)}(l_r)\\&\sum_{i=1}^{n}\hat{\boldsymbol{b}}(l'_i)=0\end{aligned} \tag{7-174}$$

$$\hat{\boldsymbol{K}}_2=\frac{1}{\pi}\mathrm{Im}\left\{\boldsymbol{B}\left\langle\frac{L_{4m}^{-1}}{L_{44}^{-1}}\left[B_{ml}\left\langle\frac{\partial\varsigma_j/\partial\xi}{\varsigma_j(\varsigma_j\varsigma_{0l}-1)}\right\rangle B_{pl}-\overline{B}_{ml}\left\langle\frac{\partial\varsigma_j/\partial\varsigma}{\varsigma_j(\varsigma_j\varsigma_{0l}-1)}\right\rangle\overline{B}_{pl}\right]\right\rangle\boldsymbol{B}^{-1}\right\}\boldsymbol{i}_4$$

上式给出 $4(n-1)+4=4n$ 个方程,正好解 $4n$ 个未知量。求出配置点上的$\hat{\boldsymbol{b}}$后,它在两个端点的值便是

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{b}}(1)&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin[(2i-1)(2n-1)\pi/4n]}{\sin[(2i-1)\pi/4n]}\hat{\boldsymbol{b}}(l'_i)\\\hat{\boldsymbol{b}}(-1)&=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{\sin[(2i-1)(2n-1)\pi/4n]}{\sin[(2i-1)\pi/4n]}\hat{\boldsymbol{b}}(l'_{n+1-i})\end{aligned} \tag{7-175}$$

裂纹右尖端的广义应力渐近解为

$$\boldsymbol{T}(l)=\mathrm{i}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\frac{\hat{\boldsymbol{b}}(l)}{\sqrt{l^2-1}},\ l=1+\varepsilon,\ \varepsilon(>0)\to 0 \tag{7-176}$$

由上式推出副裂纹裂尖的广义应力强度因子为

$$\begin{aligned}&[K_{\mathrm{I}},K_{\mathrm{II}},K_{\mathrm{III}},K_{\mathrm{D}}]^{\mathrm{T}}=\lim_{l\to\pm1}\sqrt{2\pi(l-1)}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{T}(l)=-\mathrm{i}\sqrt{\pi c}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{b}}(1)\\&\boldsymbol{Q}=\begin{bmatrix}-\sin\gamma&\cos\gamma&0&0\\\cos\gamma&\sin\gamma&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{7-177}$$

如椭圆孔退化为主裂纹,则主裂纹裂尖的广义应力强度因子可写成

$$\begin{aligned}&[K_{\mathrm{I}},K_{\mathrm{II}},K_{\mathrm{III}},K_{\mathrm{D}}]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{K}^{(0)}+\overline{\boldsymbol{K}}\\&\boldsymbol{K}^{(0)}=\sqrt{\pi a}(\boldsymbol{\Sigma}_2^{\infty}-D_2^{c}\boldsymbol{i}_4),\ \overline{\boldsymbol{K}}=\int_{-c_0}^{c_0}\mathrm{d}\boldsymbol{K}=\int_{-1}^{1}\boldsymbol{P}(l')\boldsymbol{b}(l')\mathrm{d}l'=\frac{\pi}{n}\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{P}(l')\hat{\boldsymbol{b}}(l')\end{aligned} \tag{7-178}$$

式中 $\boldsymbol{P}$ 是一个有界的较为复杂的函数,此处略去。

7.6.5 数值例题

本节讨论的基体材料 PZT－4，材料常数见 5.3.6 节。

(1) 讨论 $\gamma=0$，$d=a=2c_0$，$b=0$ 时，无穷远处承受相同的机械载荷 σ_2^{∞} 和不同电载荷时的情形。图 7－15(a)和(b)分别表示主裂纹和副裂纹右裂尖处的就范化应力强度因子 $K_{\mathrm{I}}/K_{\mathrm{I}}^{(0)}$，$K_{\mathrm{I}}^{(m)}/K_{\mathrm{I}}^{(0)}$ ($K_{\mathrm{I}}^{(0)}=\sqrt{\pi a}\sigma_2^{\infty}$) 随 α 的变化。

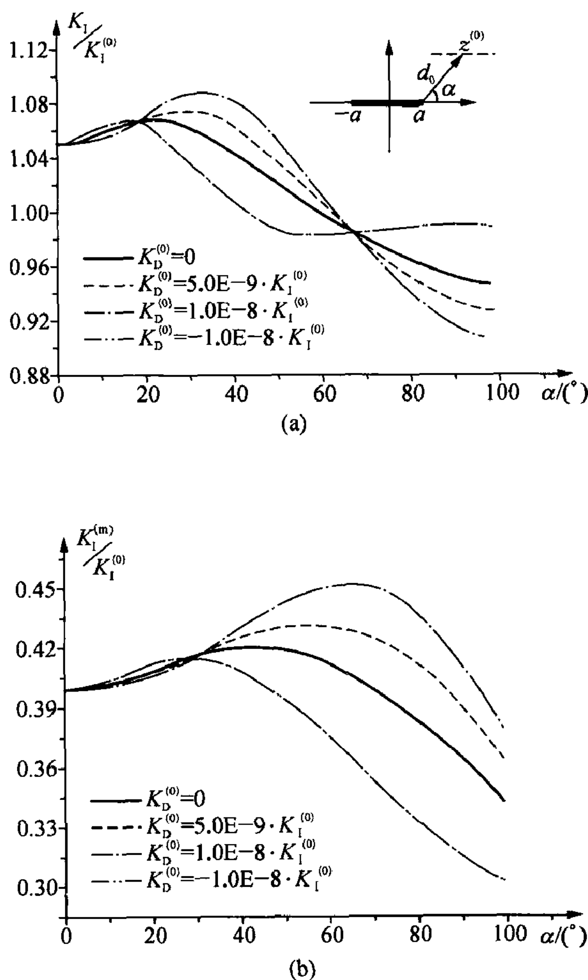
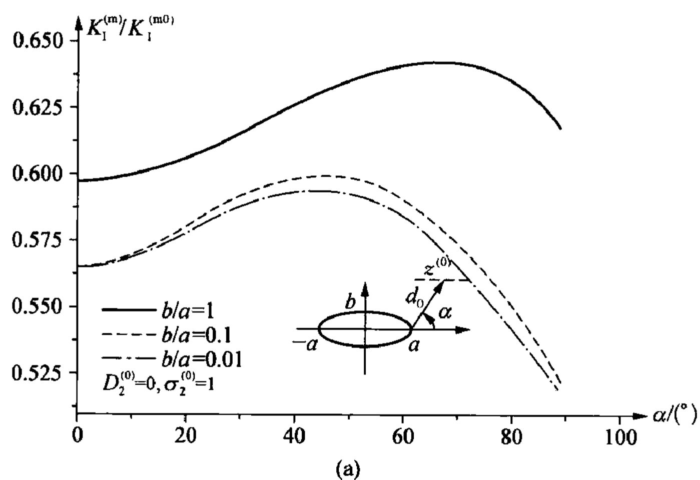


图 7－15

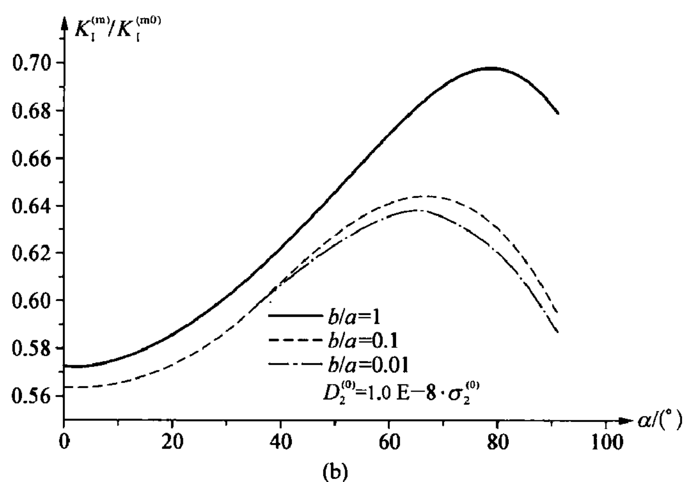
(a) 主裂纹右裂尖处的就范化应力强度因子 $K_{\mathrm{I}}/K_{\mathrm{I}}^{(0)}$ 随 α 的变化；

(b) 副裂纹右裂尖处的就范化应力强度因子 $K_{\mathrm{I}}^{(m)}/K_{\mathrm{I}}^{(0)}$ 随 α 的变化

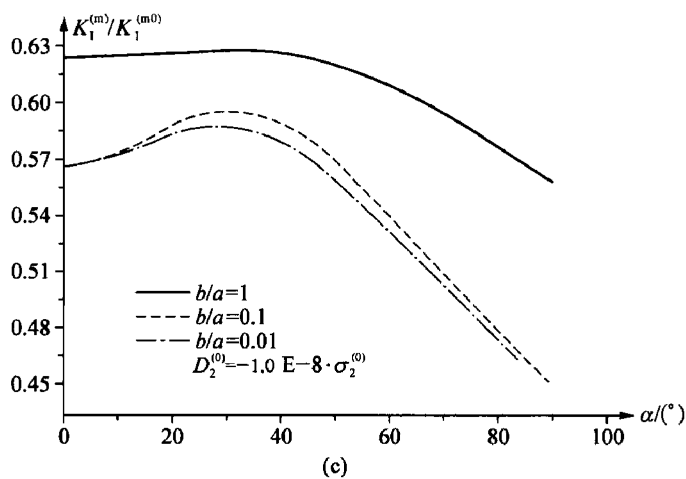
(2) 讨论 $\gamma=0$，$d=a=2c_0$，b/a 取不同值时，无穷远处承受相同的机械载荷 σ_2^{∞} 和不同电载荷时的情形。图 7－16(a)、(b)和(c)分别表示不同电载荷时副裂纹右裂尖处的就范化应力强度因子 $K_{\mathrm{I}}^{(m)}/K_{\mathrm{I}}^{(m0)}$ ($K_{\mathrm{I}}^{(m0)}=\sqrt{\pi c_0}\sigma_2^{\infty}$) 随 α 的变化。



(a)



(b)



(c)

图 7－16　不同电载荷时副裂纹右裂尖处的就范化应力强度因子 $K_I^{(m)}/K_I^{(m0)}$ 随 α 的变化

(3) 讨论 $\gamma=0$，$d=a=2c_0$，b/a 取不同值时，无穷远处承受相同的机械载荷 σ_2^∞ 和不同电载荷时的情形。图 7-17(a)和(b)分别表示不同 b/a 时椭圆孔右端点处的就范化应力 σ_2/σ_2^∞ 随 α 的变化

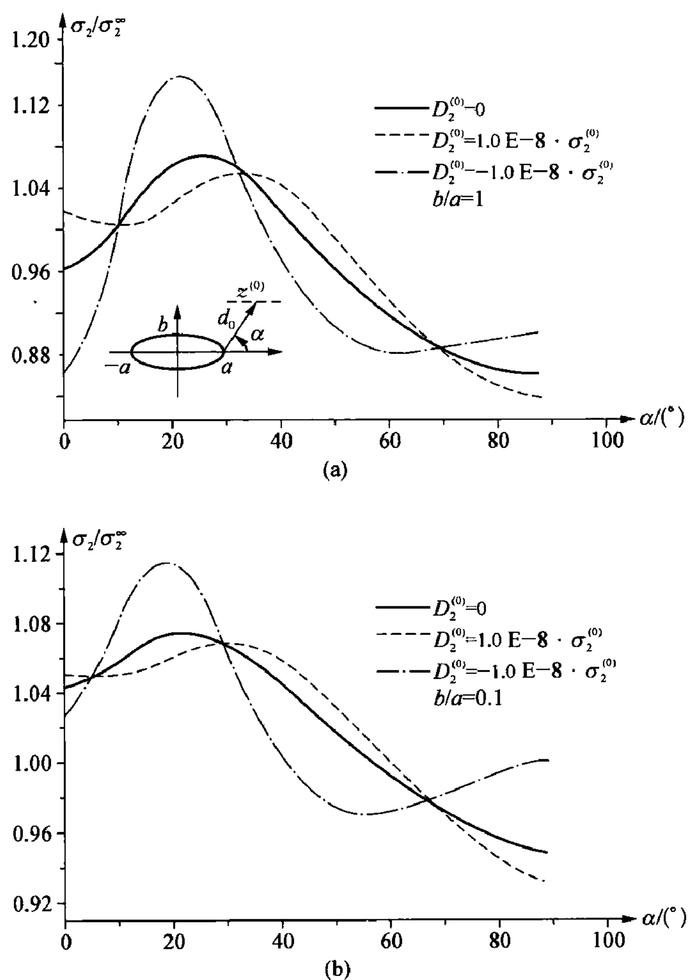


图 7-17 不同 b/a 时椭圆孔右端点处的就范化应力 σ_2/σ_2^∞ 随 α 的变化

第8章

各向同性电致伸缩材料

8.1 无限电致伸缩材料板中的椭圆孔[107, 108]

8.1.1 基本概念与控制方程

电致伸缩是指在外电场作用下电介质所产生的与场强二次方成正比的应变，是一种高阶非线性耦合效应. 这种效应由电场中电介质的极化所引起，并可发生在所有的电介质中，其特征是应变的正负与外电场方向无关。电致伸缩陶瓷 PMN－PT、电致伸缩聚合物 EPs、聚氨酯(PUE)等材料能在强电场作用下产生很大的电致应变，其优点是电场应变关系稳定，机电耦合的滞后效应及老化现象均比铁电性压电陶瓷小得多，因而常用于压力测量器件，连续可调激光器、传感器、换能器、驱动器等。电致伸缩材料的本构关系已在第 3 章 3.3.1 节讨论过，如式(3－33)～(3－36)。本章中讨论等温各向同性材料，取用的本构方程为

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}(a_1 E_i E_j + a_2 E_k E_k \delta_{ij}) \\
&D_i = \tilde{\epsilon}_{ij} E_j\,,\ \tilde{\epsilon}_{ij} = \epsilon \delta_{ij} + a_1 \varepsilon_{ij} + a_2 \varepsilon_{kk} \delta_{ij}\,,\ E_i = -\varphi_{,i}
\end{aligned}
\tag{8-1}
$$

式中 a_1，a_2 是等温各向同性材料中的电致伸缩系数。取用的控制方程为式(3－56)、(3－58)、(3－59)和(3－60)，即场方程为

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\sigma}_{kl,l} + f_k = \rho \ddot{u}_k\,,\quad D_{k,k} = \rho_e \qquad (\text{在电介质内}) \\
&\tilde{\sigma}^{\text{env}}_{ij,j} + f^{\text{env}}_i = \rho \ddot{u}^{\text{env}}_i\,,\quad D^{\text{env}}_{i,i} = \rho^{\text{env}}_e \qquad (\text{在环境内})
\end{aligned}
\tag{8-2}
$$

边界条件为

$$
\begin{aligned}
&\tilde{\sigma}_{kl} n_l = T^*_k \quad (\text{在 } a_\sigma \text{ 上}), && D_k n_k = -\sigma^* \quad (\text{在 } a_D \text{ 上}) \\
&u_i = u^*_i \quad (\text{在 } a_u \text{ 上}), && \varphi = \varphi^* \quad (\text{在 } a_\varphi \text{ 上}) \\
&\tilde{\sigma}^{\text{env}}_{ij} n^{\text{env}}_j = T^{*\,\text{env}}_i \quad (\text{在 } a^{\text{env}}_\sigma \text{ 上}), && D^{\text{env}}_i n^{\text{env}}_i = -\sigma^{*\,\text{env}} \quad (\text{在 } a^{\text{env}}_D \text{ 上}) \\
&u^{\text{env}}_i = u^{*\,\text{env}}_i \quad (\text{在 } a^{\text{env}}_u \text{ 上}), && \varphi^{\text{env}} = \varphi^{*\,\text{env}} \quad (\text{在 } a^{\text{env}}_\varphi \text{ 上})
\end{aligned}
\tag{8-3}
$$

界面连接条件为

$$
\begin{aligned}
&(\tilde{\sigma}_{ij} - \tilde{\sigma}^{\text{env}}_{ij}) n_j = T^{*\,\text{itf}}_i\,,(\text{在 } a^{\text{itf}} \text{ 上}) \quad (D_i - D^{\text{env}}_i) n_i = -\sigma^{*\,\text{itf}} \\
&u_i = u^{\text{env}}_i\,,\quad \varphi = \varphi^{\text{env}}
\end{aligned}
\tag{8-4}
$$

上列诸式中带上标“env”的量表示环境中的物理量，带“itf”的量表示界面上的物理量，不带上标的量表示电介质中的物理量；$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$为伪总应力，$\boldsymbol{\sigma}^{\text{M}}$ 为 Maxwell 应力，且有

$$\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}},\ \boldsymbol{\sigma}^{\mathrm{M}} = \boldsymbol{E} \otimes \boldsymbol{D} - \frac{1}{2}(\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D})\boldsymbol{I},\quad \sigma_{ij}^{\mathrm{M}} = E_i D_j - \frac{1}{2} E_m D_m \delta_{ij} \tag{8-5}$$

对于伪总应力，它和应变存在下列关系

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_{ij} &= \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}(2\epsilon + 2a_2\varepsilon_{kk} - a_1)E_iE_j + a_1\varepsilon_{jm}E_mE_i - \\ &\frac{1}{2}(a_2 + a_2\varepsilon_{kk} + \epsilon)E_kE_k\delta_{ij} - \frac{1}{2}a_1\varepsilon_{mn}E_mE_n\delta_{ij} \approx \\ &\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}[(2\epsilon - a_1)E_iE_j - (a_2 + \epsilon)E_kE_k\delta_{ij}]\end{aligned} \tag{8-6}$$

上式中略去了含 $a_m\varepsilon_{ij}$ 的项，因其和 a_m 相比甚小。对于陶瓷材料，$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}$ 的差别很小，但对电致伸缩聚合物变形很大时，ϵ和 $a_m\varepsilon_{ij}$ 是否可能成为同一量级，需要研究，$\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$ 和 $\boldsymbol{\sigma}$ 的差别可能较大。

8.1.2 无限电致伸缩材料板中椭圆孔问题的一般解法

Kuang 和 Jiang[107]，Jiang 和 Kuang[108]讨论了无穷远处承受广义载荷 $\boldsymbol{\sigma}^{\infty}$，$\boldsymbol{E}^{\infty}$的带有椭圆孔的无限电致伸缩材料板的问题。并且假设椭圆孔的边界上没有广义载荷，即没有外力和法向电位移，进一步设孔内没有电场，从而在椭圆孔边界上孔内空气一侧不存在 Maxwell 应力，因而可以不考虑环境，只需单独考虑电介质；又设介质内部不存在电荷，从而有 $D_{k,k}=0$。对于小变形问题，应变很小，因而在式(8-1)中含位移的项对电位移的影响可以略去，从而电场便成为线性问题，且和应变无关。此时有

$$D_{k,k} = 0,\quad D_i = \epsilon E_i,\ E_i = -\varphi_{,i};\quad \nabla^2\varphi = \varphi_{,ii} = 0 \tag{8-7}$$

由于电势 φ 是调和函数，因而可表成某个电场复势 $w(z)$，$z = x_1 + \mathrm{i}x_2$ 的实部，即

$$w(z) = \varphi(x_1, x_2) + \mathrm{i}A(x_1, x_2),\ \varphi(x_1, x_2) = \mathrm{Re}w(z) = [w(z) + \overline{w(z)}]/2 \tag{8-8}$$

有时称 A 为流函数。利用 Cauchy-Riemann 条件 $\partial\varphi/\partial x_1 = \partial A/\partial x_2$，$\partial\varphi/\partial x_2 = -\partial A/\partial x_1$ 和关系 $x_1 = (z+\bar{z})/2$，$x_2 = (z-\bar{z})/2\mathrm{i}$，由上式可推出

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} &= \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z} + \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}z} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial z} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial z}\right) + \mathrm{i}\left(\frac{\partial A}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial z} + \frac{\partial A}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial z}\right) = \\ &\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} - \mathrm{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right) + \frac{\mathrm{i}}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial x_1} - \mathrm{i}\frac{\partial A}{\partial x_2}\right) = -\overline{E} = -(E_1 - \mathrm{i}E_2) \\ E &= E_1 + \mathrm{i}E_2 = -\overline{w'(z)}\end{aligned} \tag{8-9}$$

式中 $w(z)$是 z 的解析函数，φ 是任何区域的单值函数。这样，电场问题便成为和应力场无关的线性问题，从而可以先单独求解。解出电场和电位移后，再把它们代入应力的控制方程，此时机械变量的控制方程也就成为求解应力或位移的线性方程。由于本问题假设电介质和环境问题解耦，所以下面只讨论电介质问题。

二维问题的协调方程为

$$2\varepsilon_{12,12} = \varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} \tag{8-10}$$

下面讨论平面应变问题 $\varepsilon_{i3} = 0$，$(i = 1, 2, 3)$，此时二维问题的伪本构方程可以写成

$$\widetilde{\sigma}_{\alpha\beta} = \lambda\varepsilon_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} + 2G\varepsilon_{\alpha\beta} + aE_\alpha E_\beta + bE_\gamma E_\gamma\delta_{\alpha\beta}$$
$$a = (2\epsilon - a_1)/2,\ b = -(a_2 + \epsilon)/2,\ \alpha,\ \beta = 1,\ 2 \tag{8-11a}$$

由式(8－11a)推出，对平面应变有 $\varepsilon_{\gamma\gamma} = \dfrac{\widetilde{\sigma}_{\gamma\gamma}}{2(\lambda+G)} + \dfrac{a+2b}{2(\lambda+G)}E_\gamma E_\gamma$，从而有

$$2G\varepsilon_{\alpha\beta} = \widetilde{\sigma}_{\alpha\beta} - \frac{\lambda\,\widetilde{\sigma}_{\gamma\gamma}}{2(\lambda+G)}\delta_{\alpha\beta} - aE_\alpha E_\beta - \frac{\lambda a + 2Gb}{2(\lambda+G)}E_\gamma E_\gamma\delta_{\alpha\beta}$$
$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{E_{弹}}\{\widetilde{\sigma}_{\alpha\beta} - \nu\,\widetilde{\sigma}_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta} - aE_\alpha E_\beta - [\nu a + (1-2\nu)b]E_\gamma E_\gamma\delta_{\alpha\beta}\} \tag{8-11b}$$

代入协调方程(8－10)，便得用伪总应力$\widetilde{\boldsymbol{\sigma}}$表示的协调方程

$$2(\widetilde{\sigma}_{12} - aE_1E_2)_{,12} = \left[\widetilde{\sigma}_{11} - \frac{\lambda\,\widetilde{\sigma}_{\gamma\gamma}}{2(\lambda+G)} - aE_1E_1 + \frac{\lambda a - 2Gb}{2(\lambda+G)}E_\gamma E_\gamma\right]_{,22} + \left[\widetilde{\sigma}_{22} - \frac{\lambda\,\widetilde{\sigma}_{\gamma\gamma}}{2(\lambda+G)} - aE_2E_2 + \frac{\lambda a - 2Gb}{2(\lambda+G)}E_\gamma E_\gamma\right]_{,11} \tag{8-12}$$

令$\widetilde{U}$为伪总应力函数，置

$$\widetilde{\sigma}_{11} = \frac{\partial^2\widetilde{U}}{\partial x_2^2},\quad \widetilde{\sigma}_{22} = \frac{\partial^2\widetilde{U}}{\partial x_1^2},\quad \widetilde{\sigma}_{12} = -\frac{\partial^2\widetilde{U}}{\partial x_1\,\partial x_2},\quad 或\widetilde{\sigma}_{\alpha\beta} = \nabla^2\widetilde{U}\delta_{\alpha\beta} - \widetilde{U}_{,\alpha\beta} \tag{8-13}$$

则平衡方程式(8－2)自动满足。把上式代入式(8－12)，经过复杂的推演得

$$\nabla^4\widetilde{U} = \kappa\nabla^2(E_\gamma E_\gamma),\quad \frac{\partial^4\widetilde{U}}{\partial z^2\,\partial\overline{z}^2} = \frac{\kappa}{4}\frac{\partial^4}{\partial z^2\,\partial\overline{z}^2}[w'(z)\,\overline{w'(z)}] = \frac{\kappa}{4}\frac{\partial^2 w'}{\partial z^2}\frac{\partial^2\overline{w'}}{\partial\overline{z}^2} \tag{8-14}$$

式中

$$\kappa = -\frac{G(a_1+2a_2)}{2(\lambda+2G)} = -\frac{1-2\nu}{4(1-\nu)}(a_1+2a_2) \tag{8-15}$$

式中 ν 为泊松比。先求出式(8－14)的特解，再应用 Мусхелишвили 的公式求出通解，其解最终为

$$\widetilde{U}(x_1,\ x_2) = \frac{\kappa}{4}w(z)\,\overline{w(z)} + \frac{1}{2}[z\,\overline{\phi(z)} + \overline{z}\phi(z) + \chi(z) + \overline{\chi(z)}] \tag{8-16}$$

式中 $\phi(z)$，$\chi(z)$是 z 的两个任意的解析函数。进而由式(8－13)和(8－16)，可求出

$$\widetilde{\sigma}_{22} + \widetilde{\sigma}_{11} = \kappa w'(z)\,\overline{w'(z)} + 2[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}]$$
$$\widetilde{\sigma}_{22} - \widetilde{\sigma}_{11} + 2\mathrm{i}\,\widetilde{\sigma}_{12} = \kappa w''(z)\,\overline{w(z)} + 2[\overline{z}\phi''(z) + \psi'(z)] \tag{8-17}$$

式中 $\psi(z) = \chi'(z)$。由式(8－5)，可推出

$$\sigma_{22}^{\mathrm{M}} + \sigma_{11}^{\mathrm{M}} = 0,\quad \sigma_{22}^{\mathrm{M}} - \sigma_{11}^{\mathrm{M}} + 2\mathrm{i}\sigma_{12}^{\mathrm{M}} = -\epsilon\Omega'(z),\ \Omega'(z) = [w'(z)]^2 \tag{8-18}$$

从而机械应力可表为

$$\sigma_{22} + \sigma_{11} = \kappa w'(z)\,\overline{w'(z)} + 2[\phi'(z) + \overline{\phi'(z)}]$$
$$\sigma_{22} - \sigma_{11} + 2\mathrm{i}\sigma_{12} = \kappa w''(z)\,\overline{w(z)} + 2[\overline{z}\phi''(z) + \psi'(z)] + \epsilon\Omega'(z) \tag{8-19}$$

位移可表为

$$2G(u_1+\mathrm{i}u_2)=K\phi(z)-z\overline{\phi'(z)}-\overline{\psi(z)}-(\kappa/2)w(z)\overline{w'(z)}+\alpha_1\overline{\Omega(z)}$$
$$K=(3-4\nu),\ \alpha_1=(a_1-2\epsilon)/4,\ \Omega(z)=\int\Omega'(z)\mathrm{d}z \tag{8-20}$$

对于平面应力，上列诸式中的 ν, E, a_1, a_2 应当替换为

$$\frac{\nu}{1+\nu},\ \frac{E(1+2\nu)}{(1+\nu)^2},\ a_1,\ \frac{1-2\nu}{1-\nu}a_2 \tag{8-21}$$

由于本问题中可以不考虑环境，类似于 Мусхелишвили 的公式，应力边界条件可写成

$$\mathrm{i}(P_1+\mathrm{i}P_2)=\mathrm{i}\int_A^B(\tilde{T}_1^*+\mathrm{i}\,\tilde{T}_2^*)\mathrm{d}s=2\left.\frac{\partial\tilde{U}}{\partial\bar{z}}\right|_A^B=\left[z\overline{\phi'(z)}+\phi(z)+\overline{\psi(z)}+\frac{1}{2}\kappa w(z)\overline{w'(z)}\right]_A^B \tag{8-22}$$

式中 A, B 为边界上的两点，P_1, P_2 是边界上 AB 段上的合力；$\tilde{T}_i^*=\tilde{\sigma}_{ij}n_j$。

8.1.3 无限电致伸缩材料板中绝缘椭圆孔问题的电场

设无穷远处和孔边界上的边界条件为

$$\sigma_{ij}=\sigma_{ij}^{\infty},\quad E=E_1+\mathrm{i}E_2=E^{\infty}=E_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta},\ x_1^2+x_2^2\to\infty$$
$$\sigma_{ij}n_j=0,\quad D_in_i=0,\ (x_1,\ x_2)\ \text{在孔边界上} \tag{8-23}$$
$$E_0=\sqrt{(E_1^{\infty})^2+(E_2^{\infty})^2},\quad \tan\beta=E_2^{\infty}/E_1^{\infty}$$

采用保角变换方法求解。按式(1-52)，把椭圆孔变换为单位圆周的变换为

$$z=\omega(\varsigma)=R(\varsigma+m/\varsigma),\ \varsigma=(z+\sqrt{z^2-4mR^2})/2R \tag{8-24}$$

式中 $R=(a+b)/2$, $m=(a-b)/(a+b)$。在ς平面上，本问题一般解的形式可以写成

$$w(\varsigma)=\Gamma_3R\varsigma+w_0(\varsigma),\ \Gamma_3=-\overline{E}^{\infty} \tag{8-25}$$

式中 $w_0(\varsigma)$为待定的解析函数。本问题中，电场复势 $w(z)$可以表成

$$w(\varsigma)=-R\overline{E}^{\infty}(\varsigma+\alpha\varsigma^{-1})=-R(\overline{E}^{\infty}\varsigma+E^{\infty}\varsigma^{-1})$$
$$E=E_1+\mathrm{i}E_2=-\frac{\overline{w'(\varsigma)}}{\overline{\omega'(\varsigma)}}=E^{\infty}\frac{1-\bar{\alpha}\bar{\varsigma}^{-2}}{1-m\bar{\varsigma}^{-2}}=E^{\infty}\frac{\bar{\varsigma}^2-\bar{\alpha}}{\bar{\varsigma}^2-m}=\frac{E^{\infty}-\overline{E}^{\infty}\bar{\varsigma}^{-2}}{1-m\bar{\varsigma}^{-2}} \tag{8-26}$$

式中 $\alpha=E^{\infty}/\overline{E}^{\infty}=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\beta}$。显然，上式满足无穷远处的边界条件。现在来讨论椭圆孔边界上的边界条件，为此采用椭圆(曲线)坐标系比较方便。式(8-24)是保角变换，即 z 平面上两条曲线的夹角变换到ς平面上后，夹角不变。ς平面上 $\rho=$ 常数，$\vartheta=$ 常数的正交曲线变换到 z 平面上后，$\rho=$ 常数的曲线为椭圆，$\vartheta=$ 常数的曲线和椭圆正交，两者构成正交曲线坐标系(图 8-1)。令$\vartheta=$ 常数的坐标和 x_1 轴的夹角为 η，则在 z 平面上有

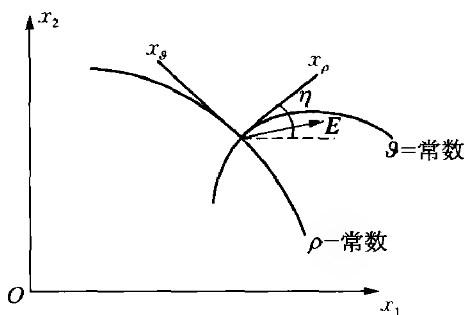


图 8-1 曲线坐标系中的矢量

$$E_\rho + \mathrm{i}E_\vartheta = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta}(E_1 + \mathrm{i}E_2), \quad \mathrm{d}z = |\mathrm{d}z|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta} \tag{8-27}$$

注意到在ς平面上 $\mathrm{d}\varsigma = |\mathrm{d}\varsigma|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}$，则按上式有

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta} = \frac{\mathrm{d}z}{|\mathrm{d}z|} = \frac{\omega'(\varsigma)\mathrm{d}\varsigma}{|\omega'(\varsigma)||\mathrm{d}\varsigma|} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}\frac{\omega'(\varsigma)}{|\omega'(\varsigma)|} = \frac{\varsigma}{\rho}\frac{\omega'(\varsigma)}{|\omega'(\varsigma)|}, \quad \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta} = \frac{\bar{\varsigma}}{\rho}\frac{\overline{\omega'(\varsigma)}}{|\omega'(\varsigma)|} \tag{8-28}$$

从而式(8-27)可化为

$$E_\rho + \mathrm{i}E_\vartheta = \frac{\bar{\varsigma}}{\rho}\frac{\overline{\omega'(\varsigma)}}{|\omega'(\varsigma)|}(E_1 + \mathrm{i}E_2) \tag{8-29}$$

在椭圆孔边界上 $\varsigma = \sigma = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}$，因此，在椭圆孔边界上有

$$E_\rho + \mathrm{i}E_\vartheta = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta}\frac{\overline{\omega'(\sigma)}}{|\omega'(\sigma)|}\frac{\overline{w'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta}\frac{\overline{w'(\sigma)}}{|\omega'(\sigma)|} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta}\frac{E^\infty - \bar{E}^\infty\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\vartheta}}{|1 - m\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\vartheta}|} = \frac{E^\infty\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta} - \bar{E}^\infty\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}}{|1 - m\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\vartheta}|}$$

$$E_\rho = 0, \quad E_\vartheta = 2E_0\sin(\beta - \vartheta)/|1 - m\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\vartheta}| \tag{8-30}$$

由上式见到 $E_\rho = 0$，即沿椭圆孔边界的法向电场为零，或 $D_n = 0$，满足孔的电学边界条件，所以式(8-26) 给出的电场复势 $w(z)$ 是问题的解。

8.1.4 无限电致伸缩材料板中绝缘椭圆孔问题的应力场

本问题应力复势一般解的形式可以写成

$$\phi(\varsigma) = \Gamma_1 R\varsigma + \phi_0(\varsigma), \quad \psi(\varsigma) = \Gamma_2 R\varsigma + \psi_0(\varsigma) \tag{8-31}$$

式中 $\phi_0(\varsigma)$，$\psi_0(\varsigma)$为待定的解析函数，而 Γ_1，Γ_2 由无穷远处的条件确定，即

$$\Gamma_1 = (\tilde{\sigma}_{22}^\infty + \tilde{\sigma}_{11}^\infty - \kappa E_k^\infty E_k^\infty)/4, \quad \Gamma_2 = (\tilde{\sigma}_{22}^\infty - \tilde{\sigma}_{11}^\infty + 2i\,\tilde{\sigma}_{12}^\infty)/2 \tag{8-32}$$

当孔边上没有外力时，注意到在ς平面上 $\phi(z) = \phi[\omega(\varsigma)] = \phi(\varsigma)$，$\phi'(z) = \phi'(\varsigma)/\omega'(\varsigma)$，边界条件式(8-22) 化为

$$\omega(\sigma)\,\overline{\phi'(\sigma)}/\overline{\omega'(\sigma)} + \phi(\sigma) + \overline{\psi(\sigma)} + \kappa w(\sigma)\,\overline{w'(\sigma)}/2\,\overline{\omega'(\sigma)} = 0 \tag{8-33}$$

把式(8-31)和(8-25)代入式(8-33)，便得

$$\omega(\sigma)\,\overline{\phi_0'(\sigma)}/\overline{\omega'(\sigma)} + \phi_0(\sigma) + \overline{\psi_0(\sigma)} + f(\sigma) = 0$$

$$f(\sigma) = R\Gamma_1\frac{\sigma^2 + m}{\sigma(1 - m\sigma^2)} + R\Gamma_1\sigma + \frac{R\bar{\Gamma}_2}{\sigma} + \frac{\kappa RE^\infty\,\bar{E}^\infty(1 - \bar{\alpha}\sigma^2)(\alpha + \sigma^2)}{2\sigma(1 - m\sigma^2)} \tag{8-34}$$

把式(8-34)和它的共轭方程乘以 $\mathrm{d}\sigma/[2\pi\mathrm{i}(\sigma - \varsigma)]$，再沿椭圆孔的边界闭围线积分，利用 Cauchy 积分公式，便得

$$\phi_0(\varsigma) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\frac{f(\sigma)\mathrm{d}\sigma}{\sigma - \varsigma} = -\frac{mR\Gamma_1}{\varsigma} - \frac{R\bar{\Gamma}_2}{\varsigma} - \frac{\kappa\alpha RE^\infty\,\bar{E}^\infty}{2\varsigma}$$

$$\psi_0(\varsigma) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\frac{\overline{f(\sigma)}\mathrm{d}\sigma}{\sigma - \varsigma} - \varsigma\frac{1 + m\varsigma^2}{\varsigma^2 - m}\phi_0'(\varsigma) = \tag{8-35}$$

$$-2R\Gamma_1\frac{(1 + m^2)\varsigma}{\varsigma^2 - m} - \frac{R\bar{\Gamma}_2(1 + m\varsigma^2)}{(\varsigma^2 - m)\varsigma} - \frac{\kappa RE^\infty\,\bar{E}^\infty[1 - \alpha\bar{\alpha} + (\alpha + \bar{\alpha})m]\varsigma}{2(\varsigma^2 - m)}$$

由式(8 - 31)和(8 - 35)推出

$$\phi(\varsigma)=\Gamma_1R\varsigma-\frac{mR\Gamma_1}{\varsigma}-\frac{R\overline{\Gamma}_2}{\varsigma}-\frac{\kappa\alpha RE^{\infty}\overline{E}^{\infty}}{2\varsigma}$$

$$\psi(\varsigma)=\Gamma_2R\varsigma-2R\Gamma_1\frac{1+m^2}{\varsigma^2-m}\varsigma-\frac{R\overline{\Gamma}_2(1+m\varsigma^2)}{(\varsigma^2-m)\varsigma}-\frac{\kappa RE^{\infty}\overline{E}^{\infty}[1-\alpha\bar{\alpha}+(\alpha+\bar{\alpha})m]\varsigma}{2(\varsigma^2-m)}$$

(8 - 36a)

对于 $\alpha=-1$ 的特殊情形,即当 $E_1=0$ 时,$E_{\infty}=\mathrm{i}E_2^{\infty}$, $E^{\infty}\overline{E}^{\infty}=E_2^{\infty 2}$,式(8 - 36a) 化为

$$\phi(\varsigma)=\Gamma_1R\varsigma-\frac{mR\Gamma_1}{\varsigma}-\frac{R\overline{\Gamma}_2}{\varsigma}+\frac{\kappa RE_2^{\infty 2}}{2\varsigma}$$

$$\psi(\varsigma)=\Gamma_2R\varsigma-2R\Gamma_1\frac{1+m^2}{\varsigma^2-m}\varsigma-\frac{R\overline{\Gamma}_2(1+m\varsigma^2)}{(\varsigma^2-m)\varsigma}+\frac{\kappa RE_2^{\infty 2}\varsigma}{(\varsigma^2-m)}$$

(8 - 36b)

从而求得介质内的应力为

$$\sigma_{22}+\sigma_{11}=\kappa\frac{w'(\varsigma)}{\omega'(\varsigma)}\overline{\frac{w'(\varsigma)}{\omega'(\varsigma)}}+2\left[\frac{\phi'(\varsigma)}{\omega'(\varsigma)}+\overline{\frac{\phi'(\varsigma)}{\omega'(\varsigma)}}\right]=$$

$$\kappa E^{\infty}\overline{E}^{\infty}\frac{\varsigma^2-\alpha}{\varsigma^2-m}\frac{\bar{\varsigma}^2-\bar{\alpha}}{\bar{\varsigma}^2-m}-2\mathrm{Re}\left[\frac{\kappa\alpha E^{\infty}\overline{E}^{\infty}+2\Gamma_1(\varsigma^2+m)+2\overline{\Gamma}_2}{\varsigma^2-m}\right]$$

(8 - 37a)

$$\sigma_{22}-\sigma_{11}+2\mathrm{i}\sigma_{12}=\kappa\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varsigma}\left[\frac{w'(\varsigma)}{\omega'(\varsigma)}\right]\overline{w(\varsigma)}+2\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varsigma}\left[\frac{\phi'(\varsigma)}{\omega'(\varsigma)}\right]\overline{\omega'(\varsigma)}+\frac{\psi'(\varsigma)}{\omega'(\varsigma)}\right\}+\epsilon\left[\frac{w'(\varsigma)}{\omega'(\varsigma)}\right]^2=$$

$$\frac{2\kappa E^{\infty}\overline{E}^{\infty}(\alpha-m)\varsigma^3(\bar{\varsigma}^2+\bar{\alpha})}{(\varsigma^2-m)^3\bar{\varsigma}}+2\left\{\frac{-(\kappa\alpha E^{\infty}\overline{E}^{\infty}+4m\Gamma_1+2\overline{\Gamma}_2)\varsigma^3(\bar{\varsigma}^2+m)}{(\varsigma^2-m)^3\bar{\varsigma}}+\right.$$

$$\frac{\Gamma_2\varsigma^2}{\varsigma^2-m}+\frac{\kappa E^{\infty}\overline{E}^{\infty}[1-\alpha\bar{\alpha}+(\alpha+\bar{\alpha})m]\varsigma^2(\varsigma^2+m)}{2(\varsigma^2-m)^3}+\frac{2\Gamma_1(1+m^2)\varsigma^2(\varsigma^2+m)}{(\varsigma^2-m)^3}+$$

$$\left.\frac{\overline{\Gamma}_2[m\varsigma^4+(m^2+3)\varsigma^2-m]}{(\varsigma^2-m)^3}\right\}+\frac{\epsilon(E^{\infty})^2(\varsigma^2+1)^2}{(\varsigma^2-m)^2}$$

(8 - 37b)

至此,求解完毕,电场由式(8 - 26)表示,应力由式(8 - 37)表示。

8.1.5 绝缘椭圆孔长轴端部附近的渐近应力场

在 z 平面和ς平面上分别选取原点在 z_0 和ς_0 的局部坐标系,$\varsigma_0=\pm\sqrt{m}$ 是 $\omega(\varsigma)$ 的分支点,在 z 平面上它对应于$z_0=R(\varsigma_0+m\varsigma_0^{-1})=\pm\sqrt{a^2-b^2}$,为椭圆的焦点。下面讨论椭圆的右端点,所以取$\varsigma_0=\sqrt{m}$,和 $z_0=\sqrt{a^2-b^2}=c$,其中 $2c$ 为焦距。现在来分析椭圆长轴右端点附近的渐近应力场。由于在以椭圆的焦点为原点的局部坐标系中,细长椭圆端部的渐近场具有和裂尖渐近场相同的结构。设ς趋近ς_0,令

$$z=z_0+z_1,\ z_0=c,\ z_1=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta};\quad \varsigma=\varsigma_0+\varsigma_1,\ \varsigma_0=\sqrt{m},\ \varsigma_1=\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\qquad(8-38)$$

利用式(8 - 24)和(8 - 38),略去含ς_1^3的项后,有

$$z_1 = R\left(1-\frac{m}{\varsigma_0^2}\right)\varsigma_1 + R\frac{m}{\varsigma_0^3}\varsigma_1^2 - R\frac{m}{\varsigma_0^4}\varsigma_1^3 = \frac{R}{\sqrt{m}}\varsigma_1^2 - \frac{R}{m}\varsigma_1^3 \tag{8-39}$$

在极坐标中则有

$$re^{i\eta} = \frac{R}{\sqrt{m}}\rho^2 e^{2i\theta} - \frac{R}{m}\rho^3 e^{3i\theta} \approx \frac{R}{\sqrt{m}}\rho^2 e^{2i\theta},\ \rho \approx m^{1/4}\sqrt{r/R},\ \theta \approx \eta/2 \tag{8-40}$$

令 ρ_0 为椭圆端部的曲率半径,则有

$$a = \sqrt{c^2+b^2} = \rho_0 + \sqrt{c^2+\rho_0^2},\ \rho_0 = b^2/2a;\quad R = (c+\sqrt{2a\rho_0})/2 \tag{8-41}$$

下面讨论无穷远处只有电场作用的情形,此时按式(8-32)有 $\Gamma_1 = -\kappa E_k^\infty E_k^\infty/4$, $\Gamma_2 = 0$。由式(8-37)、(8-40)和(8-41),并注意到 $\theta = 0$ 时 $\eta = 0$,便可得到沿 x_1 轴的应力和电场的渐近展开式

$$\begin{aligned}(\sigma_{22}+\sigma_{11})(\kappa E^\infty \overline{E}^\infty)^{-1} = {} & \frac{1}{4}(1-\alpha)(1-\overline{\alpha})\frac{c}{r} + \frac{1}{4}\Big[\sqrt{2}(1-\alpha-\overline{\alpha}+\alpha\overline{\alpha}) + \\ & 2\sqrt{2}(2\alpha\overline{\alpha}-\alpha-\overline{\alpha})\sqrt{\frac{\rho_0}{r}}\Big]\sqrt{\frac{c}{r}} + \frac{1}{8}\Big\{[(3-\alpha-\overline{\alpha}+3\alpha\overline{\alpha})-16\alpha\overline{\alpha}]\cdot \\ & \sqrt{\frac{\rho_0}{r}} + 8(4\alpha\overline{\alpha}-\alpha-\overline{\alpha})\frac{\rho_0}{r}\Big\} + 0(r)\end{aligned} \tag{8-42a}$$

$$\begin{aligned}&(\sigma_{22}-\sigma_{11}+2i\sigma_{12})(\kappa E^\infty \overline{E}^\infty)^{-1} = \\ &(1/8)\{(1-\alpha)[2(\epsilon/\kappa)(1-\alpha)/\alpha+(1-\overline{\alpha})]+2(1-\alpha)(1-\overline{\alpha})\sqrt{\rho_0/r}\}c/r-(\sqrt{2}/8)\cdot \\ &\{[8(\epsilon/\kappa)(1-\alpha)+(-3+\alpha+\overline{\alpha}+\alpha\overline{\alpha})]\sqrt{\rho_0/r}+(1-\alpha)\cdot \\ &[2(\epsilon/\kappa)(3+\alpha)/\alpha-(1-\overline{\alpha})]-2(1+\alpha+\overline{\alpha}-3\alpha\overline{\alpha})\rho_0/r\}\sqrt{c/r}+(1/4)\cdot \\ &\{[8(\epsilon/\kappa)(-1+2\alpha)-(3+\alpha+\overline{\alpha}-\alpha\overline{\alpha})]\rho_0/r+ \\ &[8(\epsilon/\kappa)(1+\alpha)-(1+\alpha+\overline{\alpha}-3\alpha\overline{\alpha})]\sqrt{p_0/r}+ \\ &[(\epsilon/2\kappa)(11+2\alpha+3\alpha^2)/\alpha+(1-\alpha)(1-\overline{\alpha})/4]\}+0(r)\end{aligned} \tag{8-42b}$$

如果只保留最主要的奇异项,则上两式还可简化为

$$\begin{aligned}&\sigma_{22}+\sigma_{11} \approx \kappa E^\infty \overline{E}^\infty(1-\alpha)(1-\overline{\alpha})c/4r \\ &\sigma_{22}-\sigma_{11}+2i\sigma_{12} \approx \\ &\quad \kappa E^\infty \overline{E}^\infty\{(1-\alpha)[2(\epsilon/\kappa)(1-\alpha)/\alpha+(1-\overline{\alpha})]+2(1-\alpha)(1-\overline{a})\sqrt{\rho_0/r}\}c/8r\end{aligned} \tag{8-43}$$

电场的渐近解为

$$E_1 + iE_2 = \frac{1}{4}\left\{\sqrt{2}\,\overline{E}^\infty(1-\overline{\alpha})\sqrt{\frac{c}{r}} + E^\infty\left[(3+\overline{\alpha})+4\overline{\alpha}\sqrt{\frac{\rho_0}{r}}\right]\right\} + 0(r) \tag{8-44}$$

对于 $\alpha = -1(E^\infty = iE_2^\infty)$ 的特殊情况,裂尖渐近场的展开式为

$$\sigma_{22} = \kappa(E_2^\infty)^2(3 - 2\epsilon/\kappa + 2\sqrt{\rho_0/r})(c/4r)$$
$$E_1 + \mathrm{i}E_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}E^\infty\sqrt{\frac{c}{r}} \tag{8-45}$$

由上式知，电场具有 $1/\sqrt{r}$ 的奇异性。由于 ρ_0 很小，应力具有 $1/r$ 的奇异性。

8.1.6 在外电场作用下无限电致伸缩板中有一开路椭圆孔

设无穷远处有外电场 $\boldsymbol{D}^\infty$ 和机械载荷 $\boldsymbol{\sigma}^\infty$ 的作用。对开路椭圆孔，需用电学界面连续条件代替绝缘孔的边界条件式(8－23)，力学条件不变。下面在字母右上方标以"c"的量表示空气中的物理量，当界面上没有自由电荷时，电学界面连续条件是

$$\varphi = \varphi^c,\quad D_n = D_n^c(\text{或}\int D_n\mathrm{d}s = \int D_n^c\mathrm{d}s),\ D_n = D_i n_i \tag{8-46}$$

解法 1：Smith 和 Warren[109]取用复变函数中的保角变换方法求解。把物理平面 z 上的椭圆孔变换为变换平面 ς 上的单位圆周的变换函数仍是式(8－24)。他们取用的复电势 $w^c(\varsigma)$ 和 $w(\varsigma)$ 为

$$w^c(\varsigma) = -R\frac{2\epsilon[(\epsilon+\epsilon^c)\overline{E}^\infty - m(\epsilon-\epsilon^c)E^\infty]}{[\epsilon(1+m)+\epsilon^c(1-m)][\epsilon(1-m)+\epsilon^c(1+m)]}\left(\varsigma+\frac{m}{\varsigma}\right)=$$
$$\frac{R}{(1+m)}\left[-\frac{2E_1^\infty}{(1+\bar{\epsilon}^c\bar{b})}+\frac{2\mathrm{i}E_2^\infty}{(1+m)(\bar{b}+\bar{\epsilon}^c)}\right]\left(\varsigma+\frac{m}{\varsigma}\right)\qquad(\text{椭圆孔内}) \tag{8-47a}$$
$$w(\varsigma) = -R\overline{E}^\infty\varsigma + R\frac{(\epsilon^{c2}-\epsilon^2)(1-m^2)E^\infty - 4m\epsilon\epsilon^c\overline{E}^\infty}{[\epsilon(1+m)+\epsilon^c(1-m)][\epsilon(1-m)+\epsilon^c(1+m)]}\frac{1}{\varsigma}=$$
$$R(-E_1^\infty+\mathrm{i}E_2^\infty)\varsigma - RAE_1^\infty/\varsigma - \mathrm{i}RBE_2^\infty/\varsigma\qquad(\text{电介质内})$$

式中

$$A = (1-\bar{b}\bar{\epsilon}^c)/(1+\bar{b}\bar{\epsilon}^c),\quad B = (1-\bar{\kappa})/(1+\bar{\kappa}) = (\bar{b}-\bar{\epsilon}^c)/(\bar{b}+\bar{\epsilon}^c)$$
$$\bar{b} = b/a,\quad \bar{\epsilon}^c = \epsilon^c/\epsilon,\quad \bar{\kappa} = \epsilon/\bar{b} = \epsilon^c a/\epsilon b \tag{8-47b}$$

按式(8－9)，电介质内和孔内的电场分别为

$$-\overline{E} = -E_1 + \mathrm{i}E_2 = w'(\varsigma)/\omega'(\varsigma) = [(-E_1^\infty+\mathrm{i}E_2^\infty)\varsigma^2 + AE_1^\infty + \mathrm{i}BE_2^\infty](\varsigma^2-m)^{-1}$$
$$-\overline{E}^c = -E_1^c + \mathrm{i}E_2^c = -2E_1^\infty/[(1+m)(1+\bar{\epsilon}^c\bar{b})] + 2\mathrm{i}E_2^\infty/[(1+m)(\bar{b}+\bar{\epsilon}^c)] \tag{8-48}$$

利用式(8－38)～(8－41)和下列关系

$$\varsigma^2 - m \approx 2m^{3/4}\sqrt{r/R}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta/2}\left(1+\frac{1}{2}m^{-1/4}\sqrt{r/R}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta/2}\right),\quad \frac{1}{\varsigma^2-m} = \frac{1}{2m^{3/4}\sqrt{r/R}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\eta/2}} - \frac{1}{4m} \tag{8-49}$$

对于无穷远处只作用电场 E_2^∞ 的狭长椭圆端部区的渐近电场为

$$E_1 = 0,\quad E_2 = E_2^\infty\frac{\varsigma^2+(1-\bar{\kappa})/(1+\bar{\kappa})}{\varsigma^2-m} \approx E_2^\infty\left[\frac{1}{1+\bar{\kappa}}\sqrt{\frac{a}{2r}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\eta/2} + \frac{1+2\bar{\kappa}}{2(1+\bar{\kappa})}\right] \tag{8-50}$$

应当注意，上式中的 r 和 η 分别为局部坐标系 z_1 中的半径和极角，局部坐标系 z_1 的原点取在椭圆的焦点。一些作者直接把 z_1 的原点取在椭圆长轴的顶点，r 从椭圆长轴的顶点算起是不妥的，只有在 $r \gg \rho_0 = b^2/2a$ 的范围内才是允许的。式(8-47)中的参数$\bar{\kappa}$是一个重要的量，它把两个特征参数 $\bar{\epsilon}^c$，$\bar{b}$ 组合在一起，当$\bar{\kappa} \to 0$ 时，电场在裂尖处具有 $1/\sqrt{r}$ 的奇异性，退化到绝缘裂纹的情形；当$\bar{\kappa} \to \infty$ 时，电场在裂尖处没有奇异性，且 $E_2 = E_2^\infty$，退化到传导裂纹的情形。上述电场表达式(8-47)～(8-50)，对未极化的无限压电板中有一开路椭圆孔的情形也适用。

电介质中的复应力势仍设为式(8-31)，当 $E_1^\infty = 0$ 时，按式(8-47)，$w(\varsigma)$ 可化为

$$w(\varsigma) = -R\overline{E}^\infty(\varsigma + \alpha\varsigma^{-1}),\ -\overline{E}^\infty = \mathrm{i}E_2^\infty,\ \alpha = -B \tag{8-51}$$

上式和式(8-26)有相同的形式，因而按推导式(8-36)相同的步骤，最终得

$$\begin{aligned} \phi(\varsigma)/R &= \Gamma_1\varsigma - \frac{m\Gamma_1}{\varsigma} - \frac{\overline{\Gamma}_2}{\varsigma} + \frac{\kappa B E_2^{\infty 2}}{2\varsigma} \\ \psi(\varsigma)/R &= \Gamma_2\varsigma - 2\Gamma_1\frac{1+m^2}{\varsigma^2 - m}\varsigma - \frac{\overline{\Gamma}_2(1+m\varsigma^2)}{(\varsigma^2-m)\varsigma} - \frac{\kappa E_2^{\infty 2}[1 - B\overline{B} - (B+\overline{B})m]\varsigma}{2(\varsigma^2 - m)} \end{aligned} \tag{8-52}$$

对于绝缘椭圆孔，上式退化为式(8-36a)。

解法2：Gao, Mai 和 Zhang[110] 直接预设孔内的电场 φ^c 是均匀的(这和前面的结论一致)，并设介质中的复电势为 $w(z)$，即设

$$\begin{aligned} \varphi^c &= -E_1^c x_1 - E_2^c x_2 \\ w(z) &= \Gamma_3 z + w_0(z),\ \Gamma_3 = -\overline{E}^\infty = -(E_1^\infty - \mathrm{i}E_2^\infty) \end{aligned} \tag{8-53}$$

式中 $w_0(z)$ 为待定的解析函数。利用式(1-54a)，在界面上有

$$\int D_n^c \mathrm{d}s = D_1^c x_2 - D_2^c x_1,\quad \int D_n \mathrm{d}s = \int (D_1^\infty \mathrm{d}x_2 - D_2^\infty \mathrm{d}x_1) + \frac{1}{2}\mathrm{i}\epsilon[w(\sigma) - \overline{w(\sigma)}] \tag{8-54}$$

把式(8-8)、(8-53)和(8-54)代入(8-46)求解，便得

$$\begin{aligned} w_0(\sigma) + \overline{w_0(\sigma)} &= 2[(E_1^\infty - E_1^c)x_1 + (E_2^\infty - E_2^c)x_2] \\ w_0(\sigma) - \overline{w_0(\sigma)} &= -2\mathrm{i}[(D_2^\infty - D_2^c)x_1 - (D_1^\infty - D_1^c)x_2]/\epsilon \end{aligned} \tag{8-55}$$

在变换平面ς上，$x_1 = a(\sigma + \sigma^{-1})/2$，$x_2 = \mathrm{i}b(\sigma - \sigma^{-1})/2$，把它代入上式，两边乘以 $\mathrm{d}\sigma/[2\pi\mathrm{i}(\sigma - \varsigma)]$，再沿椭圆孔的边界围线积分，利用 Cauchy 积分公式，便分别得到

$$\begin{aligned} w_0(\varsigma) &= [a(E_1^\infty - E_1^c) + \mathrm{i}b(E_2^\infty - E_2^c)]/\varsigma \\ w_0(\varsigma) &= [a(D_2^\infty - D_2^c) - \mathrm{i}b(D_1^\infty - D_1^c)]/\mathrm{i}\epsilon\varsigma \end{aligned} \tag{8-56}$$

由上式推出

$$a(E_1^\infty - E_1^c) = -b(D_1^\infty - D_1^c)/\epsilon,\quad b(E_2^\infty - E_2^c) = -a(D_2^\infty - D_2^c)/\varsigma \tag{8-57}$$

当 $E_1^\infty = 0$ 时，由上式和式(8-53)可推出

$$D_2^c = D_2^\infty\left[1+\frac{b}{a}\left(1-\frac{\epsilon}{\epsilon^c}\right)\left(1+\frac{b\epsilon}{a\epsilon^c}\right)^{-1}\right]$$

$$w(z) = \mathrm{i}E_2^\infty R(\varsigma+\beta/\varsigma),\ \beta=\frac{2aD_2^c}{(a+b)D_2^\infty}-1 \tag{8-58}$$

特别是对于裂纹有 $E_1^\infty = E_1^c$，$E_2^\infty = E_2^c$，即电介质和空气内的电场是相同的，整个空间内是均匀的，裂尖处没有电场集中，从而推出应力场在裂尖处仍具有 $1/\sqrt{r}$ 的奇异性。

电介质中的复势仍设为式(8－31)，其余的推导和前面一样，当 $E_1^\infty = 0$ 时，最终得

$$\phi(\varsigma) = \Gamma_1 z - R\frac{2\Gamma_1(\beta-m)-\Gamma_2}{\varsigma}+R\frac{\epsilon^c E_2^{c2}}{2\varsigma}$$

$$\psi(\varsigma) = \Gamma_2 z + R\frac{2\Gamma_1(2m\beta-\phi^2-m^2)-\Gamma_2(2m\varsigma^2+m^2-1)}{(\varsigma^2-m)\varsigma}+ R\frac{\epsilon^c E_2^{c2}(2m\varsigma^2+m^2-1)}{2\varsigma(\varsigma^2-m)} \tag{8-59}$$

上述两种解，即式(8－52)和(8－59)存在差别。

8.1.7 计算柯西型积分的某些初等积分公式

在上面的计算中，遇到了柯西型积分公式的计算，为方便读者，本小节简单地给出这些公式。设 L 为一简单闭围线，L 围成的有限区域记为 S^+，相补的无限域记为 S^-，沿 L 运行时，S^+ 保持在左边。对于柯西型积分存在下列初等积分公式：

(1) 如函数 $f(z)$在 S^+ 解析，在 $S^+ + L$ 上连续，那么按熟知的柯西公式和其推论，有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(t)\mathrm{d}t}{t-z}=f(z),\ z\in S^+;\quad \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(t)\mathrm{d}t}{t-z}=0,\ z\in S^- \tag{8-60}$$

(2) 如函数 $f(z)$除无穷远点外，在 S^- 解析，在 $S^- + L$ 上连续，设无穷远点是主部为 $G_\infty(z)$的极点。如沿 L 运行时仍保持 S^+ 在左边，那么有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(t)\mathrm{d}t}{t-z}=-f(z)+G_\infty(z),\ z\in S^-$$

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(t)\mathrm{d}t}{t-z}=G_\infty(z),\ z\in S^+ \tag{8-61}$$

如沿 L 运行时保持 S^- 在左边，那么上述等式右边改变符号。

(3) 如函数 $f(z)$除 n 个极点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 外，在 S^+ 解析，在 $S^+ + L$ 上连续，在极点 a_i 处的主部为 $G_i(z)$，那么有

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(t)\mathrm{d}t}{t-z}=f(z)-\sum_{i=1}^n G_i(z),\ z\in S^+$$

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{f(t)\mathrm{d}t}{t-z}=-\sum_{i=1}^n G_i(z),\ z\in S^- \tag{8-62}$$

(4) 如函数 $f(z)$除 n 个极点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $z=\infty$外，在 S^- 解析，在 $S^- + L$ 上连续，在极点 a_i 处的主部为 $G_i(z)$和 $G_\infty(z)$，那么有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\mathrm{d}t}{t-z} = -f(z) + \sum_{i=1}^{n} G_i(z) + G_\infty(z),\ z \in S^-$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\mathrm{d}t}{t-z} = \sum_{i=1}^{n} G_i(z) + G_\infty(z),\ z \in S^+ \tag{8-63}$$

8.2 无限电致伸缩材料板中的刚性椭圆导体

8.2.1 边值问题的提法

与椭圆孔问题的主要差别在于刚性椭圆导体的电势取为零，内部没有电场，同时可以存在刚性转动。Jiang 和 Kuang[111]假设界面上没有外力，在无穷远的边界条件仍由式(8-23)表示。刚性椭圆导体转动的条件可表成

$$u_1 + iu_2 = u_0 + i\vartheta z \tag{8-64}$$

式中 u_0 为刚体位移，可不予考虑；ϑ 是相对于椭圆中心的待定转动角，这个转动角和作用在刚性椭圆体上的力矩相关，为此需要给出力矩表达式。伪总力矩是

$$\widetilde{M} = \int_A^B (-\widetilde{T}_1^* x_2 + \widetilde{T}_2^* x_1)\mathrm{d}s = -\left(z\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial z} + \bar{z}\frac{\partial \widetilde{U}}{\partial \bar{z}}\right)_A^B + \widetilde{U}\Big|_A^B =$$
$$\mathrm{Re}\left[\chi(z) - z\psi(z) - z\bar{z}\phi'(z) - \frac{1}{2}\kappa w'(z)\overline{w(z)}\right]_A^B + \left[\frac{1}{4}\kappa w(z)\overline{w(z)}\right]_A^B \tag{8-65}$$

式中 $\chi'(z) = \psi(z)$。Maxwell 应力形成的力矩和机械力矩分别为

$$M^e = \int_A^B (-\sigma_{1j}^M n_j x_2 + \sigma_{2j}^M n_j x_1)\mathrm{d}s = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{2}\epsilon[z\Omega(z) - \Omega_1(z)]\right\}_A^B$$
$$M = \widetilde{M} - M^e = \mathrm{Re}\left\{\chi(z) - z\psi(z) - z\bar{z}\phi'(z) - \frac{1}{2}\kappa w'(z)\overline{w(z)} - \right.$$
$$\left.\frac{1}{2}\epsilon[z\Omega(z) - \Omega_1(z)]\right\}_A^B + \left[\frac{1}{4}\kappa w(z)\overline{w(z)}\right]_A^B,\ \Omega_1(z) = \int \Omega(z)\mathrm{d}z \tag{8-66}$$

如介质内没有体积力和自由电荷，电场复势和应力复势可分别写成

$$w(z) = \Gamma_3 z + w_0(z) \tag{8-67}$$

$$\phi(z) = -\frac{\widetilde{P}_1 + i\widetilde{P}_2}{8(1-\nu)}\ln z + \Gamma_1 z + \phi_0(z)$$
$$\psi(z) = \frac{(3-4\nu)(\widetilde{P}_1 - i\widetilde{P}_2)}{8(1-\nu)}\ln z + \Gamma_2 z + \psi_0(z) \tag{8-68}$$

式中 $w_0(z)$，$\phi_0(z)$，$\psi_0(z)$是介质内的解析函数；Γ_1，Γ_2，Γ_3 由无穷远处的边界条件确定

$$\Gamma_3 = -\overline{E}^\infty,\ E^\infty = (E_1^\infty + iE_2^\infty) = E_0 e^{i\beta}$$
$$\Gamma_1 = \frac{1}{4}(\tilde{\sigma}_{22}^\infty + \tilde{\sigma}_{11}^\infty) - \frac{1}{4}\kappa E_k^\infty E_k^\infty,\quad \Gamma_2 = \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}_{22}^\infty - \tilde{\sigma}_{11}^\infty + 2i\tilde{\sigma}_{12}^\infty) \tag{8-69}$$

8.2.2 带刚性椭圆导体的无限电致伸缩材料板中的电场

由于刚性椭圆导体中的电场为零,所以沿椭圆导体边界的电势也为零。对照带有椭圆孔的无限板问题的电场解式(8-26),只需把其中的 α 改为 $-\alpha$ 即可,即取

$$w(\varsigma)=-R\overline{E}^{\infty}(\varsigma-\alpha\varsigma^{-1}),\quad \overline{w(\varsigma)}=-RE^{\infty}(\overline{\varsigma}-\overline{\alpha}\,\overline{\varsigma}^{-1}),\ \alpha=E^{\infty}/\overline{E}^{\infty}=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\beta}$$
$$E=E_1+\mathrm{i}E_2=-\frac{\overline{w'(\varsigma)}}{\overline{\omega'(\varsigma)}}=E^{\infty}\frac{1+\overline{\alpha}\,\overline{\varsigma}^{-2}}{1-m\overline{\varsigma}^{-2}}=E^{\infty}\frac{\overline{\varsigma}^2+\overline{\alpha}}{\overline{\varsigma}^2-m}=\frac{E^{\infty}+\overline{E}^{\infty}\,\overline{\varsigma}^{-2}}{1-m\overline{\varsigma}^{-2}} \tag{8-70}$$

上式满足无穷远处的边界条件。式(8-30)现在变为

$$E_{\rho}+\mathrm{i}E_{\vartheta}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta}\frac{\overline{\omega'(\sigma)}}{|\omega'(\sigma)|}\frac{\overline{w'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta}\frac{\overline{w'(\sigma)}}{|\omega'(\sigma)|}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta}\frac{E^{\infty}+\overline{E}^{\infty}\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\vartheta}}{|1-m\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\vartheta}|}=\frac{E^{\infty}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\vartheta}+\overline{E}^{\infty}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta}}{|1-m\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\vartheta}|}$$
$$E_{\rho}=2E_0\cos(\beta-\vartheta)/|1-m\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\vartheta}|,\ E_{\vartheta}=0 \tag{8-71}$$

上式的虚数部分为零,所以,$E_{\vartheta}=0$,满足椭圆导体的边界条件,式(8-70)是解。

8.2.3 带刚性椭圆导体的无限电致伸缩材料板中的应力场

采用保角变换法求解。变换函数仍由式(8-24)表示。由式(8-20)和(8-64),可得

$$2\mathrm{i}G\vartheta z=K\phi(z)-z\overline{\phi'(z)}-\overline{\psi(z)}-\frac{\kappa}{2}w(z)\overline{w'(z)}+\alpha_1\overline{\Omega(z)} \tag{8-72}$$

式中 $\alpha_1=(a_1-2\epsilon)/4$。令 $\Lambda=-K=-3+4\nu$,则在变换后的ς平面上,上式化为

$$\Lambda\phi(\varsigma)+\omega(\varsigma)\frac{\overline{\phi'(\varsigma)}}{\overline{\omega'(\varsigma)}}+\overline{\psi(\varsigma)}+\frac{\kappa}{2}w(\varsigma)\frac{\overline{w'(\varsigma)}}{\overline{\omega'(\varsigma)}}-\alpha_1\overline{\Omega(\varsigma)}=-2\mathrm{i}G\vartheta\omega(\varsigma) \tag{8-73}$$

式中 $\phi(\varsigma)$,$\psi(\varsigma)$由式(8-68)表示,但由于没有集中载荷,所以其中不含 $\ln z$ 的项。式(8-73)可以进一步化为

$$\Lambda\phi_0(\varsigma)+\omega(\varsigma)\frac{\overline{\phi_0'(\varsigma)}}{\overline{\omega'(\varsigma)}}+\overline{\psi_0(\varsigma)}+f(\varsigma)=0$$
$$f(\varsigma)=\Lambda R\Gamma_1\varsigma+\frac{\kappa}{2}w(\varsigma)\frac{\overline{w'(\varsigma)}}{\overline{\omega'(\varsigma)}}+R\Gamma_1\frac{\omega(\varsigma)}{\overline{\omega'(\varsigma)}}+R\overline{\Gamma}_2\overline{\varsigma}-\alpha_1\overline{\Omega(\varsigma)}+2G\mathrm{i}\vartheta\omega(\varsigma) \tag{8-74}$$

在单位圆 $\varsigma=\sigma$ 上,上式化为

$$\Lambda\phi_0(\sigma)+\omega(\sigma)\frac{\overline{\phi_0'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}+\overline{\psi_0(\sigma)}+f(\sigma)=0 \tag{8-75}$$

把上式和它的共轭方程乘以$[2\pi\mathrm{i}(\sigma-\varsigma)]^{-1}\mathrm{d}\sigma$,再沿椭圆边界闭围线积分,便得

$$\Lambda\phi_0(\varsigma)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\frac{f\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\varsigma},\ \psi_0(\varsigma)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\frac{\overline{f}\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\varsigma}+\varsigma\frac{1+m\varsigma^2}{\varsigma^2-m}\phi_0'(\varsigma) \tag{8-76}$$

利用 Cauchy 积分公式,便可求出上式的封闭解。注意到 $\Omega(z)=\int\Omega'(z)\mathrm{d}z=\int[w'(z)]^2\mathrm{d}z$,在$\varsigma$平面上,它和它的 Cauchy 积分为

$$\Omega(\varsigma)=\int\frac{[w'(\varsigma)]^2}{\omega'(\varsigma)}\mathrm{d}\varsigma=R(\overline{E}^\infty)^2\left[\frac{\alpha^2}{m\varsigma}+\varsigma-\frac{(m+\alpha)^2\arctan(\varsigma/\sqrt{m})}{m^{3/2}}\right]$$

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\frac{\Omega(\sigma)\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\varsigma}=R(\overline{E}^\infty)^2\left[-\frac{\alpha^2}{m\varsigma}-\frac{(m+\alpha)^2}{2m^{3/2}}\ln\frac{\varsigma-\sqrt{m}}{\varsigma+\sqrt{m}}\right] \tag{8-77}$$

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int\frac{\overline{\Omega(\sigma)}\mathrm{d}\sigma}{\sigma-\varsigma}=-R(\overline{E}^\infty)^2\frac{1}{\varsigma}$$

则积出式(8 - 76)后，最终可求得

$$\Lambda\phi(\varsigma)=\Lambda\Gamma_1R\varsigma-\frac{mR\Gamma_1}{\varsigma}-\frac{R\overline{\Gamma}_2}{\varsigma}+\frac{\kappa\alpha RE^\infty\overline{E}^\infty}{2\varsigma}+\alpha_1R(E^\infty)^2\frac{1}{\varsigma}-2R\mathrm{i}G\vartheta\frac{m}{\varsigma}$$

$$\begin{aligned}\psi(\varsigma)=&\Gamma_2R\varsigma+\frac{\kappa RE^\infty\overline{E}^\infty[\alpha\overline{\alpha}-1+(\alpha/\Lambda+\overline{\alpha})m]\varsigma^2+\alpha/\Lambda-\alpha}{2\varsigma(\varsigma^2-m)}-\frac{R\overline{\Gamma}_2(1+m\varsigma^2)}{\Lambda(\varsigma^2-m)\varsigma}-\\&\frac{R\Gamma_1(1+m^2+\Lambda+m^2/\Lambda)\varsigma^2-\Lambda m+m/\Lambda}{\varsigma(\varsigma^2-m)}+\frac{\alpha_1R(E^\infty)^2(1+m\varsigma^2)}{\Lambda\varsigma(\varsigma^2-m)}+\\&\frac{2R\mathrm{i}G\vartheta}{\varsigma}-\frac{2R\mathrm{i}mG\vartheta(1+m\varsigma^2)}{\Lambda\varsigma(\varsigma^2-m)}+\alpha_1R(E^\infty)^2\left[\frac{\alpha^2}{m\varsigma}+\frac{(m+\alpha)^2}{2m^{3/2}}\ln\frac{\varsigma-\sqrt{m}}{\varsigma+\sqrt{m}}\right]\end{aligned} \tag{8-78}$$

如果给定旋转角 ϑ，则可求出作用在椭圆导体上的合成扭矩；如果椭圆导体上的合成扭矩为零，则可求出待定旋转角 ϑ。在ς平面上有

$$\begin{aligned}M=\mathrm{Re}\Big\{&\chi(\varsigma)-\omega(\varsigma)\psi(\varsigma)-\omega(\varsigma)\overline{\omega(\varsigma)}\frac{\phi'(\varsigma)}{\omega'(\varsigma)}-\frac{1}{2}\kappa\frac{w'(\varsigma)}{\omega'(\varsigma)}\overline{w(\varsigma)}-\\&\frac{1}{2}\epsilon[\omega(\varsigma)\Omega(\varsigma)-\Omega_1(\varsigma)]\Big\}_A^B+\left[\frac{1}{4}\kappa w(\varsigma)\overline{w(\varsigma)}\right]_A^B\end{aligned} \tag{8-79}$$

式中点 B 应当回到点 A。由于 B 点应当回到 A 点，所以式(8 - 79)的积分中，只有含 $\ln\varsigma$的多值函数才有贡献，即只有$\chi(\varsigma)$和 $\Omega_1(\varsigma)$有贡献。积分式(8 - 78)中的第二式得

$$\begin{aligned}\chi(\varsigma)=&\oint\psi(\varsigma)\omega'(\varsigma)\mathrm{d}\varsigma=\\&\Gamma_2R^2\left(\frac{1}{2}\varsigma^2-m\ln\varsigma\right)+\frac{1}{2}\kappa R^2E^\infty\overline{E}^\infty\left[\left(\alpha\overline{\alpha}-1+\frac{\alpha m}{\Lambda}+\overline{\alpha}m\right)\ln\varsigma+\frac{\alpha\Lambda-\alpha}{2\Lambda\varsigma^2}\right]-\\&\frac{R^2\overline{\Gamma}_2}{\Lambda}\left(m\ln\varsigma-\frac{1}{2\varsigma^2}\right)-R^2\Gamma_1\left[\left(1+m^2+\Lambda+\frac{m^2}{\Lambda}\right)\ln\varsigma-\left(-\Lambda m+\frac{m}{\Lambda}\right)\frac{1}{2\varsigma^2}\right]+\\&\frac{\alpha_1R^2(E^\infty)^2}{\Lambda}\left(m\ln\varsigma-\frac{1}{2\varsigma^2}\right)+\alpha_1R^2(E^\infty)^2\Big\{\alpha^2\left(\frac{1}{2\varsigma^2}+\frac{\ln\varsigma}{m}\right)+\\&\frac{(m+\alpha)^2}{2m^{3/2}}\left[2\sqrt{m}\ln\varsigma+\frac{m+\varsigma^2}{\varsigma}\ln\frac{\varsigma-\sqrt{m}}{\varsigma+\sqrt{m}}-2\sqrt{m}\ln(\varsigma^2-m)\right]\Big\}+\\&2\mathrm{i}R^2G\vartheta\left(\ln\varsigma+\frac{m}{2\varsigma^2}\right)-\frac{2\mathrm{i}R^2G\vartheta m}{\Lambda}\left(m\ln\varsigma-\frac{1}{2\varsigma^2}\right)\end{aligned} \tag{8-80}$$

$$\begin{aligned}\Omega_1(\varsigma)=&\int\Omega(\varsigma)\omega'(\varsigma)\mathrm{d}\varsigma\\=&(R\overline{E}^\infty)^2\left[\frac{\alpha^2}{2\varsigma^2}+\frac{\varsigma^2}{2}+\left(\frac{\alpha^2}{m}-m\right)\ln\varsigma\right]-(R\overline{E}^\infty)^2\frac{(m+\alpha)^2}{2m^{3/2}}\cdot\end{aligned}$$

$$2\sqrt{m}\left[-\ln\varsigma+\ln(\varsigma^2-m)+\frac{m+\varsigma^2}{\varsigma}\ln\frac{\varsigma+\sqrt{m}}{-\varsigma+\sqrt{m}}\right] \tag{8-81}$$

因此有

$$M=-2\pi R^2\operatorname{Im}\left\{-\Gamma_2 m+\frac{1}{2}\kappa E^{\infty}\,\overline{E}^{\infty}\left(\alpha\bar{\alpha}-1+\frac{\alpha m}{\Lambda}+\bar{\alpha}m\right)-\Gamma_1\left(1+m^2+\Lambda+\frac{m^2}{\Lambda}\right)-\frac{m\overline{\Gamma}_2}{\Lambda}+\frac{\alpha_1 m}{\Lambda}(E^{\infty})^2-[\alpha_1(2\alpha+m)+\epsilon(\alpha+m)](\overline{E}^{\infty})^2+2\mathrm{i}G\vartheta\frac{\Lambda-m^2}{\Lambda}\right\} \tag{8-82}$$

注意到 Γ_1, m, Λ, G, ϑ 是实常数,上式还可简化为

$$M=-2\pi R^2\operatorname{Im}\left\{-\Gamma_2 m+\frac{1}{2}\kappa E^{\infty}\,\overline{E}^{\infty}\left(\alpha\bar{\alpha}-1+\frac{\alpha m}{\Lambda}+\bar{\alpha}m\right)-\frac{m\overline{\Gamma}_2}{\Lambda}+\frac{\alpha_1 m}{\Lambda}(E^{\infty})^2-[\alpha_1(2\alpha+m)+\epsilon(\alpha+m)](\overline{E}^{\infty})^2\right\}-4\pi R^2 G\vartheta\frac{\Lambda-m^2}{\Lambda} \tag{8-83}$$

如果椭圆导体上的合成扭矩 M 为零,则其转动角为

$$\vartheta=\frac{\Lambda}{2G(m^2-\Lambda)}\operatorname{Im}\left\{-\Gamma_2 m+\frac{1}{2}\kappa E^{\infty}\,\overline{E}^{\infty}\left(\alpha\bar{\alpha}-1+\frac{\alpha m}{\Lambda}+\bar{\alpha}m\right)-\frac{m\overline{\Gamma}_2}{\Lambda}+\frac{\alpha_1 m}{\Lambda}(E^{\infty})^2-\left[\alpha_1(2\alpha+m)+\epsilon(\alpha+m)\right](\overline{E}^{\infty})^2\right\} \tag{8-84}$$

由上式可见,对于导体圆柱,$m=0$,则转动消失,$\vartheta=0$。对于 $\beta=n\pi/2$,$n=1, 2, 3, 4$,则转动也消失。转动角 ϑ 和无穷远处的电场的平方和应力的一次方成正比。求出椭圆导体的转动角 ϑ 后,代入式(8-78),便完全求出了应力复势,由此可求出应力的表达式为

$$\sigma_{22}+\sigma_{11}=2\operatorname{Re}\left[\frac{2\Lambda\Gamma_1\varsigma^2+2m\Gamma_1+2\overline{\Gamma}_2-\kappa\alpha E^{\infty}\,\overline{E}^{\infty}-2\alpha_1(E^{\infty})^2+4\mathrm{i}mG\vartheta}{\Lambda(\varsigma^2-m)}\right]+\frac{\kappa E^{\infty}\,\overline{E}^{\infty}\varsigma^3(\varsigma^2+\alpha)(\bar{\varsigma}^2+\bar{\alpha})}{(\varsigma^2-m)(\bar{\varsigma}^2-m)} \tag{8-85}$$

$$\begin{aligned}\sigma_{22}-\sigma_{11}+2\mathrm{i}\sigma_{12}=&-\frac{2\kappa E^{\infty}\,\overline{E}^{\infty}\varsigma^3(m+\alpha)(\bar{\varsigma}^2-\bar{\alpha})}{(\varsigma^2-m)^3\bar{\varsigma}}+\frac{2\Gamma_1\varsigma^2}{\varsigma^2-m}-\\&\frac{\bar{\varsigma}^2+m}{\bar{\varsigma}}\frac{[4\Lambda\Gamma_1 m+4m\Gamma_1+4\overline{\Gamma}_2-2\kappa\alpha E^{\infty}\,\overline{E}^{\infty}-4\alpha_1(E^{\infty})^2+8\mathrm{i}mG\vartheta]\varsigma^3}{\Lambda(\varsigma^2-m)^3}-\\&\left[\kappa E^{\infty}\,\overline{E}^{\infty}\left(\alpha\bar{\alpha}-1+\frac{\alpha m}{\Lambda}+\bar{\alpha}m\right)-2\Gamma_1\left(1+m^2+\Lambda+\frac{m^2}{\Lambda}\right)-\frac{2\overline{\Gamma}_2 m}{\Lambda}+\right.\\&\left.\frac{2\alpha_1 m}{\Lambda}(E^{\infty})^2-\frac{4\mathrm{i}m^2G\vartheta}{\Lambda}\right]\frac{\varsigma^2(\varsigma^2+m)}{(\varsigma^2-m)^3}+\frac{2\Gamma_2\varsigma^2}{\varsigma^2-m}+\frac{(3\varsigma^2-m)}{(\varsigma^2-m)^3}\cdot\\&\left[\kappa E^{\infty}\,\overline{E}^{\infty}\left(\alpha-\frac{\alpha}{\Lambda}\right)+2\Gamma_1\left(\frac{m}{\Lambda}-m\Lambda\right)+\frac{2\overline{\Gamma}_2}{\Lambda}-\frac{2\alpha_1}{\Lambda}(E^{\infty})^2+\frac{4\mathrm{i}G\vartheta m}{\Lambda}\right]-\\&\frac{2\alpha_1\alpha^2(\overline{E}^{\infty})^2+4\mathrm{i}G\vartheta m}{m(\varsigma^2-m)}+\frac{2\alpha_1(m+\alpha)^2(\overline{E}^{\infty})^2\varsigma^2}{m(\varsigma^2-m)^2}+\epsilon(\overline{E}^{\infty})\left(\frac{\varsigma^2+\alpha}{\varsigma^2-m}\right)^2\end{aligned} \tag{8-86}$$

对于纯外加电载荷 $\Gamma_1 = -(\kappa E^{\infty}\overline{E}^{\infty})/4$，$\Gamma_2 = 0$ 的情形，在原点位于($\sqrt{a^2-b^2}$，0)的局部坐标系中，沿 x_1 轴的狭长椭圆右端部的渐近场可表为

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{22}+\sigma_{11} = \frac{1}{8}[\kappa E^{\infty}\overline{E}^{\infty}(1+\alpha)(1+\overline{\alpha})]\frac{c}{r} \\
&\sigma_{22}-\sigma_{11}+2\mathrm{i}\sigma_{12} = \left\{\frac{1}{8}(1+\alpha)^2\overline{E}^{\infty}\left[(2\alpha_1+\epsilon)\overline{E}^{\infty}-\kappa E^{\infty}\frac{1+\overline{\alpha}}{1+\alpha}\right]+\right. \\
&\qquad\left.\frac{1}{4}\kappa E^{\infty}\overline{E}^{\infty}(1+\alpha)(1+\overline{\alpha})\sqrt{\frac{\rho_0}{r}}\right\}\frac{c}{r} \\
&E_1+\mathrm{i}E_2 = \frac{1}{2m^{3/4}}\overline{E}^{\infty}\sqrt{\frac{R}{r}}
\end{aligned}
\tag{8-87}
$$

8.3 无限电致伸缩材料板中的一般椭圆夹杂

8.3.1 一般讨论

Jiang 和 Kuang[112]讨论了无穷远处承受 $\boldsymbol{\sigma}^{\infty}$，$\boldsymbol{E}^{\infty}$ 的无限电致伸缩材料板中的一般椭圆夹杂问题，在椭圆夹杂的边界上没有广义载荷。令夹杂占据区域 S^+，其中的物理量均用上标“+”表示，基体占据区域 S ，其中的物理量均用上标“−”表示，两者的界面记为 L。基体和夹杂内以及界面上都没有自由电荷。这一问题比前面两节的问题要复杂一些，主要困难之处在于现在要考虑夹杂的内部场，同时在夹杂的边界上要满足广义位移和广义应力的连续条件。我们仍采用保角变换方法求解。保角变换函数仍由式(8-24)表示。按式(8-20)和(8-22)，界面上广义位移和广义应力的连接条件在变换平面ς上可以写成

$$
\begin{aligned}
&K^+\phi^+(\sigma)-\omega^+(\sigma)\frac{\overline{\phi'^+(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}-\overline{\psi^+(\sigma)}-\frac{\kappa^+}{2}w^+(\sigma)\frac{\overline{w'^+(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}+\alpha_1^+\overline{\Omega^+(\sigma)} = \\
&h\left[K^-\phi^-(\sigma)-\omega^-(\sigma)\frac{\overline{\phi'^-(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}-\overline{\psi^-(\sigma)}-\frac{\kappa^-}{2}w^-(\sigma)\frac{\overline{w'^-(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}+\alpha_1^-\overline{\Omega^-(\sigma)}\right]
\end{aligned}
\tag{8-88}
$$

$$
\begin{aligned}
&\phi^+(\sigma)+\omega^+(\sigma)\frac{\overline{\phi'^+(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}+\overline{\psi^+(\sigma)}+\frac{\kappa^+}{2}w^+(\sigma)\frac{\overline{w'^+(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}} = \\
&\phi^-(\sigma)+\omega(\sigma)\frac{\overline{\phi'^-(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}+\overline{\psi^-(\sigma)}+\frac{\kappa^-}{2}w^-(\sigma)\frac{\overline{w'^-(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}}
\end{aligned}
\tag{8-89}
$$

式中 $h = G^+/G^-$。界面电学连接条件为

$$
\varphi^+ = \varphi^-,\quad D_n^+ = D_n^-,\quad \text{或 } Q^+ = Q^- \tag{8-90}
$$

式中 Q 是边界 AB 段上的面电荷，可以写成

$$
\begin{aligned}
Q &= -\int_A^B D_n\mathrm{d}s = -\epsilon\int_A^B(E_1n_1+E_2n_2)\mathrm{d}s = \\
&-\frac{\mathrm{i}\epsilon}{2}\int_A^B[w'(\sigma)\mathrm{d}\sigma-\overline{w'(\sigma)}\mathrm{d}\overline{\sigma}] = -\frac{\mathrm{i}\epsilon}{2}[w(\sigma)-\overline{w(\sigma)}]_A^B
\end{aligned}
\tag{8-91}
$$

保角变换函数式(8 - 24)把 z 平面上椭圆的外部一一对应地保角变换到ς平面上单位圆的外部，但 z 平面上的椭圆的内部变换到ς平面上时，椭圆边界变换为单位圆，椭圆两焦点间的连线变换为半径为 $\rho_0 = \sqrt{m}$ 的圆，即把 z 平面上 L 的内部变换到ς平面上的环形域$\rho_0 \leqslant \rho \leqslant 1$，$0 \leqslant \theta < 2\pi$，$z$ 平面上的椭圆边界 L 变换为ς平面上单位圆周 L_0。由于讨论的物理量电场复势 $w(z)$和应力复势 $\phi(z)$，$\psi(z)$在 L 内处处解析，所以在 L_0 上连续，正如式(4 - 96)所表明的，存在关系

$$w^+(\rho_0 e^{i\varphi}) = w^+(\rho_0 e^{-i\varphi}), \quad \varphi^+(\rho_0 e^{i\varphi}) = \varphi^+(\rho_0 e^{-i\varphi}), \quad \phi^+(\rho_0 e^{i\varphi}) = \phi^+(\rho_0 e^{-i\varphi}) \tag{8-92}$$

8.3.2 基体和夹杂中的电场

在ς平面上的环形域 $\rho_0 \leqslant \rho \leqslant 1$，$0 \leqslant \theta < 2\pi$ 内，电场复势 $w^+(z)$可表成 Laurent 级数，利用式(8 - 92)可得 $w_{-k}^+ = \rho_0^{2k} w_k^+ = m^k w_k^+$，从而 $w^+(z)$可以写成

$$w^+(\varsigma) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w_k^+ \varsigma^k = \sum_{k=1}^{\infty} w_k^+ (\varsigma^k + m^k \varsigma^{-k}) \tag{8-93}$$

基体中的电场复势 $w^-(z)$可表成幂级数，计及无穷远处的边界条件，有

$$w^-(\varsigma) = \Gamma_3 R \varsigma + \sum_{k=0}^{\infty} w_k^- \varsigma^{-k} \tag{8-94}$$

式中 Γ_3 仍由式(8 - 25)表示。利用电场复势，式(8 - 90)可改写为

$$\begin{aligned} & w^+(\sigma) + \overline{w^+(\sigma)} = w^-(\sigma) + \overline{w^-(\sigma)} \\ & \epsilon^+ [w^+(\sigma) - \overline{w^+(\sigma)}] = \epsilon^- [w^-(\sigma) - \overline{w^-(\sigma)}] \end{aligned} \tag{8-95}$$

把式(8 - 93)和(8 - 94)代入(8 - 95)，计及 $\sigma = e^{i\vartheta}$，则得

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} [(w_k^+ + m^k \overline{w}_k^+)\sigma^k + (\overline{w}_k^+ + m^k w_k^+)\sigma^{-k}] = \\ & \qquad \Gamma_3 R\sigma + \overline{\Gamma}_3 R\sigma^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (w_k^- \sigma^{-k} + \overline{w}_k^- \sigma^k) \\ & \epsilon^+ \sum_{k=1}^{\infty} [(w_k^+ - m^k \overline{w}_k^+)\sigma^k - (\overline{w}_k^+ - m^k w_k^+)\sigma^{-k}] = \\ & \qquad \epsilon^- \left[\Gamma_3 R\sigma - \overline{\Gamma}_3 R\sigma^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (w_k^- \sigma^{-k} - \overline{w}_k^- \sigma^k)\right] \end{aligned} \tag{8-96}$$

从上式解得：当 $k > 1$ 时，$w_k^+ = 0$；当 $k = 1$ 时，有

$$\begin{aligned} & w_1^+ = RP, \; P = \frac{2R\epsilon^- [m(\epsilon^- - \epsilon^+)E^\infty - (\epsilon^- + \epsilon^+)\overline{E}^\infty]}{[\epsilon^+(1+m) + \epsilon^-(1-m)][\epsilon^+(1-m) + \epsilon^-(1+m)]} \\ & w_1^- = -\overline{E}^\infty R\alpha, \; \alpha = \frac{(1-m^2)[(\epsilon^-)^2 - (\epsilon^+)^2]E^\infty + 4m\epsilon^-\epsilon^+\overline{E}^\infty}{\overline{E}^\infty[\epsilon^+(1+m) + \epsilon^-(1-m)][\epsilon^+(1-m) + \epsilon^-(1+m)]} \end{aligned} \tag{8-97}$$

最终电场复势可以写成

$$w^+(\varsigma) = RP(\varsigma + m\varsigma^{-1}), \quad w^-(\varsigma) = R\Gamma_3(\varsigma + \alpha\varsigma^{-1}) \tag{8-98}$$

8.3.3 基体和夹杂中的应力场

根据前面的讨论，利用式(8－92)，类似于式(8－93)，夹杂内的应力势可设为

$$
\begin{aligned}
\phi^{+}(\varsigma) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{+}\varsigma^{k} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{+}(\varsigma^{k}+m^{k}\varsigma^{-k}) \\
\psi^{+}(\varsigma) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k^{+}\varsigma^{k} = \sum_{k=1}^{\infty} d_k^{+}(\varsigma^{k}+m^{k}\varsigma^{-k})
\end{aligned} \tag{8-99}
$$

基体中的应力势可设为

$$
\phi^{-}(\varsigma) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{-}\varsigma^{-k}+\Gamma_1 R\varsigma,\quad \psi^{-}(\varsigma) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k^{-}\varsigma^{-k}+\Gamma_2 R\varsigma \tag{8-100}
$$

同时也把含 $w^{\pm}(\sigma)$，$\Omega^{\pm}(\sigma)$的项展成级数

$$
\begin{aligned}
&\alpha_1^{+}\overline{\Omega^{+}(\sigma)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k^{+}\sigma^{k},\quad \alpha_1^{-}\overline{\Omega^{-}(\sigma)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} B_k^{-}\sigma^{k} \\
&\frac{\kappa^{+}}{2}w^{+}(\sigma)\overline{w'^{+}(\sigma)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^{+}\sigma^{k},\quad \frac{\kappa^{-}}{2}w^{-}(\sigma)\overline{w'^{-}(\sigma)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^{-}\sigma^{k} \\
&B_k^{\mp} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\alpha_1^{\mp}\overline{\Omega^{\pm}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\vartheta})}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\vartheta}\mathrm{d}\vartheta,\ A_k^{\mp} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\kappa^{\pm}}{2}w^{\pm}(\sigma)\overline{w'^{\pm}(\sigma)}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\vartheta}\mathrm{d}\vartheta
\end{aligned} \tag{8-101}
$$

把式(8－99)、(8－100)和(8－101)代入(8－88)，比较 $\sigma=\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\vartheta}$ 前的系数，便可求得待定系数 $c_k^{\pm}$ 和 $d_k^{\pm}$，它们满足下列关系。当 $k>3$ 时，有

$$
\begin{aligned}
&c_k^{+}-mc_{k-2}^{+}-(k-2)(m^{k-2}\bar{c}_{k-2}^{+}-\bar{c}_{k-2}^{-})-km(m^{k}\bar{c}_k^{+}-\bar{c}_k^{-})+ \\
&\quad m^{k}\bar{d}_k^{+}-\bar{d}_k^{-}-m(m^{k-2}\bar{d}_{k-2}^{+}-\bar{d}_{k-2}^{-}) = W_k \\
&m^{k-2}\bar{c}_{k-2}^{+}-\bar{c}_{k-2}^{-}-m(m^{k}\bar{c}_k^{+}-\bar{c}_k^{-})+(k-2)m\bar{c}_{k-2}^{+}+k\bar{c}_k^{+}+\bar{d}_{k-2}^{+}-m\bar{d}_k^{+} = W_{-(k-2)}K^{+}\cdot \\
&(c_k^{+}-mc_{k-2}^{+})+(k-2)(m^{k-2}\bar{c}_{k-2}^{+}-h\bar{c}_{k-2}^{-})+km(m^{k}\bar{c}_k^{+}-h\bar{c}_k^{-})- \\
&m^{k}\bar{d}_k^{+}+h\bar{d}_k^{-}+m(m^{k-2}\bar{d}_{k-2}^{+}-h\bar{d}_{k-2}^{-}) = T_k \\
&K^{+}m^{k-2}\bar{c}_{k-2}^{+}-hK^{-}\bar{c}_{k-2}^{-}-m(K^{+}m^{k}\bar{c}_k^{+}-hK^{-}\bar{c}_k^{-})- \\
&\quad (k-2)m\bar{c}_{k-2}^{+}-k\bar{c}_k^{+}-\bar{d}_{k-2}^{+}+m\bar{d}_k^{+} = T_{-(k-2)}
\end{aligned} \tag{8-102}
$$

当 $k\leqslant 3$ 时，有

$$
\begin{aligned}
&mc_1^{+}-c_1^{-}-m(m^{3}c_3^{+}-c_3^{-})+3\bar{c}_3^{+}+m\bar{c}_1^{+}+\bar{d}_1^{+}-m\bar{d}_3^{+} = W_{-1}+m\Gamma_1+\bar{\Gamma}_2 \\
&c_0^{+}-c_0^{-}-m(m^{2}c_2^{+}-c_2^{-})+2c_2^{+}-\bar{d}_0^{-}+\bar{d}_0^{+}-m\bar{d}_2^{+} = W_0 \\
&c_2^{+}-mc_0^{+}+mc_0^{-}-2m(m^{2}\bar{c}_2^{+}-\bar{c}_2^{-})+m^{2}\bar{d}_2^{+}-\bar{d}_2^{-}-m\bar{d}_0^{+}+m\bar{d}_0^{-} = W_2 \\
&c_3^{+}-mc_1^{+}-m\bar{c}_1^{+}+\bar{c}_1^{-}-3m(m^{3}\bar{c}_3^{+}-\bar{c}_3^{-})+m^{3}\bar{d}_3^{+}-\bar{d}_3-m(m\bar{d}_1^{+}-\bar{d}_1^{-}) = W_3-m\Gamma_1
\end{aligned} \tag{8-103}
$$

$$
c_1^{+}-m(mc_1^{+}-c_1^{-})+\bar{c}_1^{+}-m(m\bar{c}_1^{+}-\bar{c}_1^{-})-\bar{d}_1^{-} = W_1+2\Gamma_1-m\bar{\Gamma}_2 \tag{8-104}
$$

和

$$K^{+} mc_1^{+} - hK^{-} c_1^{-} - m(K^{+} m^3 c_3^{+} - hK^{-} c_3^{-}) - 3\bar{c}_3^{+} - m\bar{c}_1^{+} - \bar{d}_1^{+} + m\bar{d}_3^{+} =$$
$$T_{-1} - hm\Gamma_1 - h\bar{\Gamma}_2$$
$$K^{+} c_0^{+} - hK^{-} c_0^{-} - m(K^{+} m^2 c_2^{-} - hK\ \ c_2^{-}) - 2c_2^{+} + h\bar{d}_0^{-} - \bar{d}_0^{+} + m\bar{d}_2^{+} = T_0 \tag{8-105}$$
$$K^{+} c_2^{+} - K^{+} mc_0^{+} + hK^{-} mc_0^{-} - 2m(m^2\bar{c}_2^{+} - h\bar{c}_2^{-}) - m^2\bar{d}_2^{+} + h\bar{d}_2^{-} + m\bar{d}_0^{+} - hm\bar{d}_0^{-} = T_2$$
$$K^{+} c_3^{+} - K^{+} mc_1^{+} + m\bar{c}_1^{+} - h\bar{c}_1^{-} + 3m(m^3\bar{c}_3^{+} - h\bar{c}_3^{-}) - m^3\bar{d}_3^{+} + h\bar{d}_3^{-} +$$
$$m(m\bar{d}_1^{+} - h\bar{d}_1^{-}) = T_3 - hK^{-} m\Gamma_1$$

$$K^{+} c_1^{-} - m(K^{+} mc_1^{+} - hK^{-} c_1^{-}) - \bar{c}_1^{+} + m(m\bar{c}_1^{+} - h\bar{c}_1^{-}) + h\bar{d}_1^{-} =$$
$$T_1 - hK^{-}\Gamma_1 - h\Gamma_1 - hm\bar{\Gamma}_2 \tag{8-106}$$

式中

$$W_k = \frac{1}{R}(A_k^{-} - A_k^{+}),\ T_k = \frac{1}{R}(A_k^{+} - hA_k) + h(B_k^{-} - mB_{k-2}^{-}) - (B_k^{+} - mB_{k-2}^{+}) \tag{8-107}$$

如果在式(8-99)和(8-100)中取足够多的项,则可得到满意的全场位移和应力解。在上列诸式中,$c_0^{\pm}$ 和 $d_0^{\pm}$ 不影响应力场,因而可令 $c_0^{-} = d_0^{-} = 0$,而 c_0^{+},d_0^{+} 用来保证位移的连续性。

对于圆形夹杂有 $m = 0$,$R = a$,此时可以得到封闭解[113],详细表达式此处略去。

8.3.4 例题

讨论圆形夹杂。夹杂半径 $R = 0.005\,\mathrm{m}$,无穷远处仅承受电场载荷 $E^{\infty} = 10^6 e^{i\beta}(\mathrm{V/m})$,基体材料为具有高介电常数的聚醚薄膜 MP1880,基本材料常数为 $E = 0.71$ MPa,$\nu = 0.49$,$a_1 = -7.08 \times 10^{-11}$ F/m,$a_2 = -2.142 \times 10^{-10}$ F/m,$\epsilon = 1.78 \times 10^{-11}$ F/m。讨论下面四种情况:

(1) 情况 1:$\dfrac{K^{+}}{K^{-}} = 1$,$h = 1.3$,$\dfrac{a_1^{+}}{a_1^{-}} = \dfrac{a_2^{+}}{a_2^{-}} = 3\left(或\dfrac{1}{3}\right)$,$\beta = \dfrac{\pi}{2}$,$\dfrac{\epsilon^{+}}{\epsilon^{-}} = 1$,见图 8-2。

(2) 情况 2:$\dfrac{K^{+}}{K^{-}} = 1$,$h = 1.3$,$\dfrac{a_1^{+}}{a_1^{-}} = \dfrac{a_2^{+}}{a_2^{-}} = 3\left(或\dfrac{1}{3}\right)$,$\beta = \dfrac{\pi}{2}$,$\dfrac{\epsilon^{+}}{\epsilon^{-}} = 3$,见图 8-3。

(3) 情况 3:$\dfrac{K^{+}}{K^{-}} = 0.8$,$h = 0.7$,$\dfrac{a_1^{+}}{a_1^{-}} = \dfrac{a_2^{+}}{a_2^{-}} = 3\left(或\dfrac{1}{3}\right)$,$\beta = \dfrac{\pi}{2}$,$\dfrac{\epsilon^{+}}{\epsilon} = \dfrac{1}{3}$,见图 8-4。

(4) 情况 4:$\dfrac{K^{+}}{K^{-}} = 1.0$,$h = 1.3$,$\dfrac{a_1^{+}}{a_1^{-}} = \dfrac{a_2^{+}}{a_2^{-}} = 3\left(或\dfrac{1}{3}\right)$,$\beta = \dfrac{\pi}{4}$,$\dfrac{\epsilon^{+}}{\epsilon^{-}} = 3$,见图 8-5。

诸图中纵坐标为量纲一应力 σ_{ij}/σ_0,$\sigma_0 = -\kappa E_k^{\infty} E_k^{\infty}/4$,横坐标为量纲一距离 x_1/R。各图中的曲线 1, 3, 5(2, 4, 6)是 $a_1^{+}/a_1^{-} = a_2^{+}/a_2^{-} = 3(1/3)$ 时的 σ_{11}/σ_0,σ_{22}/σ_0,σ_{12}/σ_0 随 x_1/R 的分布曲线。从诸图可知,由于电场体积力作用,基体和夹杂界面上的机械面力是不连续的,这在图 8-5 中特别明显。夹杂内部的应力一般是不均匀的,但由于电场的总体影响较小,所以不很明显,这和线性的情况不同,线性情况下,夹杂内部的应力是均匀分布的。

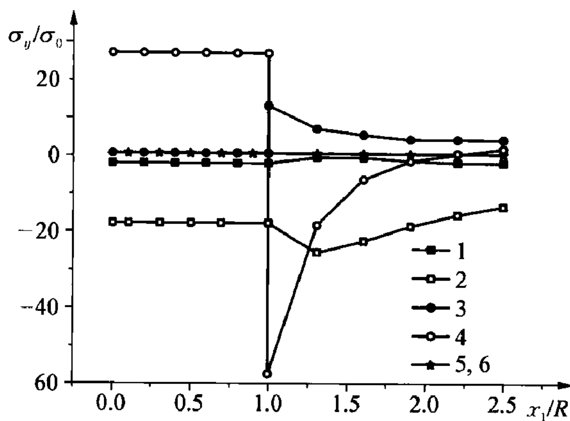


图 8-2 情况 1 下，量纲一应力 σ_{ij}/σ_0 随量纲一距离 x_1/R 的分布

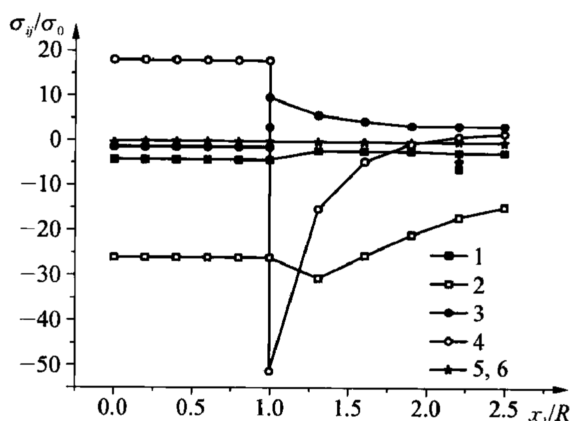


图 8-3 情况 2 下，量纲一应力 σ_{ij}/σ_0 随量纲一距离 x_1/R 的分布

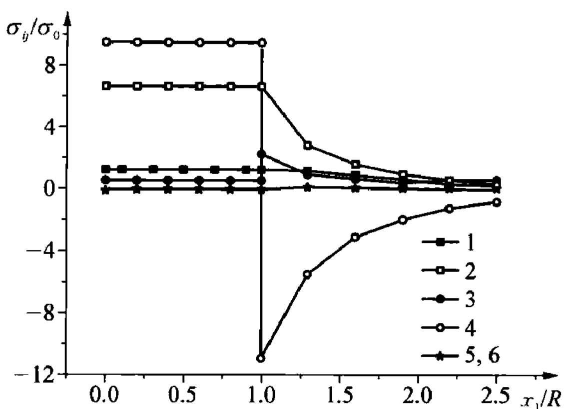


图 8-4 情况 3 下，量纲一应力 σ_{ij}/σ_0 随量纲一距离 x_1/R 的分布

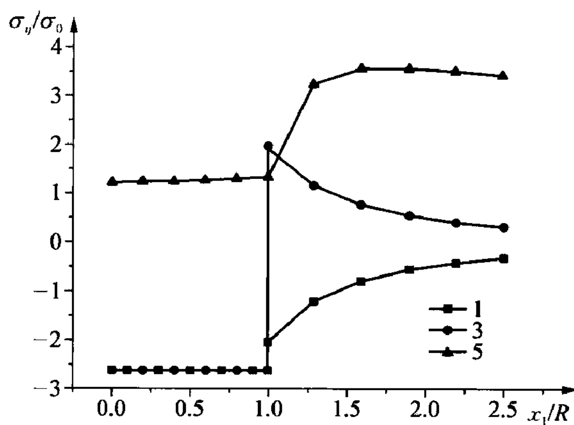


图 8-5 情况 4 下，量纲一应力 σ_{ij}/σ_0 随量纲一距离 x_1/R 的分布

8.4 裂纹端部局部电饱和时的裂纹的解[114]

8.4.1 绝缘裂纹问题概述

通常带有裂纹的电致伸缩陶瓷在工作状态下，裂尖的机械性质往往处于弹性范围，但在高电场作用下，裂尖的电学性质会产生饱和，为了更好地理解这类工况下的材料的力学状态，Jiang 和 Kuang[114]讨论了无穷远处作用广义载荷的带有中心裂纹压电陶瓷的无限大板在裂尖发生局部电学饱和的裂纹问题。设裂纹长为 $2a$，坐标原点取在裂纹中心。此时问题可以划分为三个区域 $S_L+S_R+S_0$。S_L 和 S_R 为左右裂尖的电学饱和区，S_0 为在此两区域之外的线性区（图 8-6(a)）。在电学线性区域 S_0，$|E|=\sqrt{E_kE_k}<E_c$，材料服从本构关系式(8-1)，在电学非线性区域 S_L 和 S_R 有

$$\sigma_{ij} = \lambda e_{kk}\delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} - (a_1 D_i D_j + a_2 D_k D_k \delta_{ij})/(2\hat{\epsilon}^2)$$
$$D_i = D_c E_i / |E|, \ |E| = \sqrt{E_k E_k} \geqslant E_c \tag{8-108}$$

式中 D_c 和 E_c 分别为饱和电位移和饱和电场，本分析中取为常数，$\hat{\epsilon}$ 为某实验常数。相应的线性问题示于图 8-6(b)。问题的边界条件为

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{\infty}, \quad E = E_1^{\infty} + \mathrm{i}E_2^{\infty} = E_0 e^{\mathrm{i}\beta}, \ x_k x_k \to \infty$$
$$D_2 = 0, \ x_2 = 0, \ -a < x_1 < a \tag{8-109}$$

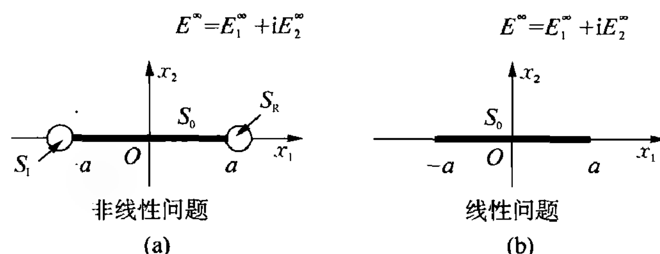


图 8-6　裂纹分区模型

(a) 具有电学饱和区的三区域模型；(b) 线性裂纹问题模型

8.4.2 绝缘裂纹裂尖局部饱和时电致伸缩材料中的电场

1) 裂尖无局部饱和时的中心裂纹的电场解

按式(8-7)和(8-8)，有

$$D_1 = -\frac{1}{2}\epsilon[\overline{w'(z)} + w'(z)], \quad D_2 = \frac{1}{2}\mathrm{i}\epsilon[\overline{w'(z)} - w'(z)] \tag{8-110}$$

中心裂纹面上的边界条件是

$$D_2^+ = D_2^- = 0, \quad \text{或} \overline{w'^+(\sigma)} - w'^+(\sigma) = \overline{w'^-(\sigma)} - w'^-(\sigma) = 0 \tag{8-111}$$

式中上标"+"表示裂纹面的上岸，上标"−"表示裂纹面的下岸。由上式推出

$$[\overline{w'(\sigma)} - w'(\sigma)]^+ + [\overline{w'(\sigma)} - w'(\sigma)]^- = 0$$
$$[\overline{w'(\sigma)} - w'(\sigma)]^+ - [\overline{w'(\sigma)} - w'(\sigma)]^- = 0 \tag{8-112}$$

上式是标准的 Hilbert 问题，按题意，当 $|z| \to \infty$ 时，$w'(z) = \Gamma_3 = -\overline{E}^{\infty}$。解此问题，得

$$w'(z) = \frac{1}{2}(\Gamma_3 - \overline{\Gamma}_3)\frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} + \frac{1}{2}(\Gamma_3 + \overline{\Gamma}_3) = \mathrm{i}E_2^{\infty}\frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - E_1^{\infty}$$
$$w(z) = \mathrm{i}E_2^{\infty}\sqrt{z^2 - a^2} - E_1^{\infty} z \tag{8-113}$$

在裂尖 $z = a$ 附近，有

$$w'(z) = \mathrm{i}E_2^{\infty}\frac{z}{\sqrt{z^2 - a^2}} - E_1^{\infty} \approx \frac{\mathrm{i}E_2^{\infty}\sqrt{\pi a}}{\sqrt{2\pi}\sqrt{z - a}} = \frac{\mathrm{i}K_E}{\sqrt{2\pi(z - a)}} \tag{8-114}$$

式中 $K_E = E_2^{\infty}\sqrt{\pi a}$ 是电场强度因子。今后将不计 E_1^{∞} 的影响，因其不影响裂尖渐近场。

在以裂尖为坐标原点的局部坐标系 Oz_1 中，$z_1 = z - a = re^{i\theta}$（图 5-1），故有

$$
\begin{aligned}
&w'(z) = \frac{iK_E}{\sqrt{2\pi z_1}},\quad E_1 - iE_2 = -\frac{iK_E}{\sqrt{2\pi z_1}} = -\frac{iK_E}{\sqrt{2\pi r}}e^{-i\theta} \\
&E_1 = -\frac{K_E}{\sqrt{2\pi r}}\sin\theta,\ E_2 = \frac{K_E}{\sqrt{2\pi r}}\cos\theta
\end{aligned} \tag{8-115}
$$

2）*存在裂尖局部饱和区 S_R 时的电场近似解*

裂尖局部饱和区域模型的电场问题和Ⅲ型裂纹裂尖的弹塑性问题相类似，两者的控制方程具有相同的数学形式，因而可以借用那里的方法。中心裂纹的裂尖渐近解和半无限裂纹的裂尖渐近解是相同的，因而讨论更方便的半无限裂纹问题。下面采用坐标原点取在裂纹右尖点的局部坐标系 Oy_i（图 8-7），其上的点用 z_1 表示。在 z_1 平面上的边值问题为

$$
\begin{aligned}
&D_2^{\mp} = 0,\ y_2 = 0,\ -\infty < y_1 \leqslant 0 \\
&\sqrt{D_1^2 + D_2^2} = D_c,\ z_1 \in S_R \\
&D_1^2 + D_2^2 = 0,\ z_1 \to \infty
\end{aligned} \tag{8-116}
$$

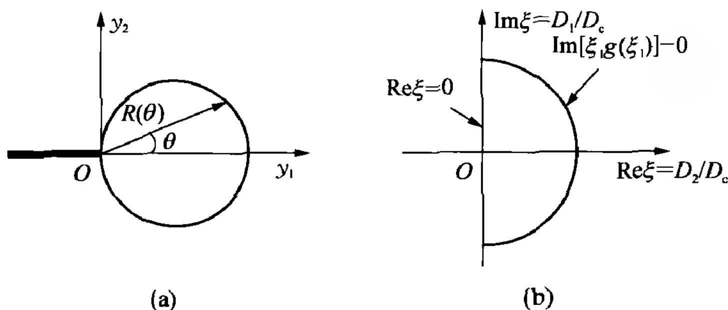


图 8-7　裂尖局部饱和区

(a) 物理平面 z；(b) 电位移变换平面 ξ

式中 S_R 不包含 O 点。把在 z_1 平面上求解电场的问题转换为在量纲一的电位移 $\xi = \xi_1 + i\xi_2$ 平面上求解坐标 z_1 的问题。为此，在 ξ 平面上令

$$
\xi = (D_2 + iD_1)/D_c,\quad 或\ \xi = (E_2 + iE_1)/E_c = -iw'/E_c \tag{8-117}
$$

按式(8-115)，把在裂尖电场饱和区内的电位移设成下列形式

$$
D_1 = -D_c\sin\theta,\quad D_2 = D_c\cos\theta \tag{8-118}
$$

显然，$y_2 = 0$ 对应于 $\theta = 0$ 和 $\pi/2$，故上式满足式(8-116)表示的裂纹面上的边界条件。设饱和区 S_R 内没有自由电荷，故有 $D_{i,i} = 0$。参照图 8-7，在 z_1 平面上存在如下关系

$$
\tan\theta = y_2/y_1,\quad z_1 = y_1 + iy_2 \tag{8-119}
$$

设 t 是饱和区 S_R 的边界 $R=R(\theta)$ 上的一点，则可以把 t 写成下列形式

$$
t = R(\theta)e^{i\theta} \tag{8-120}
$$

式中 $R(\theta)$ 是待定的函数。于是按式(8-117)和(8-118)，S_R 在 ξ 平面上的边界是 $e^{-i\theta} = \bar{\sigma}$。对应于式(8-116)，在 ξ 平面上的边值问题为

$$y_2 = 0,\ -\infty < y_1 \leqslant 0,\ \mathrm{Re}\xi = 0$$
$$z_1 \in R,\ \xi = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \tag{8-121}$$
$$z_1 \to \infty,\ \xi = 0$$

式(8-121)在 ξ 平面上代表的图形是右半平面上的单位半圆和 $-1 \leqslant \xi_2 \leqslant 1$ 的一段虚轴。此区域内的 ξ 和 z_1 平面上式(8-116)代表的饱和区域之外的 z_1 对应。现在的问题是要寻求一个满足上述要求的待定变换 $z_1 = f(\xi)$，$t = f(\bar{\sigma})$，其中 $\sigma = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$。根据上面提出的要求，可令

$$R(\theta) = \bar{\sigma} f(\bar{\sigma}) \tag{8-122}$$

因为 $R(\theta)$是实数，所以应有

$$\bar{\sigma} f(\bar{\sigma}) - \sigma \bar{f}(\sigma) = 0, \quad 或\ \mathrm{Im}[\bar{\sigma} f(\bar{\sigma})] = 0 \tag{8-123}$$

把线性问题的渐近解式(8-115)看成是 $z_1 \to \infty$时的电学边界条件，即有

$$\begin{aligned}(E_c \xi)^2 &= (E_2 + \mathrm{i}E_1)^2 = -(E_1 - \mathrm{i}E_2)^2 \\ z_1 &= -K_E^2/2\pi(E_1 - \mathrm{i}E_2)^2 = K_E^2/2\pi(E_c\xi)^2\end{aligned} \tag{8-124}$$

用线性渐近解代表无穷远处的边界条件，这正是问题的解的近似之处。上式满足 $z_1 \to \infty$ 时 $\xi = 0$ 的条件。按照式(8-123)，在单位圆周上有

$$\bar{\sigma} f(\bar{\sigma}) = \sigma \bar{f}(\sigma), \quad 或\ f(\bar{\sigma}) = \sigma^2 \bar{f}(\sigma) \tag{8-125}$$

由此推出饱和区外电场的近似解为

$$z_1 = f(\xi) = \frac{K_E^2}{2\pi E_c^2}(1 + \xi^{-2}), \quad w'(z) = \frac{\mathrm{i}K_E}{\sqrt{2\pi z_1 - (K_E/E_c)^2}} \tag{8-126}$$

显然，上式满足式(8-125)和 $z_1 \to \infty$ 时 $\xi = 0$ 的要求。同时在 z_1 平面上，饱和区的边界为

$$R(\theta) = \bar{\sigma} f(\bar{\sigma}) = \frac{K_E^2}{2\pi E_c^2}\bar{\sigma}(1 + \bar{\sigma}^{-2}) = \frac{K_E^2}{2\pi E_c^2}(\bar{\sigma} + \bar{\sigma}^{-1}) = \frac{K_E^2}{\pi E_c^2}\cos\theta \tag{8-127}$$

上式表明，裂纹端部饱和区是一个半径为 ρ 的圆，且

$$\rho = K_E^2/(2\pi E_c^2) \tag{8-128}$$

这一结果也可直接由线性问题的渐近解近似获得。事实上，如在式(8-115)中令 $E_1^2 + E_2^2 = E_c^2$ 时的 r 为饱和区的半径，便可得到式(8-128)。

3) 裂尖区局部饱和时的中心裂纹的电场解

前面给出了裂尖无饱和区时的全场电场解和裂尖局部饱和时电场的近似解。对于裂尖区局部饱和时的中心裂纹的全场电场解，借用断裂力学中有效裂纹长度的方法，即把裂纹的真实长度用有效长度来代替，然后把有效裂纹看成理想线性裂纹时的电场解，作为真实裂纹存在裂尖局部饱和时的除饱和区外的线性区的电场解(图 8-7)，式(8-126)正是这种理论的数学表述。按式(8-126)，有效裂纹长度取

$$a_{\mathrm{eff}} = a + \rho,\ \rho = \frac{K_E^2}{2\pi E_c^2} = a\frac{(E_2^\infty)^2}{2E_c^2 - (E_2^\infty)^2} \tag{8-129}$$

从而按式(8-126)，对于中心裂纹，在除饱和区外的线性区 S_0 内的电场为

$$E_2 + \mathrm{i}E_1 = E_2^{\infty}\frac{z}{\sqrt{z^2-(a+\rho)^2}} - E_1^{\infty} \approx \frac{K_E}{\sqrt{\pi(a+\rho)}}\frac{z}{\sqrt{z^2-(a+\rho)^2}}$$
$$w(z) = \mathrm{i}E_2^{\infty}\sqrt{z^2-(a+\rho)^2} - E_1^{\infty}z \qquad (8-130)$$

按式(8-117)和(8-118)，在饱和区 S_R 内的电场解为

$$D_2 + \mathrm{i}D_1 = D_c \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \qquad (8-131)$$

现在还需证明 S_0 区内的解式(8-130)和 S_R 区内的解式(8-131)在界面上是近似相等的。注意到在 S_R 区的边界上有 $z=a+\rho+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta}$ ($\Theta=2\theta$)（图 8-8），以此代入式(8-130)，得

$$E_2 + \mathrm{i}E_1 = \frac{E_2^{\infty}(a+\rho+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta})}{\sqrt{(2a+2\rho+\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta})\rho\mathrm{e}^{\mathrm{i}\Theta}}} \approx \frac{E_2^{\infty}\sqrt{a+\rho}}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{\rho}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} =$$
$$E_c\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} + \frac{3\rho}{4(a+\rho)}E_c\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \qquad (8-132)$$

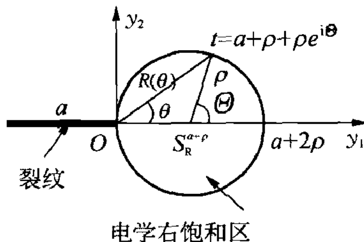


图 8-8　裂尖局部饱和区的电场

由此可见，在精确到 $\rho/(a+\rho)$ 的量级内，S_0 区内的解到 S_R 区内的解是连续的。而对于通常的情形，$\rho/(a+\rho) \ll 1$，所以上面得到的解是合理的。

8.4.3　绝缘裂纹裂尖局部饱和时电致伸缩材料中的应力场

1) 非饱和区的应力场

由于无限板的机械性质是弹性的，裂尖没有塑性区，所以这里的问题和 8.1.4 节是类似的，令 $b=0$，$m=1$，$R=a/2$，便可从椭圆孔的解转换为中心裂纹的解，和那里的差别在于电场的表达式。因此式(8-31)～(8-34)在这里同样适用，只须把 8.1.4 节中的电场表达式(8-26)换成本处的式(8-130)。设 $E_1^{\infty}=0$，综合起来，在变换平面ς上，确定应力势的方程为

$$\omega(\sigma)\frac{\overline{\phi'(\sigma)}}{\overline{\omega'(\sigma)}} + \phi(\sigma) + \overline{\psi(\sigma)} + \frac{1}{2}\kappa w(\sigma)\overline{w'(\sigma)} = 0$$
$$\phi(\varsigma) = \Gamma_1 R\varsigma + \phi_0(\varsigma),\quad \psi(\varsigma) = \Gamma_2 R\varsigma + \psi_0(\varsigma) \qquad (8-133)$$
$$w(z) = \mathrm{i}E_2^{\infty}\sqrt{z^2-a^2} = \mathrm{i}E_2^{\infty}\frac{a}{2}\sqrt{[(\varsigma+\varsigma^{-1})]^2-[2(a+\rho)/a]^2}$$

式中变换函数 $z=\omega(\varsigma)$ 由式(8-24)表示，Γ_1，Γ_2 由式(8-32)表示。把上式的第一式和它的共轭方程的两边同乘以 $\mathrm{d}\sigma/[2\pi\mathrm{i}(\sigma-\varsigma)]$，再利用 Cauchy 型积分的初等积分公式，便得

$$\phi(\varsigma) = \frac{\Gamma_1 a\varsigma}{2} + \phi_0(\varsigma),\quad \phi_0(\varsigma) = -\frac{\Gamma_1 a}{2\varsigma} - \frac{\overline{\Gamma}_2 a}{2\varsigma} + \frac{\kappa a(E_2^{\infty})^2}{2\varsigma}$$
$$\psi(\varsigma) = \frac{\Gamma_2 a\varsigma}{2} - \frac{\Gamma_1 a}{2\varsigma} - \frac{\Gamma_1 a}{\varsigma^2-1}\varsigma - \frac{\varsigma(1+\varsigma^2)}{(\varsigma^2-1)}\phi_0'(\varsigma) + \frac{\kappa a(E_2^{\infty})^2}{2\varsigma} \qquad (8-134)$$

由上式易于得到 z 平面上的表达式。在裂尖处，设 $z=a+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$（图 8-9），忽略 ρ^{-1} 及以上的小量，通过冗长的计算，得到伪总应力的渐近展开式为

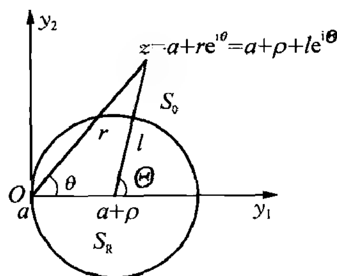


图 8-9　等效裂纹

$$\tilde{\sigma}_{22}+\tilde{\sigma}_{11}=[(2\Gamma_1+\overline{\Gamma}_2+\kappa E_2^{\infty 2})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}+(2\Gamma_1+\Gamma_2+\kappa E_2^{\infty 2})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}]\sqrt{a/2r}+\kappa E_2^{\infty 2}(a+\rho)/2l$$

$$\tilde{\sigma}_{22}-\tilde{\sigma}_{11}+2\mathrm{i}\,\tilde{\sigma}_{12}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\theta/2}[(2\Gamma_1+\overline{\Gamma}_2+\kappa E_2^{\infty 2})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}-(2\Gamma_1+2\Gamma_2-\overline{\Gamma}_2+\kappa E_2^{\infty 2})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}]\sqrt{a/r}-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\Theta}\kappa E_2^{\infty 2}(a+\rho)/2l$$

$$l=|r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\rho|,\ \Theta=Arg(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\rho) \tag{8-135}$$

因为 $|r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\rho|\geqslant\rho$，所以它是有限值。

2) 饱和区内的应力场

在饱和区 S_R 内，电位移取有限值，因此裂尖应力渐近解可设为

$$\tilde{\sigma}_{ij}=h_{ij}^{(1)}(\theta)/\sqrt{r}+h_{ij}^{(2)}(\theta)/\rho+0(r) \tag{8-136}$$

上式表明，和电学线性理论不同，局部饱和理论中的应力在裂尖处仍然具有 $1/\sqrt{r}$的奇异性。由于电位移在 S_R 和 S_0 的界面上连续，所以 Maxwell 应力也连续，从而机械应力和伪总应力在界面上也连续。所以可以通过应力在界面上连续的条件求出 $h_{ij}^{(1)}(\theta)$，$h_{ij}^{(2)}(\theta)$，即

$$\frac{h_{11}^{(1)}(\theta)+h_{22}^{(1)}(\theta)}{\sqrt{R(\theta)}}+\frac{h_{11}^{(2)}(\theta)+h_{22}^{(2)}(\theta)}{\rho}=\frac{\kappa E_2^{\infty 2}(a+\rho)}{2l_0}+[(2\Gamma_1+\overline{\Gamma}_2+\kappa E_2^{\infty 2})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}+(2\Gamma_1+\Gamma_2+\kappa E_2^{\infty 2})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}]\sqrt{\frac{a}{2R(\theta)}}\cdot$$

$$\frac{h_{22}^{(1)}(\theta)-h_{11}^{(1)}(\theta)+2\mathrm{i}h_{12}^{(1)}(\theta)}{\sqrt{R(\theta)}}+\frac{h_{22}^{(2)}(\theta)-h_{11}^{(2)}(\theta)+2\mathrm{i}h_{12}^{(2)}(\theta)}{\rho}=-\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\theta}\frac{\kappa E_2^{\infty 2}(a+\rho)}{2l_0}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\theta/2}[(2\Gamma_1+\overline{\Gamma}_2+\kappa E_2^{\infty 2})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}-(2\Gamma_1+2\Gamma_2-\overline{\Gamma}_2+\kappa E_2^{\infty 2})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}]\sqrt{\frac{a}{R(\theta)}} \tag{8-137}$$

式中 $l_0=|R(\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\rho|$，并利用了 $\Theta=2\theta$。上式中 $R(\theta)=2\rho\cos\theta$，同时 $|R(\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\rho|=\rho$，当 $\rho/a\ll 1$ 时，$(a+\rho)/|R(\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\rho|\approx a/\rho$。比较$\sqrt{R}$和 $1/\rho$ 前的系数，可得

$$\tilde{\sigma}_{22}+\tilde{\sigma}_{11}=[(2\Gamma_1+\overline{\Gamma}_2+\kappa E_2^{\infty 2})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}+(2\Gamma_1+\Gamma_2+\kappa E_2^{\infty 2})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}]\sqrt{a/2r}+\kappa E_2^{\infty 2}a/2\rho$$

$$\tilde{\sigma}_{22}-\tilde{\sigma}_{11}+2\mathrm{i}\,\tilde{\sigma}_{12}=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{e}^{3\mathrm{i}\theta/2}[(2\Gamma_1+\overline{\Gamma}_2+\kappa E_2^{\infty 2})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}-(2\Gamma_1+2\Gamma_2-\overline{\Gamma}_2+\kappa E_2^{\infty 2})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}]\sqrt{a/r}-\mathrm{e}^{-4\mathrm{i}\theta}\kappa E_2^{\infty 2}a/2\rho \tag{8-138}$$

易于证明上式表示的应力场在精确到 ρ^{-1}和 $1/\sqrt{r}$的量级时，它们在 S_R 和 S_0 的界面上连续。

3) 裂尖应力场的分区

式(8-135)和(8-136)代表的应力场可以分成 4 个区(图 8-10)。

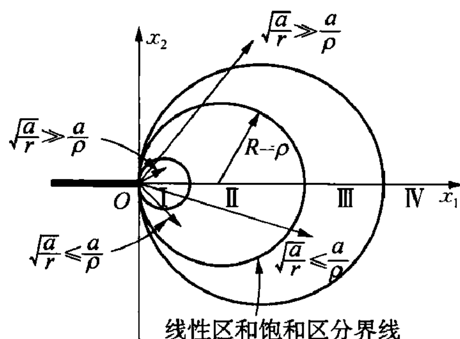


图 8-10 裂尖应力场的分区

区域Ⅰ，极靠近裂尖区：$\sqrt{a/r} \gg a/\rho$，$r \ll \rho^2/a$。在此区内，应力具有 $1/\sqrt{r}$ 的奇异性

$$
\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_{22}+\tilde{\sigma}_{11} &= \left[(2\Gamma_1+\overline{\Gamma}_2+\kappa E_2^{\infty 2})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2}+(2\Gamma_1+\Gamma_2+\kappa E_2^{\infty 2})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta/2}\right]\sqrt{a/2r} \\
\tilde{\sigma}_{22}-\tilde{\sigma}_{11}+2\mathrm{i}\,\tilde{\sigma}_{12} &= -\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathrm{e}^{-3\mathrm{i}\theta/2}\left[(2\Gamma_1+\overline{\Gamma}_2+\kappa E_2^{\infty 2})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}-\right. \\
&\qquad \left.(2\Gamma_1+2\Gamma_2-\overline{\Gamma}_2+\kappa E_2^{\infty 2})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right]\sqrt{a/r}
\end{aligned}
\tag{8-139}
$$

区域Ⅱ，除区域Ⅰ外的饱和区：$\sqrt{a/r} \sim a/\rho$。含 $\sqrt{a/r}$，a/ρ 的项都对应力场有影响，必须用公式(8-138)计算。此区内电场和应力都没有奇异性。

区域Ⅲ，接近饱和区的线性区：$\sqrt{a/r} \sim a/\mid r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\rho\mid$，此时需用式(8-135)计算。

区域Ⅳ，远离饱和区的线性区：$\sqrt{a/r} \gg a/\mid r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\rho\mid$，此时含 $a/\mid r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\rho\mid$ 的项可以略去，从而又可用式(8-139)计算，应力再次具有 $1/\sqrt{r}$ 的性质，但已不再代表奇异性。

8.4.4 传导裂纹问题

对于传导裂纹或没有刚度的电极问题，问题的电学边界条件不同于裂纹，此时为

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{ij}=0, \quad E=E_1^{\infty}+\mathrm{i}E_2^{\infty}=E_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta},\ x_k x_k \to \infty \\
&\varphi=0, \quad \text{或 } E_1=0,\ x_2=0,\ -a<x_1<a
\end{aligned}
\tag{8-140}
$$

1) 线性问题的解

按式(8-8)，电极面上的边界条件是

$$
E_1^{+}=E_1^{-}=0, \quad \text{或}\ \overline{w'^{+}(\sigma)}+w'^{+}(\sigma)=\overline{w'^{-}(\sigma)}+w'^{-}(\sigma)=0 \tag{8-141}
$$

对于位于$(-a,\ a)$的中心裂纹，由上式推出

$$
w'(z)=-E_1^{\infty}\frac{z}{\sqrt{z^2-a^2}}+\mathrm{i}E_2^{\infty}, \quad w(z)=-E_1^{\infty}\sqrt{z^2-a^2}+\mathrm{i}E_2^{\infty}z \tag{8-142}
$$

在裂尖 $z=a$ 附近的渐近解为

$$
\begin{aligned}
&w'(z)=-E_1+\mathrm{i}E_2 \approx -\frac{K_{\mathrm{E}}}{\sqrt{2\pi z_1}}=-\frac{K_{\mathrm{E}}}{\sqrt{2\pi r}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta},\ z_1=z-a \\
&E_1=\frac{K_{\mathrm{E}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\theta, \quad E_2=\frac{K_{\mathrm{E}}}{\sqrt{2\pi r}}\sin\theta,\ K_{\mathrm{E}}=E_1^{\infty}\sqrt{\pi a}
\end{aligned}
\tag{8-143}
$$

2) 存在裂尖局部饱和区 S_R 时的电场近似解

类似于绝缘裂纹问题，讨论更方便的半无限裂问题。下面采用坐标原点取在裂纹右尖点的局部坐标系 Oy_i(图 8-7)，其上的点用 z_1 表示。在 z_1 平面上的边值问题为

$$\begin{aligned} &D_1^{\pm} = 0,\ y_2 = 0,\ -\infty < y_1 \leqslant 0 \\ &\sqrt{D_1^2 + D_2^2} = D_c,\ z_1 \in S_R \\ &D_1^2 + D_2^2 = 0,\ z_1 \to \infty \end{aligned} \tag{8-144}$$

我们把在 z_1 平面上求解电场的问题转换为在量纲一的电场 $\varsigma = \varsigma_1 + i\varsigma_2$ 平面上求解坐标 z_1 的问题。为此，在ς平面上令

$$\varsigma = (D_1 - iD_2)/D_c,\quad 或\varsigma = (E_1 - iE_2)/E_c \tag{8-145}$$

按式(8-143)，把在裂尖电场饱和区内的电位移设成下列形式

$$D_1 = D_c\cos\theta,\quad D_2 = D_c\sin\theta \tag{8-146}$$

显然，上式满足式(8-140)和 $\theta = \pi$ 时电极上的边界条件。重复 8.4.2 节中 2)的讨论，仍然得到饱和区的边界和半径分别为

$$R(\theta) = \frac{K_E^2}{\pi E_c^2}\cos\theta,\quad \rho = K_E^2/(2\pi E_c^2) \tag{8-147}$$

若在式(8-143)中令 $E_1^2 + E_2^2 = E_c^2$ 时的 r 为饱和区的半径，也可得到式(8-147)。

和前面一样，讨论中心裂纹的电场和应力的近似解，这并无困难。本处略去。

8.5 电载荷作用下绝缘裂纹的渐近分析

8.5.1 问题概述

上一节中讨论了一般载荷作用下裂纹端部局部电饱和时的裂纹的近似解，本节对这同一问题作渐近分析。裂纹的扩展主要决定于裂尖附近的应力场。因此，为使问题简化，把坐标(x_1, x_2)或极坐标(r, θ)的原点取在裂尖处，记为 $z = x_1 + ix_2 = re^{i\theta}$；通常裂纹长度远大于我们感兴趣的裂尖区，所以可以把裂纹看成无限长，而把无穷远处的边界条件取成线性问题的渐近解。Beom 和 Kim[115] 讨论过这类渐近解问题。他们取用以 $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{D}$ 为自变量的下列本构方程

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1+\nu}{Y}(\sigma_{\alpha\beta} - \nu\sigma_{\gamma\gamma}\delta_{\alpha\beta}) + Q(1+q)D_\alpha D_\beta - Qq(1+\nu)D_\gamma D_\gamma\delta_{\alpha\beta} \tag{8-148}$$

式中 Y 是弹性模量，ν 是 Poisson 比，Q 和 q 是电致伸缩系数。显然，上述本构方程和式(8-11)是等价的。相应地，上一节给出的线性区域的电场解式(8-115)现在改为 $D_2 + iD_1 = K_D/\sqrt{2\pi z}$。在渐近分析中便把它取为无穷远处的边界条件(图 8-11)，即

$$D_2 + iD_1 = K_D/\sqrt{2\pi z},\ |z| \to \infty \tag{8-149}$$

式中 K_D 为电位移强度因子。按式(8-130)和(8-131)，电位移的近似解取为

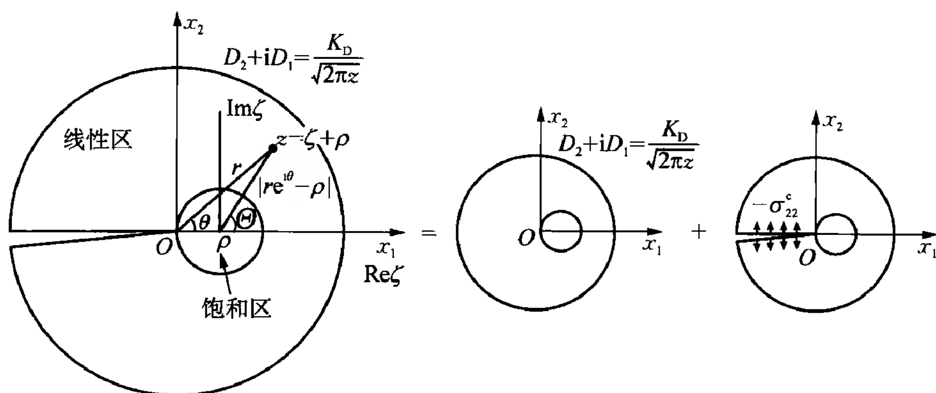


图 8-11 裂尖渐近场分析的图示

$$
\begin{aligned}
&D_2+\mathrm{i}D_1=K_D/\sqrt{2\pi\varsigma},\ \varsigma=z-\rho\ (\text{线性区})\\
&D_2+\mathrm{i}D_1=D_c e^{-\mathrm{i}\theta}\ (\text{饱和区})
\end{aligned}
\tag{8-150}
$$

式中 ρ 是饱和区的半径，$\rho=K_D^2/(2\pi D_c^2)$。现在的问题就化为在上述电场作用下求应力的渐近解。按图 8-11，原问题可以分解成两个问题的叠加：问题Ⅰ：无裂纹时的分析，这一分析将在实际的裂纹面上产生面力 σ_{22}^c；问题Ⅱ：在裂纹面上施加 $-\sigma_{22}^c$ 时的渐近分析。

根据式(8-150)表示的饱和区的电位移，由式(8-148)得出的应变为

$$
\varepsilon_r^s=-QqD_c^2(1+\nu),\quad \varepsilon_\theta^s=QD_c^2(1-q\nu),\quad \varepsilon_{r\theta}^s=0
\tag{8-151}
$$

显然，上述应变满足协调方程，不产生应力。与之对应的无刚体位移的位移为

$$
\begin{aligned}
&u_r^{s0}=-QqD_c^2(1+\nu)r,\quad u_\theta^{s0}=QD_c^2(1+q)r\theta\\
&u_1^{s0}+\mathrm{i}u_2^{s0}=QD_c^2[-(1+\nu)q+\mathrm{i}(1+q)\theta]z
\end{aligned}
\tag{8-152}
$$

8.5.2 渐近分析

对于陶瓷一类材料，应力是有限的，但应变很小，由应变引起的位移也很小，所以引起的介质内的电力也很小，可以略去，即 Maxwell 应力的影响可以略去，因而 Cauchy 应力和伪总应力近似相同。类似于式(8-9)、(8-19)、(8-20)和(8-22)，并注意到现在的自变量是 $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{D}$，而不是 $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{E}$。在 $\varsigma=z-\rho$ 的平面上，易于导出线性区的复变函数公式为

$$
\begin{aligned}
&D=D_1+\mathrm{i}D_2=-\overline{w'(\varsigma)}\\
&2G(u_1+\mathrm{i}u_2)=K\phi(\varsigma)-\varsigma\overline{\phi'(\varsigma)}-\overline{\psi(\varsigma)}+hw(\varsigma)\overline{w'(\varsigma)}+4(1-\nu)m^{-1}h\overline{\Omega(\varsigma)}\\
&\sigma_{22}+\sigma_{11}=2[\phi'(\varsigma)+\overline{\phi'(\varsigma)}]-2hw'(\varsigma)\overline{w'(\varsigma)}\\
&\sigma_{22}-\sigma_{11}+2i\sigma_{12}=2[\bar{z}\phi''(\varsigma)+\psi'(\varsigma)]-2hw''(\varsigma)\overline{w(\varsigma)}\\
&\mathrm{i}(P_1+\mathrm{i}P_2)=[z\overline{\phi'(\varsigma)}+\phi(\varsigma)+\overline{\psi(\varsigma)}-hw(\varsigma)\overline{w'(\varsigma)}]_A^B
\end{aligned}
\tag{8-153}
$$

式中

$$K=3-4\nu,\ h=\frac{1-(1+2\nu)q}{2}\frac{GQ}{1-\nu},\ m=2\frac{1-(1+2\nu)q}{1+q}$$
$$\Omega(\varsigma)=\int[w'(\varsigma)]^2\mathrm{d}\varsigma,\ w'(\varsigma)=-D_1+\mathrm{i}D_2=\frac{\mathrm{i}K_D}{\sqrt{2\pi\varsigma}} \tag{8-154}$$

而饱和区的复变函数公式为

$$\begin{aligned}
&2G(u_1+\mathrm{i}u_2)=K\phi(\varsigma)-z\overline{\phi'(\varsigma)}-\overline{\psi(\varsigma)}+2G(u_1^s+\mathrm{i}u_2^s)\\
&\sigma_{22}+\sigma_{11}=2[\phi'(\varsigma)+\overline{\phi'(\varsigma)}]\\
&\sigma_{22}-\sigma_{11}+2\mathrm{i}\sigma_{12}=2[\bar{\varsigma}\phi''(\varsigma)+\psi'(\varsigma)]\\
&\mathrm{i}(P_1+\mathrm{i}P_2)=[z\overline{\phi'(\varsigma)}+\phi(\varsigma)+\overline{\psi(\varsigma)}]_A^B
\end{aligned} \tag{8-155}$$

式(8-153)和(8-155)代表的两组解，在饱和区和线性区的界面上要满足位移和面力连续的条件，线性区的解还要满足无穷远处的边界条件。

1) **问题Ⅰ的解**

首先设解取以下形式：

$$\begin{aligned}
&\text{线性区：}\quad \phi_1(\varsigma)=-\sigma_0\rho\ln(\varsigma/\rho)+\phi_2(\varsigma),\quad \psi_1(\varsigma)=-\sigma_0\rho\ln(\varsigma/\rho)+\psi_2(\varsigma)\\
&\text{饱和区：}\quad \phi_s(\varsigma)=\phi_1(\varsigma),\quad \psi_s(\varsigma)=\psi_1(\varsigma),\quad \sigma_0=[(1+q)/8(1-\nu^2)]YQD_c^2
\end{aligned} \tag{8-156}$$

把以上两式代入式(8-153)和(8-155)，便得由线性区和饱和区趋近界面时的下列公式

$$\begin{aligned}
&\text{线性区一侧：}\quad 2G(u_1+\mathrm{i}u_2)+\mathrm{i}(P_1+\mathrm{i}P_2)=\\
&\qquad 4(1-\nu)\{[-\sigma_0\rho\ln(\varsigma/\rho)+\phi_2(\varsigma)]+m^{-1}h\overline{\Omega(\varsigma)}\}\\
&\text{饱和区一侧：}\quad 2G(u_1+\mathrm{i}u_2)+\mathrm{i}(P_1+\mathrm{i}P_2)=4(1-\nu)\phi_1(\varsigma)+2G(u_1^s+\mathrm{i}u_2^s)
\end{aligned} \tag{8-157}$$

在界面上位移和面力连续的条件要求

$$\phi_2(\varsigma_0)-\phi_1(\varsigma_0)=\sigma_0\rho[\ln(\varsigma_0/\rho)+m/2-1](1+\varsigma_0/\rho) \tag{8-158}$$

式中$\varsigma_0=\rho e^{\mathrm{i}\theta}$是$\varsigma$在饱和区边界上的值。计及无穷远处位移为零，借助解析延拓理论，由上式得

$$\phi_2(\varsigma)=\sigma_0\rho\left[\left(1+\frac{\varsigma}{\rho}\right)\ln\frac{\varsigma}{\varsigma+\rho}+1\right],\quad \phi_1(\varsigma)=\sigma_0\rho\left[-\left(1+\frac{\varsigma}{\rho}\right)\left(\ln\frac{\varsigma+\rho}{\rho}+\frac{1}{2}m-1\right)+1\right] \tag{8-159}$$

类似地，在界面上面力 $\mathrm{i}(P_1+\mathrm{i}P_2)$连续的条件要求

$$\psi_2(\varsigma_0)-\psi_1(\varsigma_0)=-\sigma_0\rho\left[-(1+m)\frac{\rho}{\varsigma_0}+\frac{1}{2}m-1-\ln\frac{\varsigma_0}{\rho}\right] \tag{8-160}$$

计及无穷远处位移和合力为零，借助解析延拓理论，由上式得

$$\begin{aligned}
&\psi_2(\varsigma)=\sigma_0\rho\left[(1+m)\frac{\rho}{\varsigma}+\ln\frac{\varsigma}{\varsigma+\rho}-m+4(1-\nu)\right]\\
&\psi_1(\varsigma)=\sigma_0\rho\left(-\ln\frac{\varsigma+\rho}{\rho}-\frac{1}{2}m+3-4\nu\right)
\end{aligned} \tag{8-161}$$

从而有

线性区：
$$\phi_1(\varsigma)=\sigma_0\rho\left[-\ln\frac{\varsigma}{\rho}+\left(1+\frac{\varsigma}{\rho}\right)\ln\frac{\varsigma}{\varsigma+\rho}+1\right]$$
$$\psi_1(\varsigma)=\sigma_0\rho\left[(1+m)\frac{\rho}{\varsigma}-\ln\frac{\varsigma}{\rho}+\ln\frac{\varsigma}{\varsigma+\rho}-m+4(1-\nu)\right] \tag{8-162}$$

饱和区：
$$\varphi_s(\varsigma)=\sigma_0\rho\left[-\left(1+\frac{\varsigma}{\rho}\right)\left(\ln\frac{\varsigma+\rho}{\rho}+\frac{1}{2}m-1\right)+1\right]$$
$$\psi_s(\varsigma)=\sigma_0\rho\left(-\ln\frac{\varsigma+\rho}{\rho}-\frac{1}{2}m+3-4\nu\right) \tag{8-163}$$

2）问题Ⅱ的解

首先由式(8-153)和(8-162)，求得
$$\sigma_{22}^c=\sigma_0\left[2\ln\frac{x_1-\rho}{x_1}-(1+m)\left(\frac{\rho}{x_1-\rho}\right)^2\right],\quad \sigma_{21}^c=0 \tag{8-164}$$
然后，在原裂纹面上施加$-\sigma_{22}^c$，再求这一纯弹性问题的解，其解为
$$\phi'(z)=\sigma_0\left[-\ln\frac{z-\rho}{z}+\frac{1}{2}(1+m)\left(\frac{\rho}{z-\rho}\right)^2-\frac{1}{4}(1+m)\rho^{3/2}\frac{z+\rho}{\sqrt{z}(z-\rho)^2}-2\operatorname{arcoth}\sqrt{\frac{z}{\rho}}+2\sqrt{\frac{\rho}{z}}\right] \tag{8-165}$$

3）原问题的解

最终求得原问题的应力场为

线性区：
$$\frac{\sigma_{22}+\sigma_{11}}{2}=\sigma_0\mathrm{Re}\left[(1+m)\left(\frac{\rho}{z-\rho}\right)^2-\frac{1}{2}(1+m)\sqrt{\frac{\rho}{z}}\frac{\rho(z+\rho)}{(z-\rho)^2}-4\operatorname{arcoth}\sqrt{\frac{z}{\rho}}+4\sqrt{\frac{\rho}{z}}\right]-\sigma_0 m\frac{\rho}{|z-\rho|}$$
$$\frac{\sigma_{22}-\sigma_{11}}{2}+2\mathrm{i}\sigma_{12}=\sigma_0\left\{\frac{\bar{z}-\rho}{z-\rho}-\frac{\bar{z}}{z}-(1+m)\left(\frac{\rho}{z-\rho}\right)^2+m\frac{\rho}{z-\rho}\sqrt{\frac{\bar{z}-\rho}{z-\rho}}+(\bar{z}-z)\cdot\left[\left(\sqrt{\frac{\rho}{z}}-1\right)\frac{\rho}{z(z-\rho)}-(1+m)\frac{\rho^2}{(z-\rho)^3}+\frac{1+m}{8}\sqrt{\frac{\rho}{z}}\frac{\rho}{z(z-\rho)^3}(\rho^2-6\rho z-3z^2)\right]\right\} \tag{8-166}$$

饱和区：
$$\frac{\sigma_{22}+\sigma_{11}}{2}=\sigma_0\mathrm{Re}\left[-2\ln\frac{z}{\rho}-2\ln\frac{z-\rho}{z}+(1+m)\left(\frac{\rho}{z-\rho}\right)^2-\frac{1}{2}(1+m)\sqrt{\frac{\rho}{z}}\frac{\rho(z+\rho)}{(z-\rho)^2}-4\operatorname{arcoth}\sqrt{\frac{z}{\rho}}+4\sqrt{\frac{\rho}{z}}\right]-\sigma_0 m$$
$$\frac{\sigma_{22}-\sigma_{11}}{2}+2\mathrm{i}\sigma_{12}=\sigma_0\left\{-\frac{\bar{z}}{z}+(\bar{z}-z)\left[\left(\sqrt{\frac{\rho}{z}}-1\right)\frac{\rho}{z(z-\rho)}-(1+m)\frac{\rho^2}{(z-\rho)^3}+\frac{1+m}{8}\sqrt{\frac{\rho}{z}}\frac{\rho}{z(z-\rho)^3}(\rho^2-6\rho z-3z^2)\right]\right\} \tag{8-167}$$

显然，裂纹端部具有 $1/\sqrt{r}$ 的奇异性，同时也和 $\rho/(z-\rho)$ 相关。更详细的讨论见文献[115]。

对于传导裂纹问题，可类似处理。Hao、Gong 和 Suo[116]，Yang 和 Suo[117]等都研究过。

8.6 关于电致伸缩材料理论的某些注记

8.6.1 关于本章的说明

电致伸缩材料的理论属于非线性电弹性理论的范畴，目前有关变形电介质中的非线性电弹性理论存在一些不同意见，尚需进一步研究。本章讨论过的理论，主要是本书作者和他的合作者的认识，是一家之见。因此有必要在这里对其他的理论和看法做一些简要的叙述，以供读者研究。

8.6.2 Stratton，Landau 和 Lifshitz 的理论和一些学者的意见

Stratton[20] (1941)，Landau 和 Lifshitz[16] (1959)先后从能量的角度研究了变形电介质中的静电力。他们的基本理论如下。讨论图 8-12 所示的无限平板电容器，充以各向同性电介质，上电极接地，能自由移动，固定的下电极接电源，在介质内产生均匀电场 $\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{E}$ 沿表面法线 $\boldsymbol{n}$ 的方向，本处 $\boldsymbol{n}$ 沿 x_3 轴正向。对于一般的曲面，我们可取出一微小表面，再把它看成为平面，然后照上面方法处理。在保持温度和电势不变的条件下，现给上电极一虚位移 ξ，则介质内任一点的虚位移 $\boldsymbol{u}$ 和介质厚度的变化 δh 为

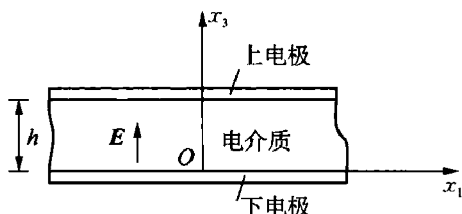


图 8-12

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\xi} x_3/h, \quad \varepsilon_{ik} = (\xi_i n_k + \xi_k n_i)/2h, \quad \delta h = \boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{n} \tag{8-168}$$

式中 x_3 从下表面算起，和法线方向 $\boldsymbol{n}$ 一致，故有 $n_1 = n_2 = 0$，$n_3 = 1$。

由于虚位移后在 $\boldsymbol{x}$ 的质点虚位移前在 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}$ 处，所以空间点的电势因虚位移引起的变化为

$$\delta\varphi = \varphi(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{u}) - \varphi(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{u}\nabla\varphi = \boldsymbol{u}\boldsymbol{E}, \quad \delta\boldsymbol{E} = -\nabla(\delta\varphi) = -\frac{1}{h}\boldsymbol{n}(\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{\xi}) \tag{8-169}$$

介质中的电 Gibbs 自由能 g^e 为

$$g^e(\varepsilon_{kl}, E_k) = g_0(\varepsilon_{kl}) - D_i E_k/2, \; D_i = \tilde{\epsilon}_{ik} E_k, \; \tilde{\epsilon}_{ik} = \epsilon_0 \delta_{ik} + a_1 \varepsilon_{ik} + a_2 \varepsilon_{mm} \delta_{ik} \tag{8-170}$$

式中 $g_0(\varepsilon_{kl})$ 为不存在电场时电介质中的电 Gibbs 自由能，ϵ_0 为变形前(各向同性)电介质的介电系数，a_1，a_2 为电致伸缩系数，δ_{ik} 为 kronecker δ。

作用在上表面上的应力对环境作功为 $-\sigma_{ik}\xi_i n_k$，其中 σ_{ik} 为介质中的应力，按虚功原理，它应由介质的电 Gibbs 自由能 g^e 的减少来提供，所以有

$$\sigma_{ik} n_k \xi_i = h\delta g^e + g^e \delta h = h\left(\frac{\partial g^e}{\partial \varepsilon_{ik}}\delta\varepsilon_{ik} + \frac{\partial g^e}{\partial E_k}\delta E_k\right) + g^e \delta h =$$

$$h\left\{\left[\frac{\partial g_0}{\partial \epsilon_{ik}}-(a_1+a_2\delta_{ik})\frac{E_iE_k}{2}\right]\frac{\xi_i n_k}{h}+D_k\frac{1}{h}n_k\xi_iE_i\right\}+\left(g_0-\frac{1}{2}D_kE_k\right)(\xi_i n_i) \tag{8-171}$$

在上式中略去高阶小量 g_0 后，便可推出

$$\sigma_{ik}=\left[\frac{\partial g_0}{\partial \epsilon_{ik}}-\frac{1}{2}(a_1+a_2\epsilon_{mm}\delta_{ik})E_iE_k\right]+D_kE_i-\frac{1}{2}D_mE_m\delta_{ik}=$$

$$\frac{\partial g_0}{\partial \epsilon_{ik}}-\frac{1}{2}(a_1+a_2\epsilon_{mm}\delta_{ik})E_iE_k+\epsilon_0E_kE_i-\frac{1}{2}\epsilon_0E_mE_m\delta_{ik}=\frac{\partial g_0}{\partial \epsilon_{ik}}+\sigma_{ik}^{\mathrm{L}} \tag{8-172}$$

$$\sigma_{ik}^{\mathrm{L}}=\frac{1}{2}(2\epsilon_0-a_1)E_kE_i-\frac{1}{2}(\epsilon_0+a_2)E_mE_m\delta_{ik}$$

式中$\partial g_0/\partial \epsilon_{ik}$为不存在电场时电介质中的应力。Stratton[20]，Shkel 和 Klingenberg[118]认为上述公式中的 σ_{ik}^{L} 就是 Maxwell 应力，$\sigma_{ik,k}^{\mathrm{L}}$就是静电体积力。Shkel and Klingenberg[118]利用这一理论进行了实验研究，并认为“The ultimate deformation depends on the elastic properties of the fixtures attached to the material (e.g. the electrodes). The (electrostrictive) coefficients γ_{ijkl} are therefore not strictly material parameters, but rather characteristics of the entire system.”。Guillot，Jarzynski 和 Balizer[119] 认为“Maxwell stress is an external effect, independent of intrinsic electromechanical properties of the material”，并认为实验中测得的应力是由本构方程得到的电致伸缩应力与 Maxwell 应力之和，“strictly speaking, the Maxwell stress tensor does not belong to the electrostrictive equations, but that it should be taken into account in the measurements. ... it is possible to factor out its contribution to the total response of the film and therefore to identify the isolated contribution due to the (electro strictive) tensor only.”；他们还认为以往实验测得的电致伸缩系数存在缺陷。在 Landau 和 Lifshitz 的书[16]中，他们只是认为他们的公式给出了因电场的存在而产生的效应。事实上，由公式的推导过程很容易看出，他们的公式中因电场而产生的效应是由两部分组成的，即因虚位移引起的电场的变化所引起的 Maxwell 应力 $\sigma_{ki}^{\mathrm{M}}=D_kE_i-\frac{1}{2}D_mE_m\delta_{ik}$，以及因本构方程而产生的应力 $-(1/2)(a_1+a_2\delta_{ik})E_iE_k$。本书作者指出，因本构方程产生的应力是 Cauchy 应力，是介质中的真实应力，是引起材料破坏的应力；而因虚位移引起的电场的变化所引起的应力是电场施加给电介质的外力，通常称为 Maxwell 应力。

8.6.3 用 Maxwell 电磁场方程研究电磁力

(1) Pao[19]指出，从 Maxwell 电磁场方程出发，得到式(2-76)表示的 Maxwell 应力，但不是唯一的，还可以得到多种表达式。

(2) 从狭义相对论出发，Minkowski 从能量动量张量的理论出发，导出了 Maxwell 应力，和本书的公式相同，但它是针对刚体的。

(3) Moon[120]在他的《磁固体力学》中以及 Zhang，Su 和 Kim[121]均把上述 Maxwell 应力 σ_{ik}^{M}或类似的表达式，直接应用到变形电介质中。

8.6.4 用微观力学计算静电力

动量方程取用式(3-9)，即 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\sigma}+(\boldsymbol{f}^{\mathrm{m}}+\boldsymbol{f}^{\mathrm{e}})=\rho\dot{\boldsymbol{v}}$，其中的电力 $\boldsymbol{f}^{\mathrm{e}}$和磁力 $\boldsymbol{f}^{\mathrm{m}}$由电磁场的

微观理论去求，即假设介质由带电荷和磁荷或微电流环的微观粒子组成，这些带电粒子的相互作用，产生电磁力和电磁力偶。如 2.6.4 节式(2-150)Lorentz 公式给出

$$\boldsymbol{\sigma}^{e}=(\boldsymbol{D}\otimes\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\otimes\boldsymbol{H})+\boldsymbol{v}\otimes\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{B}-\frac{1}{2}(\epsilon_0 E^2+\mu_0^{-1}B^2-2\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{I} \quad (8-173)$$

Eringen[17]，Maugin[18]等人给出 $\boldsymbol{f}^{e}=\rho_e\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}+(\nabla\otimes\boldsymbol{E})\boldsymbol{P}+\mathrm{d}(\boldsymbol{P}\times\boldsymbol{B})/\mathrm{d}t$。在这一类理论中，带电粒子间的相互作用遵守 Lorentz 公式

$$\rho\boldsymbol{f}=\rho_t\boldsymbol{E}+\boldsymbol{J}_t\boldsymbol{B},\ \rho_t=\rho_e-\nabla\cdot\boldsymbol{P},\ \boldsymbol{J}_t=\boldsymbol{J}+\partial\boldsymbol{P}/\partial t+\nabla\times\boldsymbol{M}+\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{P}) \quad (8-174)$$

不同的极化和磁化理论，得到不同的公式。Pao[19]在他的论文中进行了详细的讨论。

8.6.5 Knops，Smith 和 Warren 的理论

Knops[122]首先研究了电致伸缩的二维问题，提出了一般解法，提出了电场影响应力场，应力场对电场的影响可以略去的看法。随后，Smith 和 Warren[109]讨论无限板中含有一个椭圆孔和刚性椭圆夹杂，在无穷远处承受广义外载荷的问题，他们在椭圆孔上的应力边界条件中取用 $\sigma_{ij}n_j=0$，刚性椭圆夹杂上的边界条件是容许夹杂有转动。McMeeking 对他们的结果进行了较为详细的讨论。他们取用的平衡方程和本构方程为

$$\begin{aligned}&\sigma_{ij,j}=0\\&\sigma_{ij}=\lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}+2G\varepsilon_{ij}+(2\epsilon-a_1)E_iE_j-(\epsilon+a_2)E_kE_k\delta_{ij}\\&D_i=(\epsilon\delta_{ij}+a_1\varepsilon_{ij}+a_2\varepsilon_{kk}\delta_{ij})E_j\end{aligned} \quad (8-175)$$

在他们的研究中没有考虑 Maxwell 应力和周围环境的影响，本构方程的来源和边界条件也和本章不同。

8.6.6 McCmeeking 等人的理论

McMeeking，Landis[123]，McMeeking，Landis 和 Jimenez[124]对可变形的非线性电介质，在现时构形中提出了下述理论。他们设控制方程为

$$\begin{aligned}&\sigma_{ji,j}^{(t)}+\rho f_i=\rho\ddot{u}_i,\quad D_{i,i}=\rho_e\,(\text{在体积内})\\&n_i[\![D_i]\!]=\omega,\quad T_k=-n_j[\![\sigma_{ji}^{(t)}]\!]\,(\text{在界面上})\\&\sigma_{ji}^{(t)}=\sigma_{ji}+\sigma_{ji}^{M},\quad[\![\phi]\!]=\phi^{+}-\phi^{-},\quad\sigma_{ji}^{(t)}=\sigma_{ij}^{(t)},\quad\sigma_{ji}\neq\sigma_{ij}\end{aligned} \quad (8-176)$$

他们称式中 $\boldsymbol{\sigma}^{(t)}$ 为总应力。$\boldsymbol{\sigma}^{(t)}$ 是对称的，而 $\boldsymbol{\sigma}$ 可以是不对称的。对守恒材料，他们取热力学第一定律和熵方程的形式为

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t},\quad\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V(\rho s\,\mathrm{d}V)=\int_V\frac{\rho\dot{r}}{T}\mathrm{d}V-\int_a\frac{q_in_i}{T}\mathrm{d}a\\&\mathrm{d}\varphi/\mathrm{d}t=\partial\varphi/\partial t+v_k^{*}\varphi_{,k}\end{aligned} \quad (8-177)$$

式中

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \rho u\,\mathrm{d}V+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \frac{1}{2}\epsilon_0 E_i E_i\,\mathrm{d}V+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \frac{1}{2}\rho\,\dot{u}_i\,\dot{u}_i\,\mathrm{d}V$$

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\int_V f_i\,\dot{u}_i\,\mathrm{d}V+\int_a T_i\,\dot{u}_i\,\mathrm{d}a+\int_V \varphi\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\rho_e\mathrm{d}V)+\int_a \varphi\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega\mathrm{d}a) \tag{8-178}$$

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}=\int_V \rho\dot{r}\,\mathrm{d}V-\int_a q_i n_i\,\mathrm{d}a$$

计及体积变形，外力功的表达式又可写成

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \frac{1}{2}\epsilon_0 E_i E_i\,\mathrm{d}V+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V \frac{1}{2}\rho\,\dot{u}_i\,\dot{u}_i\,\mathrm{d}V+ \int_V [E_i\mathrm{d}P_i/\mathrm{d}t+(\sigma_{ji}+\sigma_{ji}^{\mathrm{M}}-\hat{\sigma}_{ji}^{\mathrm{M}}-E_iP_j+E_kP_k\delta_{ij})]\mathrm{d}V \tag{8-179}$$

引入自由能 $\psi=u-Ts$，由式(8-176)～(8-179)，可得

$$\begin{aligned}&\sigma_{ji}^{(\mathrm{t})}-\hat{\sigma}_{ji}^{\mathrm{M}}-E_iP_j+E_kP_k\delta_{ij}=\rho\,\partial\psi/\partial F_{ik}F_{jk}\\&E_i=\rho\,\partial\psi/\partial P_i,\qquad s=-\partial\psi/\partial\theta\end{aligned} \tag{8-180}$$

式中 $\hat{\sigma}_{ji}^{\mathrm{M}}=\epsilon_0(E_iE_j-E_kE_k\delta_{ij}/2)$ 是自由空间的 Maxwell 应力，F_{ik} 为变形梯度。

McMeeking 等人认为“Since there are no experiments that can separate the effects of the Cauchy and Maxwell stresses unambiguously, it is generally more profitable to consider their sum and not to try identify them separately. ”和“we obviate the need to develop a constitutive theory that is consistent with a pre-determined formulation of the Maxwell stress, as can often be found in the literature on electrostrictive materials. Instead, the constitutive model can be simplified to one that embraces simultaneously the Cauchy, Maxwell, electro — strictive and electrostatic stresses, which in any case cannot be separately identified from any experiment. ”。

8.6.7 其他理论观点

Maugin[125]认为“... in order to avoid a fully arbitrary choice in the electromagnetic contributions to these equations, basically the so-called ponderomotive force and couple, and the corresponding rate of energy, we intend to arrive at sensible expressions for these contributions on the basis of a microscopic model ... the electron theory of Lorentz ... ”.

Kankanala 和 Triantafyllidis[126]罗列了三种不同的 Maxwell 应力，它们为

$$\boldsymbol{H}\otimes\boldsymbol{B}-\mu_0(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{M}+\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}/2)\boldsymbol{I},\quad \boldsymbol{H}\otimes\boldsymbol{B}-\mu_0(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}/2)\boldsymbol{I},\quad \boldsymbol{H}\otimes\boldsymbol{B}-\mu_0(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{H}-\boldsymbol{M}\cdot\boldsymbol{M})\boldsymbol{I}/2$$

Bustamante, Dorfmann 和 Ogden[127] 提出“... the form of the Maxwell stress is dependent on which magnetic variable is taken to be independent and on the associated stress tensor. ” “Perhaps the simplest structure is provided by the so called “total stress tensor”, here denoted $\boldsymbol{\tau}$, which is symmetric and is the analogue of the Cauchy stress tensor arising in elasticity theory. In terms of $\boldsymbol{\tau}$ the equilibrium equation has the form $div\ \boldsymbol{\tau}+\boldsymbol{f}=\mathbf{0}$. We emphasize that $\boldsymbol{\tau}$ incorporates terms that may be considered as magnetic body forces rather than stresses. We mention here that while from the mathematical point of view there is no

essential difference in treating the magnetic contribution as a body force vector or as a stress tensor there are differences in the resulting physical interpretations."

实际工程中应用的电致伸缩材料,特别是一些铁电材料,其本构方程非线性很强,并不能用本章给出的本构方程很好地描写,因而电致伸缩材料的电弹性分析还有待进一步深入。

8.6.8 实验研究

运用合适的理论设计实验方案,进行实验研究,再考察各种理论,是非常重要的。

第9章

压电介质中的弹性波

9.1 无限压电介质中的弹性波

9.1.1 传播方程与波的一般性质

各向同性、各向异性弹性体和压电体的弹性波已有很多书籍讨论过，如文献[128～132]。本书不进行详细研究，只对压电体进行必要的讨论。压电介质在弹性和电学性质方面都是线性的，无需考虑 Maxwell 应力或电磁体积力。本章讨论等温情形。动量方程由式(3-9)表示，即

$$\sigma_{ij,j}+f_i=\rho\ddot{u}_i,\quad D_{i,i}=0 \tag{9-1}$$

本构方程取用应变和电场为独立变量，由式(3-31)表示，对等温情形有

$$\sigma_{ij}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl}-e_{kij}E_k,\quad D_i=\epsilon_{ij}E_j+e_{ikl}\varepsilon_{kl} \tag{9-2}$$

计及 $E_i=-\varphi_{,i}$，由式(9-1)和(9-2)，可推出用广义位移表示的运动方程

$$C_{ijkl}u_{l,kj}+e_{kij}\varphi_{,kj}=\rho\ddot{u}_i,\quad e_{ikl}u_{l,ki}-\epsilon_{ij}\varphi_{,ji}=0 \tag{9-3}$$

由上式可看出，现在考虑的是电磁准静态问题，不考虑电磁波的传播，只考虑独立的弹性波，电位移随同弹性波传播。弹性波的传播方程可由上两式消去电势得到。

本书限于讨论较简单的平面波，平面波可表为

$$U_i=U_{0i}F(k_mx_m-\omega t),\quad \boldsymbol{U}_0=[u_{01},u_{02},u_{03},u_{04}]^{\mathrm{T}},\ u_{04}=\varphi_0 \tag{9-4}$$

式中 $\boldsymbol{k}$ 为波矢量，$\boldsymbol{U}_0$ 为质点的广义位移方向或(偏振)极化强度，$F(y)$ 为 y 的任意函数。由上式可得

$$\ddot{u}_i=u_{0i}\omega^2F'',\quad u_{l,jk}=u_{0l}k_jk_kF'',\quad \varphi_{,jk}=\varphi_0k_jk_kF'',\quad E_j=-\varphi_0k_jF' \tag{9-5}$$

式中 $F'(y)=\partial F/\partial y$。把上式代入式(9-3)，便得

$$\begin{gathered}\rho\omega^2u_{0i}=\hat{\Gamma}_{il}u_{0l}+\hat{e}_i^*\varphi_0,\quad \hat{e}_i^*u_{0i}-\hat{\epsilon}^*\varphi_0=0\\ \hat{\Gamma}_{il}=C_{ijkl}k_jk_k,\ \hat{e}_i^*=e_{kij}k_jk_k,\ \hat{\epsilon}^*=\epsilon_{jk}k_jk_k\end{gathered} \tag{9-6a}$$

或写成

$$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{k},\omega)\boldsymbol{U}_0=\boldsymbol{0} \tag{9-6b}$$

上式有解的条件是 $\boldsymbol{U}_0$ 前的系数组成的行列式为零，即

$$
|\boldsymbol{\Lambda}| = \begin{vmatrix} \hat{\Gamma}_{11}-\rho\omega^2 & \hat{\Gamma}_{12} & \hat{\Gamma}_{13} & \hat{e}_1^* \\ \hat{\Gamma}_{21} & \hat{\Gamma}_{22}-\rho\omega^2 & \hat{\Gamma}_{23} & \hat{e}_2^* \\ \hat{\Gamma}_{31} & \hat{\Gamma}_{32} & \hat{\Gamma}_{33}-\rho\omega^2 & \hat{e}_3^* \\ \hat{e}_1^* & \hat{e}_2^* & \hat{e}_3^* & -\hat{\epsilon}^* \end{vmatrix} = 0 \tag{9-7}
$$

上式是关于二阶张量$\hat{\Gamma}_{il}$的本征方程，$\rho\omega^2$ 是其本征值，由式(9－7)确定，u_{0i}是其本征矢量，由式(9－6)确定。对于压电介质，由于介质内没有能量耗散，所以波矢量 $\boldsymbol{k}=k\boldsymbol{n}$，其中 $\boldsymbol{n}$ 为波的传播方向，从而式(9－6)、(9－7)又可写成

$$
\rho c^2 u_{0i} = \Gamma_{il} u_{0l} + e_i^* \varphi_0, \quad e_i^* u_{0i} - \epsilon^* \varphi_0 = 0
$$

$$
\Gamma_{il} = C_{ijkl} n_j n_k, \quad e_i^* = e_{kij} n_j n_k, \quad \epsilon^* = \epsilon_{jk} n_j n_k, \quad c = \omega / k
$$

$$
|\boldsymbol{\Lambda}| = \begin{vmatrix} \Gamma_{11}-\rho c^2 & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} & e_1^* \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22}-\rho c^2 & \Gamma_{23} & e_2^* \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33}-\rho c^2 & e_3^* \\ e_1^* & e_2^* & e_3^* & -\epsilon^* \end{vmatrix} = 0 \tag{9-8}
$$

称 Γ_{il} 为 Christoffel 张量，式中 c 为波的相速度。从式(9－8)中消去 φ_0，便得

$$
\rho c^2 u_{0i} = \overline{\Gamma}_{il} u_{0l}, \ \overline{\Gamma}_{il} = \Gamma_{il} + e_i^* e_l^* / \epsilon^*
$$

$$
|\overline{\Gamma}_{il} - \rho c^2 \delta_{il}| = 0 \tag{9-9}
$$

由 C_{ijkl} 的对称性可以推出 Γ_{il} 的对称性，进而推出$\overline{\Gamma}_{il}$是二阶对称张量。由第 1 章 1－4 节的本征值理论知，ρc^2 有三个值 ρc_1^2，ρc_2^2，ρc_3^2，且都是是实数，对应于每一个本征值 ρc_i^2，存在对应的本征矢量 $\boldsymbol{u}_0^{(i)}$，对于每个 $\boldsymbol{u}_0^{(i)}$，只有一个分量是任意的，其余的分量都可以由它表示。对应于不同的本征值的本征矢量相互正交，且归一化后有 $\boldsymbol{u}_0^{(i)}\boldsymbol{u}_0^{(j)}=\boldsymbol{I}$。下面证明本征值是正实数，这是相速度的物理性质所要求的。事实上由式(9－9)可推出

$$
\rho c^2 = \frac{\overline{\Gamma}_{il} u_{0i} u_{0l}}{u_{0i} u_{0i}} = \frac{\overline{C}_{ijkl} n_j n_k u_{0i} u_{0l}}{u_{0i} u_{0i}}, \ \overline{C}_{ijkl} = C_{ijkl} + \frac{(e_{pij} n_p)(e_{qkl} n)}{\epsilon_{jk} n_j n_k} \tag{9-10}
$$

由上式知，ρc^2 的符号决定于分子的符号。$\overline{C}_{ijkl}$和 C_{ijkl}有相同的对称性，由此可得

$$
\overline{C}_{ijkl} n_j n_k u_{0i} u_{0l} = \overline{C}_{ijkl}[(u_{0i} n_j + u_{0j} n_i)(u_{0i} n_j - u_{0j} n_i)][(u_{0l} n_k + u_{0k} n_l)(u_{0l} n_k - u_{0k} n_l)]/4 =
$$

$$
\overline{C}_{ijkl}(u_{0i} n_j + u_{0j} n_i)(u_{0l} n_k + u_{0k} n_l)/4 \geqslant 0
$$

由于 ρc^2 是正实数，所以一般的压电介质中存在三个相互正交的平面波。但是一般讲来，位移矢量 $\boldsymbol{u}_0^{(i)}$ 不沿着或垂直于波的传播方向 $\boldsymbol{n}$。最接近 $\boldsymbol{n}$ 方向的波 $\boldsymbol{u}_0^{(l)}$ 称为拟纵向波，具有最大的传播速度，另外的两个波 $\boldsymbol{u}_0^{(s_1)}$，$\boldsymbol{u}_0^{(s_2)}$ 具有较小的传播速度，且在接近于垂直 $\boldsymbol{n}$ 的平面内(图 9－1)。不过，对于晶体中的一些特殊对称平面，位移矢量 $\boldsymbol{u}_0^{(i)}$ 可以沿着或垂直于波的传播方向 $\boldsymbol{n}$。

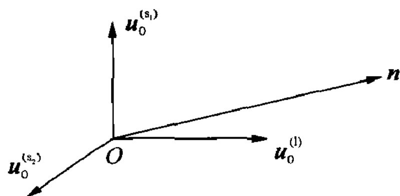


图 9－1　晶体中的拟纵波和两个拟横波

如果我们从式(9－7)出发，则确定本征值 ω^2 的长期方程表面上是 4 阶的，但有一个值为零或相速度为无穷大，故 ω^2 实际上只有三个根。

9.1.2 能量传播

弹性波传播时伴随着能量传播，能量传播速度和相速度不同，在本节中研究没有体积力（$f_i=0$）和体电荷（即有 $D_{i,i}=0$），也不考虑温度影响的平面弹性波。按式(3-12)和(3-13)，此时能量方程可以写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V\left(u+\frac{1}{2}\rho\dot{u}_i\dot{u}_i\right)\mathrm{d}V=\int_a(T_i\dot{u}_i+\varphi\sigma)\mathrm{d}a=\int_a(\sigma_{ij}\dot{u}_i-\varphi\dot{D}_j)n_j\mathrm{d}a$$
$$u=\frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}+\frac{1}{2}\beta_{ij}D_iD_j,\quad K=\frac{1}{2}\rho\dot{u}_i\dot{u}_i \tag{9-11a}$$

式中的 K 代表介质的动能密度。上式还可写成

$$\mathrm{d}u_t/\mathrm{d}t+\int_a P_jn_j\mathrm{d}a=0,\ u_t=\int_V(u+K)\mathrm{d}V,\ P_j=-\sigma_{ij}\dot{u}_i+\varphi\dot{D}_j \tag{9-11b}$$

上式中的 u_t 代表介质的总能量，$\mathrm{d}u_t/\mathrm{d}t$ 为介质内总能量的变化，$\int_a P_jn_j\mathrm{d}a$ 代表通过边界输入的能量，P_j 为 Poynting(玻印廷)矢量，它的方向代表能量的传输方向，它的大小代表单位时间单位表面积传输的能量。如果采用电 Gibbs 自由能，则式(9-11)应写成

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V g_t\mathrm{d}V+\int_a P_jn_j\mathrm{d}a=0,\ P_j=-\sigma_{ij}\dot{u}_i-D_j\dot{\varphi}$$
$$g=\frac{1}{2}C_{ijkl}\epsilon_{ij}\epsilon_{kl}+\frac{1}{2}\epsilon_{ij}E_iE_j,\quad K=\frac{1}{2}\rho\dot{u}_i\dot{u}_i,\quad g_t=g+K \tag{9-12}$$

式中 g_t 为总电 Gibbs 自由能密度。定义能量传播速度 $\boldsymbol{V}^{(e)}$ 为

$$\boldsymbol{V}^{(e)}=\boldsymbol{P}/g_t \tag{9-13}$$

由上式知，$\boldsymbol{V}^{(e)}$ 和 $\boldsymbol{P}$ 平行。利用式(9-5)、(9-8)和(9-12)，可得

$$K=\frac{1}{2}\rho\dot{u}_i\dot{u}_i=\frac{1}{2}\rho u_{0i}^2F'^2,\quad g=\frac{1}{2}(C_{ijkl}u_{0i}u_{0l}n_jn_k+\epsilon_{ij}\varphi_0\varphi_0n_in_j)\frac{F'^2}{c^2}=\frac{1}{2}\rho u_{0i}^2F'^2$$
$$P_i=-\sigma_{ij}\dot{u}_j-D_i\dot{\varphi}=C_{ijkl}u_{0j}u_{0l}n_k\frac{F'^2}{c}+\epsilon_{ij}\varphi_0\varphi_0n_j\frac{F'^2}{c},\ u_{0i}^2=u_{0i}u_{0i} \tag{9-14}$$

把式(9-14)代入(9-13)，便得

$$V_i^{(e)}=(C_{ijkl}u_{0j}u_{0l}n_k+\epsilon_{ij}\varphi_0\varphi_0n_j)/\rho u_{0m}^2c,\quad V_i^{(e)}n_i=c \tag{9-15a}$$

对于归一化的位移矢量 ($u_{0m}u_{0m}=1$)，上式化为

$$V_i^{(e)}=(C_{ijkl}u_{0j}u_{0l}n_k+\epsilon_{ij}\varphi_0\varphi_0n_j)/\rho c,\quad \boldsymbol{V}^{(e)}\cdot\boldsymbol{n}=c \tag{9-15b}$$

$\boldsymbol{V}^{(e)}$ 指示的方向是能量传播方向，也即声学射线的方向。上式表明能量传播速度在传播方向的分量等于平面波的相速度，所以能量传播速度不小于相速度。如能量传播方向和波平面的法线方向 $\boldsymbol{n}$ 一致，则称为"均匀波"，或称这一模式为"纯粹"的；如不一致，则称为"非均匀波"，非均匀波理论将在第 10 章讨论。

9.1.3 群速度

对于给定圆频率的单色平面波，通常把式(9-4)表成下述复数形式

$$u_i = u_{0i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} = u_{0i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-ct)},\quad \varphi = \varphi_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kx-\omega t)} = \varphi_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x-ct)} \tag{9-16}$$

式中 $\omega = kc$ 为圆频率，$k = 2\pi/\lambda$ 为波数，λ 为波长。而对一般平面波，可用叠加的方法处理。对于色散波，波速依赖于频率，群速度定义为

$$V_j^{(g)} = \partial\omega/\partial k_j,\ k_j = kn_j \tag{9-17}$$

改写特征方程(9－8)为 $|\rho c^2\delta_{il} - (C_{ijkl}n_jn_k + e_i^* e_l^*/\epsilon^*)| = 0$，再把上式每一行乘以 k^2，则得 $|\rho(kc)^2\delta_{il} - (C_{ijkl}kn_jkn_k + ke_i^* ke_l^*/\epsilon^*)| = 0$。由此看出，$c$ 和$(n_j,\ e_i^*)$的关系与 $\omega = kc$ 和$(kn_j,\ ke_i^*)$相同，所以有

$$V_j^{(g)} = \partial\omega/\partial k_j = \partial c/\partial n_j \tag{9-18a}$$

由式(9－14)，得 $C_{ijkl}u_{0i}u_{0l}n_jn_k + \epsilon_{ij}\varphi_0\varphi_0n_in_j = \rho u_{0i}^2c^2$，由此推出

$$V_j^{(g)} = (C_{ijkl}u_{0i}u_{0l}n_k + \epsilon_{ij}\varphi_0\varphi_0n_i)/\rho cu_{0i}^2 = V_j^{(e)} \tag{9-18b}$$

可见对于无能量耗散的平面波，群速度和能量传播速度相等。但是，对于有能量耗散的波，两者是不等的。

9.1.4 波传播中的特征面

解释弹性波在介质中传播的现象时，引入一些特征面的概念是方便的。这些特征面主要有：速度面、慢度面和波面。

1）速度面

改变传播方向时，相速度矢量 $\boldsymbol{c} = c\boldsymbol{n}$ 的端点在空间画出的面称为速度面，压电体有三种不同速度的波(拟纵波，两个拟横波)，因此有三个速度面。

2）慢度面

慢度面是矢量 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{n}/c$ 端点的轨迹，$\boldsymbol{L}$ 和 $\boldsymbol{c}$ 平行，且 $Lc = 1$，慢度面的个数和速度面相同。慢度面和光学中的指数面有相同的作用，在讨论反射和折射问题时起着关键性作用。可以证明，能量速度总是垂直慢度面(图 9－2(a))。事实上有

$$\frac{\partial L_i}{\partial n_k} = \frac{\partial(n_i/c)}{\partial n_k} = \frac{\delta_{ik}}{c} - \frac{n_i}{c^2}\frac{\partial c}{\partial n_k}$$
$$\boldsymbol{V}^{(e)}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{L}}{\partial n_k} = V_i^{(e)}\frac{\partial L_i}{\partial n_k} = \frac{1}{c}\left(V_k^{(e)} - \frac{V_i^{(e)}n_i}{c}\frac{\partial c}{\partial n_k}\right) = \frac{1}{c}\left(V_k^{(e)} - \frac{\partial c}{\partial n_k}\right) = 0 \tag{9-19}$$

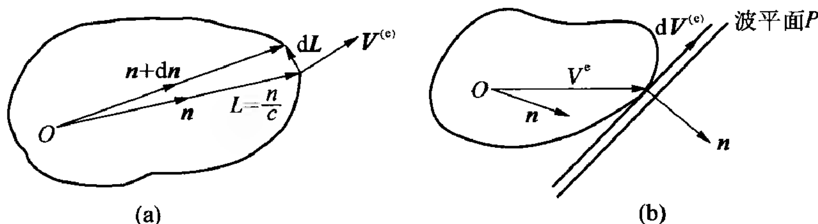


图 9－2

(a) 能量传播速度和慢度面垂直；(b) 波传播方向沿波面法线

3）波面

能量速度矢量 $\boldsymbol{V}^{(e)}$ 的端点在空间画出的面称为波面。波的传播方向沿着波面的法线，或波平面 P 和波面相切。事实上，按式(9－15)和(9－19)，有 $\boldsymbol{V}^{(e)}\cdot\boldsymbol{L} = 1$，$\boldsymbol{V}^{(e)}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{L} = 0$，所以推

出

$$\boldsymbol{L}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{V}^{(e)}=0,\quad 或\ \boldsymbol{n}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{V}^{(e)}=0 \tag{9-20}$$

因此 $\boldsymbol{n}$ 和波面的切平面垂直(图 9-2(b))。

9.1.5 例题[131]

现在讨论铌酸锂铁电晶体，它属三角晶系的 $3m$ 类。设一平面波沿它的 yz 对称平面($n_1=0,\ n_2=\sin\theta,\ n_3=\cos\theta$) 内传播，弹性系数为

$$[e_{i\alpha}]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & -e_{22}\\ -e_{22} & e_{22} & 0 & e_{15} & 0 & 0\\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

$$\overline{\Gamma}_{11}=\Gamma_{11},\quad \overline{\Gamma}_{22}=\Gamma_{22}+e_2^{*2}/\epsilon^*,\quad \overline{\Gamma}_{23}=\Gamma_{23}+e_2^*e_3^*/\epsilon^*,\quad \overline{\Gamma}_{33}=\Gamma_{33}+e_3^{*2}/\epsilon^*$$

$$e_1^*=0,\ e_2^*=e_{22}\sin^2\theta+(e_{15}+e_{31})\sin\theta\cos\theta$$

$$e_3^*=e_{15}\sin^2\theta+e_{33}\cos^2\theta,\ \epsilon^*=\epsilon_{11}\sin^2\theta+\epsilon_{33}\cos^2\theta$$

拟纵向波速： $$2\rho c_1^2=\overline{\Gamma}_{22}+\overline{\Gamma}_{33}+\sqrt{(\overline{\Gamma}_{22}-\overline{\Gamma}_{33})^2+4(\overline{\Gamma}_{33})^2}$$

拟剪切波速 1： $$2\rho c_2^2=\overline{\Gamma}_{22}+\overline{\Gamma}_{33}-\sqrt{(\overline{\Gamma}_{22}-\overline{\Gamma}_{33})^2+4(\overline{\Gamma}_{33})^2}$$

拟剪切波速 2： $$\rho c_3^2=\Gamma_{11}\ (和压电系数无关)$$

慢度面[131]由图 9-3 中的实线表示，图中虚线为不计压电系数的慢度面，由图还可看出拟剪切波 2 和压电系数无关。

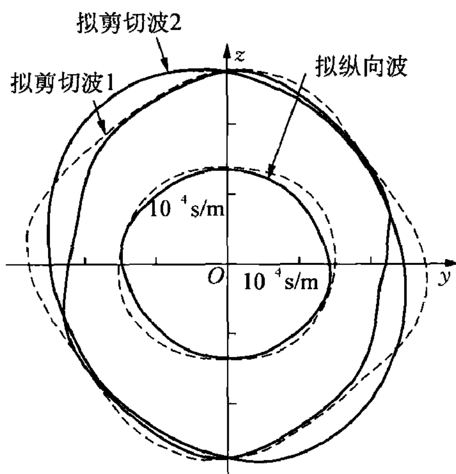


图 9-3 铌酸锂沿它的 yz 对称平面内传播时的慢度面

9.1.6 平面弹性波在压电介质界面上的反射和透射

讨论弹性波在压电介质界面上的反射和透射的文献不多，文献[131]在讨论压电介质中的波时，没有触及这个问题，Wang[133] 和 Burkov 等[134] 研究过这一问题。有些作者讨论这一问题时，在电位移波中引入一个任意常数振幅，但这样一来，弹性波便不能满足运动方程了；原因是运动方程使广义应力波的波幅之间有一个确定的关系，不是所有的波幅都能任意给定。电弹性介质中

波的反射和透射问题的困难,来自电位移没有自己独立的波,它是通过本构方程而用其他弹性波表示的。这一点从式(9-6)~(9-8)可明显看出,因为电势可从广义运动方程中消去,剩下3个用位移表示的等效运动方程(9-8),只是这个等效运动方程变量前的系数和压电性质相关。所以对于一般的空间问题只有3个独立的弹性波,如果仅就这3个弹性波讨论反射和透射问题,那么就不可能在边界上加入电学边界条件。虽然如此,但在波的反射和透射问题中,Kuang 和 Yuan[135]指出,由于入射波、反射波和透射波在界面上的波矢量分量必须相同,服从广义 Snell 定律,从而当弹性波入射到电介质界面时,除去通常的反射和透射波外,还在界面的两侧各激发出一个表面波,这可用来满足界面的电学边界条件。详细的讨论将在第10章中和热释电材料中的问题一同讨论。

9.2 表面波[131, 132, 136, 137]

9.2.1 结构中的表面波

压电声波器件中广泛使用多种类型的表面波。表面声波是一种能量集中在弹性体表面附近的波,其传播速度比电磁波小5个数量级。通常表面波(SAW)器件的体积较小,重量轻,性能稳定和价格便宜,故而广泛应用于物理、化学和生物邻域的传感技术,通信、声呐、无损检测、无线电遥测和电子对抗系统等领域。下述结构中可以存在表面波。

1) *半无限介质*

在半无限介质表面存在一个复杂的表面波,对于最简单的各向同性介质,它位于波矢量和边界面法线组成的平面内,由相位差为 $\pi/2$ 的一个纵向波和一个剪切波组成,称为 Rayleigh 波。沿深度方向纵波衰减较快,离表面 0.2λ(λ 为波长)处纵波改变符号,在深 2λ 处质点位移消失。在普通弹性体中,半无限介质表面不存在横向表面波,但在一定条件下的压电介质中,极化平行于表面的横向表面波可以传播,称为 Bleustein - Gulyaev 波[136, 137],压电性愈强,穿入深度愈小,但穿入深度($>100\lambda$)远大于 Rayleigh 波。

2) *双半无限介质*

在弹性性质不同的双半无限介质中,在界面的两侧都可以存在表面波,称为 Stoneley 波。

3) *平行板界定的条形区*

对于两个平行板界定的条形区域,当平板间的距离(条形区域的厚度)远大于传播波长时,沿每个平板的表面都可以存在 Rayleigh 表面波。当平板间的距离和波长同量级时,条形域中存在 Lamb 波传播,Lamb 波有纵波和横波分量,可以是对称的和反对称的。

4) *层状介质*

对于由弹性性质不同的薄层和很厚的基底组成的复合介质,当薄层中的剪切波速小于基底中的剪切波速时,存在横向剪切表面波,称为 Love 波[131]。

为了改善器件的性能,有时采用多层复合介质,或是施加初应力或初电压,此时,其中波的研究将更为复杂,本章重点将讨论这类问题。

在表面波的讨论中,视资料来源不同,取用波面在(x_1, x_2)平面内传播,x_3 垂直自由表面;或在(x_2, x_3)平面内传播,x_1 垂直自由表面(图9-4)。

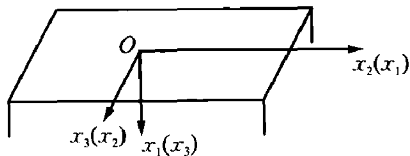


图9-4 表面波传播所在的平面

9.2.2 表面波的一般解法

本小节设表面波在半无限介质的(x_1, x_2)平面内传播，x_3 垂直自由表面，从表面算起(图 9-4)。通常给定圆频率 ω，有时也给定波长或波数；同时因表面波沿深度 x_3 方向衰减，所以假设位移和电势取成下列形式：

$$u_i = u_{0i}\mathrm{e}^{-kbx_3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x_1n_1+x_2n_2-ct)}, \quad \varphi = \varphi_0\mathrm{e}^{-kbx_3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x_1n_1+x_2n_2-ct)} \tag{9-21}$$

式中取 b 大于零，为沿深度方向的待定衰减系数。上式还可改写成

$$u_i = u_{0i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x_jn_j-ct)}, \quad \varphi = \varphi_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x_jn_j-ct)}, \quad b = -\mathrm{i}n_3, \quad \mathrm{Im}n_3 > 0, \ j = 1, 2, 3 \tag{9-22}$$

式(9-22)比(9-21)更简洁，在以后的运算中也较方便；但要注意其中的 n_3 不是方向余弦，是和衰减系数相关的待定量。今后上述两种表示我们均将采用。把式(9-22)代入(9-3)，便得到和式(9-6)相同的本征方程。先以传播速度 c 为参数，则式(9-6)便是确定 n_3 的本征方程。它是 n_3 的 8 阶实系数方程，因而有 4 对复根，但由于要求 $\mathrm{Im}n_3 > 0$，所以只有 4 个根是合适的，记为 $n_2^{(r)}$，$r = 1, 2, 3, 4$，与之对应的有 4 对本征矢量 $u_{0i}^{(r)}$，$\varphi_0^{(r)}$。从而一般解为

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_{r=1}^{4} A_r u_{0i}^{(r)}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x_jn_j^{(r)}-ct)}, \quad \varphi = \sum_{r=1}^{4} A_r\varphi_0^{(r)}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x_jn_j^{(r)}-ct)}, \ j = 1, 2, 3 \\ u_i &= \sum_{r=1}^{4} A_r u_{0i}^{(r)}\mathrm{e}^{-kb_rx_3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x_1n_1+x_2n_2-ct)}, \quad \varphi = \sum_{r=1}^{4} A_r\varphi_0^{(r)}\ \mathrm{e}^{-kb_rx_3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x_1n_1+x_2n_2-ct)} \end{aligned} \tag{9-23}$$

上式中的 c 和 A_r 由自由表面 $x_3 = 0$ 的边界条件确定。机械边界条件是表面上应力自由，即

$$\begin{aligned} \sigma_{i3} &= C_{i3kl}u_{k,l} + e_{ki3}\varphi_{,k} = \sum_{r=1}^{4} A_r\sigma_{i3}^{(r)}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x_1n_1+x_2n_2-ct)} = 0 \\ \sigma_{i3}^{(r)} &= -\mathrm{i}k(C_{i3kl}n_l^{(r)}\ u_{0k}^{(r)} + e_{ik3}n_k^{(r)}\varphi_0^{(r)}), \ x_3 = 0 \end{aligned} \tag{9-24}$$

在界面上要求介质和环境具有相同的电势和法向电位移，即

$$\varphi = \varphi^{\mathrm{env}}, \quad D_3 = D_3^{\mathrm{env}}, \ x_3 = 0 \tag{9-25}$$

如和介质表面相邻的环境是空气，则在空气中电势满足调和方程，其解可以写成

$$\varphi^{\mathrm{env}} = \varphi_0^{\mathrm{env}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x_jn_j-ct)}, \quad D_3^{\mathrm{env}} = -\mathrm{i}k\epsilon^{\mathrm{env}}\varphi_0^{\mathrm{env}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x_jn_j-ct)}, \ x_3 \geqslant 0, \ j = 1, 2, 3 \tag{9-26}$$

在表面上有

$$\varphi^{\mathrm{env}} = \varphi_0^{\mathrm{env}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x_1n_1+x_2n_2-ct)}, \quad D_3^{\mathrm{env}} = -\mathrm{i}k\epsilon^{\mathrm{env}}\varphi_0^{\mathrm{env}}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x_1n_1+x_2n_2-ct)}, \ x_3 = 0 \tag{9-27}$$

联合式(9-24)和(9-27)，可以得到 5 个未知量 A_r，φ_0^{env} 的 5 个齐次方程，要使 A_r，φ_0^{env} 有解，其前的系数行列式必须为零，由此可求波速(本征值)c，进而可求本征矢量 A_r，φ_0^{env}。为了保证 $\mathrm{Im}n_3 > 0$，通常只能解得一个 c 值。

上述电学边界条件可更简单地作如下处理，由式(9-23)，得

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \sum_{r=1}^{4} A_r\varphi_0^{(r)}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x_1n_1+x_2n_2-ct)}, \quad D_3(0) = -\sum_{r=1}^{4} A_rD_3^{(r)}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x_1n_1+x_2n_2-ct)} \\ D_3^{(r)} &= \mathrm{i}k(\epsilon_{3l}\varphi_0^{(r)}n_l^{(r)} - e_{3kl}u_{0k}^{(r)}\ n_l^{(r)}) \end{aligned} \tag{9-28}$$

$\varphi(0)$和 $D_3(0)$是系数 A_r 的线性组合，而式(9-24)是 4 个 A_r 的 3 个方程，因而所有的 A_r 可用其中的一个表示，如 A_{r0}，从而 φ 和 D_3 均可用 A_{r0} 表示，而其比值则和 A_{r0} 无关，可写成

$$\varphi(0)/D_3(0) = (\mathrm{i}c/k)Z_s = (\mathrm{i}c^2/\omega)Z_s, \quad \varphi(0) - (\mathrm{i}c/k)Z_s D_3(0) = 0 \tag{9-29}$$

式中 Z_s 称为表面阻抗。在环境中同样成立类似的关系，记其阻抗为 Z_s^{env}，则有

$$Z_s = Z_s^{env}, \; Z_s^{env} = \mathrm{i}/(c\epsilon^{env}) \tag{9-30}$$

因此式(9－29)中的 Z_s 可用 Z_s^{env} 代替，从而式(9－24)和(9－29)组成4个未知量的4个齐次方程，未知量的系数组成4阶的本征方程，波速 c 为其本征值。对于介质涂上一层金属电极的短路情形，有 $Z_s^{env}=0$。

通常定义表面波的耦合系数为

$$K_s^2 = 2(c_s - c_0)/c_s \tag{9-31}$$

式中 c_s 为短路时的波速，c_0 为开路时的波速，它表明电极把电信号转换为表面声波的能力。

9.2.3 半无限介质中可能存在的表面波的类型

式(9－23)的解包含三个位移和电势，是复杂的三维压电 Rayleigh 波，通常记为$\overline{R}_3$ 波。当表面波沿晶体中某些对称面传播，表面波往往呈现较为简单的形式。

(1) $\Gamma_{12}=\Gamma_{23}=e_1^*=e_3^*=0$，从而式(9－6)和(9－8)分裂成两个方程

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{11}-\rho c^2 & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{33}-\rho c^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_{01} \\ u_{03} \end{Bmatrix} = \mathbf{0}, \quad \begin{bmatrix} \Gamma_{22}-\rho c^2 & e_2^* \\ e_2^* & -\epsilon^* \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_{02} \\ \varphi_0 \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \tag{9-32}$$

上式中的第一式是二维纯弹性的 Rayleigh 波，记为 R_2 波，第二式是剪切横向压电波，记为 B 波，称为 B－G(Bleustein－Gulyaev)波。上述两个波可以同时存在介质中，也可以单独存在。为简单计，设表面波沿 x_1 方向传播，所以有 $n_1=1$，$n_2=0$，$n_3=\mathrm{i}b=q$，从而 $\Gamma_{il}=C_{ijkl}n_jn_k$ 和 $e_i^*=e_{kij}n_jn_k$ 化为

$$\begin{aligned} \Gamma_{il} &= C_{ijkl}n_jn_k = C_{i11l} + (C_{i13l}+C_{i31l})q + C_{i33l}q^2 \\ e_i^* &= e_{kij}n_jn_k = e_{1i1} + e_{3i3} + (e_{1i3}+e_{2i1})q + e_{3i3}q^2 \end{aligned} \tag{9-33}$$

$\Gamma_{12}=\Gamma_{23}=0$ 要求

$$\Gamma_{12} = C_{1112} + (C_{1132}+C_{1312})q + C_{1332}q^2 = 0, \quad \Gamma_{32} = C_{3112} + (C_{3132}+C_{3312})q + C_{3332}q^2 = 0$$

即要求下标含奇数2的弹性常数均为零。$e_1^*=e_3^*=0$ 要求

$$e_1^* = e_{111} + e_{313} + (e_{113}+e_{311})q + e_{313}q^2 = 0, \quad e_3^* = e_{131} + e_{333} + (e_{133}+e_{331})q + e_{333}q^2 = 0$$

即下标不含2的所有压电系数为零。

(2) $\Gamma_{13}=\Gamma_{23}=e_3^*=0$，从而式(9－6)分裂成下列两个方程

$$(\Gamma_{33}-\rho c^2)u_{03} = 0, \quad \begin{bmatrix} \Gamma_{11}-\rho c^2 & \Gamma_{12} & e_1^* \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22}-\rho c^2 & e_2^* \\ e_1^* & e_2^* & -\epsilon^* \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_{01} \\ u_{02} \\ \varphi_0 \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \tag{9-34}$$

上式中的第一式是非压电横向剪切波；第二式是二维压电 Rayleigh 波，记为$\overline{R}_2$ 波。上述两个波可以同时存在介质中，也可以单独存在。$e_3^*=0$ 要求 $e_{131}=e_{232}=0$，$e_{132}+e_{231}=0$。

上述5种波，实际上都可能存在。

9.3 非均匀压电层状介质中的 Love 波[138]

9.3.1 问题的描述

图 9-5 表示一压电层状结构，覆盖层为横观各向同性压电陶瓷，厚度 h 约几微米，极化方向沿 x_3 轴，在无限压电陶瓷中的剪切波速为 c_s；基底为非压电性的各向同性弹性材料，其参数沿厚度 x_3 方向连续变化，通常厚约 0.5 mm，其中的剪切波速为 c_M；覆盖层和基底在面 $x_3=0$ 处理想连接。由于基底厚度远大于覆盖层，因而基底可视为半无限体。层状结构中的 Love 波的波速 c 满足条件 $c_s<c<c_M$。

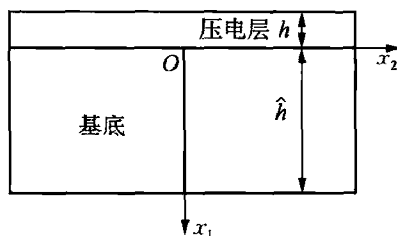


图 9-5 非均匀压电层状介质

设 Love 波沿晶体对称轴 x_2 轴传播，则有

$$\begin{aligned}&u_1=u_2=0,\quad u_3=u_3(x_1,x_2,t),\quad \varphi=\varphi(x_1,x_2,t)\\&\sigma_{11}=\sigma_{22}=\sigma_{33}=\sigma_{21}=D_3=0\end{aligned}\tag{9-35}$$

横观各向同性压电层的本构方程为

$$\begin{aligned}&\sigma_{31}=C_{44}u_{3,1}+e_{15}\varphi_{,1},\quad \sigma_{32}=C_{44}u_{3,2}+e_{15}\varphi_{,2}\\&D_1=e_{15}u_{3,1}-\epsilon_{11}\varphi_{,1},\quad D_2=e_{15}u_{3,2}-\epsilon_{11}\varphi_{,2}\end{aligned}\tag{9-36}$$

因而用位移和电势表示的压电层的运动方程为

$$\begin{aligned}&C_{44}(u_{3,11}+u_{3,22})+e_{15}(\varphi_{,11}+\varphi_{,22})=\rho u_{3,tt}\\&e_{15}(u_{3,11}+u_{3,22})-\epsilon_{11}(\varphi_{,11}+\varphi_{,22})=0\end{aligned}\tag{9-37}$$

基底是横观各向同性非压电介质，材料系数依赖坐标 x_1，设

$$C_{44}^{M}=C_{44}^{0}f(x_1),\quad \epsilon_{11}^{M}=\epsilon_{11}^{0}\eta(x_1),\quad \rho^{M}=\rho^{0}g(x_1)\tag{9-38}$$

式中 C_{44}^0，ϵ_{11}^0，ρ^0 为 $x_1=0$ 时的对应值。基底的运动方程为

$$\begin{aligned}&C_{44}^{0}\left[(u_{3,11}^{M}+u_{3,22}^{M})f(x_1)+u_{3,1}^{M}f_{,1}\right]=\rho^{0}g(x_3)u_{3,tt}^{M}\\&(\varphi_{,11}^{M}+\varphi_{,22}^{M})\eta(x_1)+\varphi_{,1}^{M}\eta_{,1}=0\end{aligned}\tag{9-39}$$

通常层状结构置于介电常数为ϵ_0（或记为ϵ^c）的空气中，其在 $x_3<-h$ 空气中的电势为 φ_0（或记为 φ^c），满足方程

$$\varphi_{0,11}+\varphi_{0,22}=0\tag{9-40}$$

力学和电学边界条件和界面连续条件分别如下。

(1) 在压电薄层的边界面 $x_1=-h$ 上，边界条件为

$$\begin{aligned}&\text{应力边界条件：}\quad \sigma_{31}(-h)=0\\&\text{电学短路条件：}\quad \varphi(-h)=0\\&\text{电学开路条件：}\quad \varphi(-h)=\varphi_0(-h),\quad D_1(-h)=-\epsilon_0\varphi_{0,1}(-h)\end{aligned}\tag{9-41}$$

(2) 在压电薄层和基底的界面 $x_3=0$ 上，连接条件为

$$u_3(0) = u_3^{\mathrm{M}}(0),\quad \sigma_{31}(0) = \sigma_{31}^{\mathrm{M}}(0),\quad \varphi(0) = \varphi^{\mathrm{M}}(0),\quad D_1(0) = D_1^{\mathrm{M}}(0) \qquad (9-42)$$

(3) 在无穷远处的条件为

$$u_3^{\mathrm{M}}(\infty) = \varphi^{\mathrm{M}}(\infty) = 0,\quad \varphi_0(-\infty) = 0 \qquad (9-43)$$

9.3.2 问题的解法

1) 压电薄层中的解

设压电薄层的运动方程(9-37)式的解为

$$u_3 = W(x_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x_2-ct)},\quad \varphi = \Phi(x_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x_2-ct)} \qquad (9-44)$$

把上式代入式(9-37)，得待定函数 $W(x_1)$ 和 $\Phi(x_1)$ 的两个二阶常系数微分方程

$$\begin{aligned} &C_{44}(W'' - k^2W) + \rho k^2c^2W + e_{15}(\Phi'' - k^2\Phi) = 0 \\ &e_{15}(W'' - k^2W) - \epsilon_{11}(\Phi'' - k^2\Phi) = 0 \end{aligned} \qquad (9-45)$$

把上式的第二式代入第一式，得

$$\begin{aligned} &W'' + k^2b^2W = 0 \\ &b = \sqrt{c^2/c_s^2 - 1},\ c_s = \sqrt{C_{44}^*/\rho},\ C_{44}^* = C_{44} + e_{15}^2/\epsilon_{11} \end{aligned} \qquad (9-46)$$

上式的解为 $W(x_1) = A_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kbx_1} + A_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}kbx_1}$，把此式代入式(9-45)的第二式，解得

$$\Phi(x_1) = (e_{15}/\epsilon_{11})A_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kbx_1} + (e_{15}/\epsilon_{11})A_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}kbx_1} + A_3\mathrm{e}^{-kx_1} + A_4\mathrm{e}^{kx_1}$$

再代回式(9-44)，便得

$$\begin{aligned} &u_3 = (A_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kbx_1} + A_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}kbx_1})\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x_2-ct)} \\ &\varphi = [(e_{15}/\epsilon_{11})A_1\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kbx_1} + (e_{15}/\epsilon_{11})A_2\mathrm{e}^{\mathrm{i}kbx_1} + A_3\mathrm{e}^{-kx_1} + A_4\mathrm{e}^{kx_1}]\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x_2-ct)} \end{aligned} \qquad (9-47)$$

2) 空气中的电势解

根据式(9-40)和(9-41)中的第三式(电学开路条件)，可得

$$\varphi_0 = [(e_{15}/\epsilon_{11})A_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}kbh} + (e_{15}/\epsilon_{11})A_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kbh} + A_3\mathrm{e}^{kh} + A_4\mathrm{e}^{-kh}]\mathrm{e}^{k(h+x_1)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x_2-ct)} \qquad (9-48)$$

3) 基底中的解

设

$$u_3^{\mathrm{M}} = f^{-1/2}(x_1)\xi(x_1)\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x_2-ct)} \qquad (9-49)$$

把上式代入式(9-39)中的第一式，便得

$$\xi''(x_1) - k^2\mathcal{L}_1(x_1)\xi = 0,\ \mathcal{L}_1(x_1) = \frac{1}{4k^2f}\left(2f'' - \frac{1}{f}f'^2\right) - \frac{c^2g}{c_{\mathrm{M}}^2f} + 1 \qquad (9-50)$$

式中 $\xi'' = \xi_{,11}$，$\xi' = \xi_{,1}$，$c_{\mathrm{M}} = C_{44}^0/\rho^0$。当$\mathcal{L}_1(x_1)$变化缓慢且考虑无穷远处的条件后，采用 WKBJ 法求上式的近似解，当近似解的高阶项存在下列关系时

$$\frac{1}{k}\int_0^{x_3}\left\{\frac{\mathcal{L}_1''(\varsigma)}{8[\mathcal{L}_1(\varsigma)]^{3/2}} - \frac{5[\mathcal{L}_1'(\varsigma)]^2}{32[\mathcal{L}_1(\varsigma)]^{5/2}}\right\}\mathrm{d}\varsigma \ll \min\left[k\int_0^{x_3}\sqrt{\mathcal{L}_1(\varsigma)}\,\mathrm{d}\varsigma,\ 1\right]$$

近似解为

$$\xi \approx A_5[\mathcal{L}_1(x_1)]^{-1/4}\exp\left[-k\int_0^{x_3}\sqrt{\mathcal{L}_1(\varsigma)}\,d\varsigma\right]$$

从而基底的位移可以写成

$$u_3^{\mathrm{M}} = A_5 f^{-1/2}(x_3)[\mathcal{L}_1(x_1)]^{-1/4}\exp\left[-k\int_0^{x_1}\sqrt{\mathcal{L}_1(\varsigma)}\,d\varsigma\right]e^{ik(x_2-ct)} \tag{9-51a}$$

类似地可求得

$$\begin{aligned}&\varphi^{\mathrm{M}} = A_6\eta^{-1/2}(x_1)[\mathcal{L}_2(x_1)]^{-1/4}\exp\left[-k\int_0^{x_3}\sqrt{\mathcal{L}_2(\varsigma)}\,d\varsigma\right]e^{ik(x_2-ct)}\\&\mathcal{L}_2(x_3) = (4k^2\eta)^{-1}[2\eta''-\eta^{-1}(\eta')^2]+1\end{aligned} \tag{9-51b}$$

把式(9-47)、(9-48)、(9-51)及相应的应力和电位移代入相应的边界条件，便得确定 6 个待定常数 A_i，$i=1\sim 6$ 的 6 个线性齐次方程组

$$\begin{aligned}&C_{44}^{*}ib(-e^{ikbh}A_1+e^{-ikbh}A_2)-e_{15}e^{kh}A_3+e_{15}e^{-kh}A_4=0\\&\frac{e_{15}}{\epsilon_{11}}(e^{ikbh}A_1+e^{-ikbh}A_2)+(1+\epsilon_{11}/\epsilon_0)e^{kh}A_3+(1-\epsilon_{11}/\epsilon_0)e^{-kh}A_4=0\\&C_{44}^{*}ikb(-A_1+A_2)-e_{15}kA_3+e_{15}kA_4-C_{44}^{0}[f(0)]^{-1/2}\cdot\\&\quad[-(f'/2)\mathcal{L}_1^{-1/4}+(f/4)\mathcal{L}_1^{-5/4}\mathcal{L}_1'-kf\mathcal{L}_1^{1/4}]_{x_3=0}A_5=0\end{aligned} \tag{9-52a}$$

$$\begin{aligned}&A_1+A_2-[f(0)]^{-1/2}\mathcal{L}_1^{-1/4}(0)A_5=0\\&\frac{e_{15}}{\epsilon_{11}}(A_1+A_2)+A_3+A_4-[\eta(0)]^{-1/2}\mathcal{L}_2^{-1/4}(0)A_6=0\\&\epsilon_{11}k(A_3-A_4)-\epsilon_{11}^{0}[\eta(0)]^{-1/2}\cdot\\&\quad[-(\eta'/2)\mathcal{L}_2^{-1/4}+(\eta/4)\mathcal{L}_2^{-5/4}\mathcal{L}_2'-k\eta\mathcal{L}_2^{1/4}]_{x_1=0}A_6=0\end{aligned} \tag{9-52b}$$

为使待定系数有解，必须其前的系数行列式为零，由此可求得电学开路式时的 Love 波的相速度。对于电学短路的情形可类似地处理，但此时式(9-52)中的第二式需更换为

$$(e_{15}/\epsilon_{11})(e^{ikbh}A_1+e^{-ikbh}A_2)+e^{kh}A_3+e^{-kh}A_4=0 \tag{9-53}$$

如果基底为均匀各向同性材料，则 $f(x_1)=\eta(x_1)=g(x_1)=1$，$f'(x_1)=\eta'(x_1)=0$，$\mathcal{L}_1=-\sqrt{c^2/c_{\mathrm{M}}^2-1}$，$\mathcal{L}_2=1$。此时由式(9-52)的行列式为零的条件可求出表面电学开路时的相速度方程为

$$\begin{aligned}&\left[\left(\frac{\epsilon_{11}\epsilon_{11}}{\epsilon_0\epsilon_{11}^{\mathrm{M}}}+1\right)\sinh(kh)+\left(\frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_0}+\frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_{11}^{\mathrm{M}}}\right)\cosh(kh)-\frac{e_{15}^2}{C_{44}^{*}\epsilon_{11}b}\sin(kbh)\right]\left[\frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11}}\sinh(kh)+\right.\\&\left.C_{44}^{*}b\sin(kbh)+C_{44}^{0}\mathcal{L}_1\cos(kbh)\right]-\frac{e_{15}^2}{\epsilon_{11}}\left[\frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_0}\sinh(kh)+\cosh(kh)-\cos(kbh)+\right.\\&\left.\frac{C_{44}^{0}\mathcal{L}_1}{C_{44}^{*}b}\sin(kbh)\right]\left[\frac{\epsilon_{11}}{\epsilon_{11}^{\mathrm{M}}}\sinh(kh)+\cosh(kh)-\cos(kbh)\right]=0\end{aligned} \tag{9-54}$$

9.3.3 数值结果和讨论

利用前面的公式，讨论 PZT-2 陶瓷覆盖层和硼硅酸玻璃基底层状结构中的 Love 波，空

气中的$\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}$ F/m。PZT－2(材料 1)和硼硅酸玻璃(材料 2)的参数为

材料	ρ	C_{11}	C_{12}	C_{13}	C_{44}	e_{15}	e_{31}	e_{33}	ϵ_{11}	ϵ_{33}
	(kg/m^3)	(MPa)				(C/m^2)			(10^{-10}F/m)	
1	7.6	13.5	6.79	6.81	2.22	9.9	−1.9	9.0	44.6	23.0
2	2.23	7.42			2.78				0.45	0.45

图 9－6 表示基底为均匀各向同性材料时，相速度 c_0 和压电薄层相对厚度 h/λ 的关系。当 $h/\lambda \ll 1$ 时，c_0 接近基底的剪切波速 3 530.8 m/s，随着频率的增高，逐渐接近压电覆盖层的剪切波速 2 398.8 m/s。均匀介质中，相速度 c_0 和 h/λ 的频散关系与覆盖层的厚度无关。图 9－7 表示材料性质按抛物线规律变化时

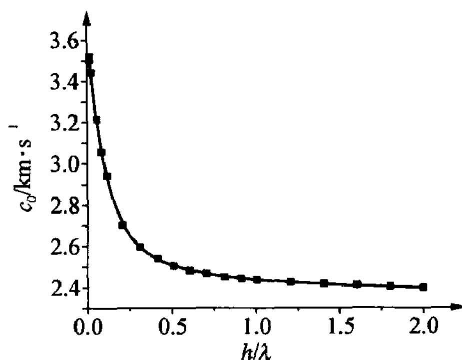


图 9－6 均匀基底时最低阶 Love 波的频散曲线

$$f(x_1) = 1 + 25x_1 + 10x_1^2$$
$$g(x_2) = 1 + 50x_1 + 15x_1^2, \quad \eta(x_1) = 1$$

薄层中的相速度迁移 $\Delta c = c - c_0$ 与基底为均匀各向同性材料情况下的相速度 c_0 的比值 $\Delta c/c_0$ 和 h/λ 的关系，其中 c 为非均匀基体时的相速度。由图可见，频散曲线和薄膜的相对厚度有关。

图 9－8 表示材料性质按规律 $f(x_1) = 1$，$g(x_1) = 1 + g_1 x_1$，$\eta(x_1) = 1$ 变化时，$\Delta c/c_0$ 和 g_1 的关系。由图可见，密度变化和相速度迁移存在较好的线性关系。

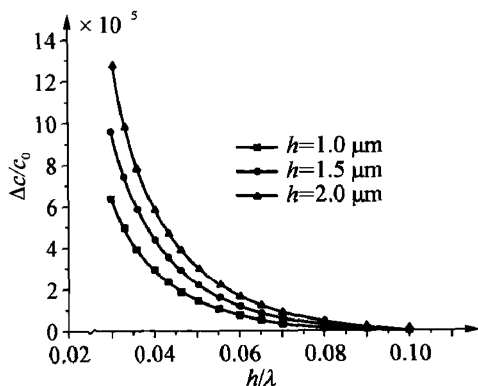


图 9－7 基底材料性质按抛物线规律变化时的 $\Delta c/c_0 - h/\lambda$ 曲线

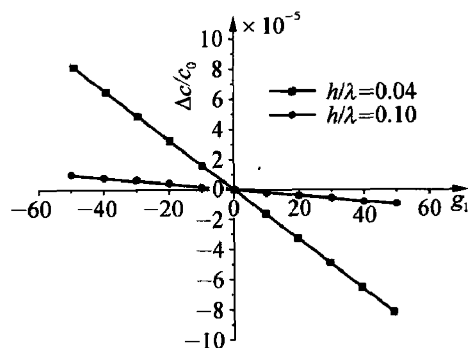


图 9－8 基底材料性质按线性规律变化时的 $\Delta c/c_0 - g_1$ 曲线

9.4 存在偏应力时 $ZnO/SiO_2/Si$ 层压结构中的 Love 波[139]

9.4.1 存在偏应力的压电介质中的控制方程

在表面声波器件的生产过程中，往往产生很大的初应力，为了改善表面声波器件的性能，

有时采用多层层状结构和预先施加偏应力或偏电压等的偏场措施，这些偏场可能引起有限应变；而输入的外加有用信号，通常较小，这就形成在有限变形的基础上叠加一个微扰变形的问题[139, 140, 141]。按照文献[4]和本书第一章中的相关理论，我们选取无应力状态的构形为自然构形，并取为参照构形，但本节中，相对于初始构形的量，不再在其上方加"—"。介质在偏应力和偏电压等的偏场情况下的构形称为偏应力构形，其中的物理量，用右上角加"0"表示；外加的动态机械和电信号(载荷)的附加扰动量，将用上方没有上标的量表示，此时的构形称为现时构形，但由于扰动量很小，所以现时构形和偏应力构形可以不加区别。偏量和扰动量之和构成全量，用右上方加"t"的变量表示，按 1.3 节，采用 Green 应变和 Kirchhoff 应力和初始构形中的电场和电位移，相对于自然构形，主要公式如下

应变-位移关系：$\varepsilon_{kl}^{t} = \dfrac{1}{2}(u_{k,l}^{t} + u_{l,k}^{t} + u_{m,k}^{t}u_{m,l}^{t}),\qquad x_{l,m} = \delta_{lm} + u_{l,m}$ (9-55)

电场-电势关系：$E_i^{t} = -\varphi_{,i}^{t}$ (9-56)

运动方程：$(\sigma_{kl}^{t} + \sigma_{km}^{t}u_{l,m}^{t})_{,k} + f_l^{t} = \rho^{t}\ddot{u}_l^{t}$ (9-57)

电位移高斯方程：$D_{i,i}^{t} = \rho_e^{t}$ (9-58)

边界条件：$x_{l,m}\sigma_{km}^{t}n_k^{t} = T_l^{t*},\qquad D_k^{t}n_k^{t} = -\sigma^{t*},\qquad$ 或 $u_i^{t} = u_i^{t*},\qquad \varphi^{t} = \varphi^{t*}$ (9-59)

显然，偏场状态下，诸物理量也必须满足上述诸方程，故有运动方程和边界条件

$$(\sigma_{kl}^{0} + \sigma_{km}^{0}u_{l,m}^{0})_{,k} + f_l^{0} = 0,\qquad (\delta_{lm} + u_{l,m}^{0})\sigma_{km}^{0}n_k^{0} = T_l^{0*} \tag{9-60}$$

全量为偏量和扰动增量之和，即

$$\begin{gathered} u_k^{t} = u_k^{0} + u_k,\qquad \sigma_{kl}^{t} = \sigma_{kl}^{0} + \sigma_{kl},\qquad D_k^{t} = D_k^{0} + D_k \\ f_l^{t} = f_l^{0} + f_l,\qquad T_l^{t*} = T_l^{0*} + T_l^{*},\qquad \rho_e^{t} = \rho_e^{0} + \rho_e,\qquad \sigma^{t*} = \sigma^{0*} + \sigma^{*} \end{gathered} \tag{9-61}$$

所以式(9-57)又可写成

$$[(\sigma_{kl}^{0} + \sigma_{kl}) + (\sigma_{km}^{0} + \sigma_{km})(u_{l,m}^{0} + u_{l,m})]_{,k} + (f_l^{0} + f_l) = \rho_0\ddot{u}_l \tag{9-62}$$

把式(9-62)和(9-60)相减，便得扰动运动在初始构形中的运动方程

$$(\sigma_{kl} + \sigma_{km}^{0}u_{l,m} + \sigma_{kl}u_{l,m}^{0})_{,k} + f_l = \rho_0\ddot{u}_l \tag{9-63}$$

推导上式时，已略去了更高阶的小量 σ_{km}，$u_{l,m}$等项。类似地，在初始构形中对扰动电位移有

$$D_{i,i} = \rho_e \tag{9-64}$$

在初始构形中的边界条件相应地化为

$$\sigma_{kl}n_k^{0}(+\sigma_{kl}^{0}n_k) + \sigma_{km}^{0}u_{l,m}n_k^{0} = T_l^{*},\qquad D_k n_k^{0} + (D_k^{0}n_k) = -\sigma^{*} \tag{9-65}$$

通常扰动很小，现时构形和偏应力构形可以不加区别，从而可近似认为 $n_k^{t} = n_k^{0}$，$n_k = 0$。

以下讨论本构方程。按式(3-27)，对于全量有

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^{t} &= C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^{t} + \frac{1}{2}C_{ijklmn}\varepsilon_{kl}^{t}\varepsilon_{mn}^{t} - e_{mij}E_m^{t} - e_{mijkl}\varepsilon_{kl}^{t}E_m^{t} - \frac{1}{2}l_{mnij}E_m^{t}E_n^{t} \\ D_m^{t} &= \epsilon_{mn}E_n^{t} + \frac{1}{2}\epsilon_{mnp}E_n^{t}E_p^{t} + e_{mij}\varepsilon_{ij}^{t} + \frac{1}{2}e_{mijkl}\varepsilon_{ij}^{t}\varepsilon_{kl}^{t} + l_{mnij}\varepsilon_{ij}^{t}E_n^{t} \end{aligned} \tag{9-66}$$

对于广义偏应力状态，类似地有

$$\sigma_{ij}^0 = C_{ijkl}\varepsilon_{kl}^0 + \frac{1}{2}C_{ijklmn}\varepsilon_{kl}^0\varepsilon_{mn}^0 - e_{mij}E_m^0 - e_{mijkl}\varepsilon_{kl}^0 E_m^0 - \frac{1}{2}l_{mnij}E_m^0 E_n^0$$
$$D_m^0 = \epsilon_{mn}E_n^0 + \frac{1}{2}\epsilon_{mnp}E_n^0 E_p^0 + e_{mij}\varepsilon_{ij}^0 + \frac{1}{2}e_{mijkl}\varepsilon_{ij}^0\varepsilon_{kl}^0 + l_{mnij}\varepsilon_{ij}^0 E_n^0 \tag{9-67}$$

把上两式相减，并用位移表示应力，用电势表示电场，则得

$$\sigma_{ij} = \hat{c}_{ijkl}u_{k,l} + \hat{e}_{mij}\varphi_{,m}, \qquad D_m = e_{mij}^* u_{i,j} - \epsilon_{mn}^*\varphi_{,n} \tag{9-68}$$

式中

$$\hat{c}_{ijkl} = C_{ijkl} + (C_{ijnl}\delta_{km} + C_{ijklmn})u_{m,n}^0 + e_{mijkl}\varphi_{,m}^0, \; \hat{e}_{mij} = e_{mij} + e_{mijkl}u_{k,l}^0 - l_{mnij}\varphi_{,n}^0$$
$$e_{mij}^* = e_{mij} + (e_{mil}\delta_{jk} + e_{mijkl})u_{k,l}^0 - l_{mnij}\varphi_{,n}^0, \; \epsilon_{mn}^* = \epsilon_{mn} + l_{mnij}u_{i,j}^0 - \epsilon_{mnp}\varphi_{,p}^0 \tag{9-69}$$

把式(9-68)代入(9-63)～(9-65)，便得

$$(\sigma_{ij}^* + u_{j,k}\sigma_{ik}^0)_{,i} + f_j = \rho_0\ddot{u}_j, \qquad D_{i,i} = 0$$
$$(\sigma_{ij}^* + u_{j,k}\sigma_{ik}^0)n_i = T_j^*, \qquad D_i n_i = -\sigma^* \tag{9-70}$$

式中

$$\sigma_{ij}^* = c_{ijpl}^* u_{p,l} = c_{ijkl}^* u_{k,l} + e_{mij}^*\varphi_{,m} = \sigma_{ij} + C_{inkl}u_{j,l}^0 u_{k,l} + e_{mil}u_{j,l}^0\varphi_{,m}$$
$$D_m = e_{mpl}^* u_{p,l} = e_{mij}^* u_{i,j} - \epsilon_{mn}^*\varphi_{,n}, \; c_{ijkl}^* = \hat{c}_{ijkl} + C_{inkl}\delta_{jm}u_{m,n}^0 \tag{9-71}$$

式中的下标 p 取值 1～4，其余字母取值 1～3。当 $p=1, 2, 3$ 时，$u_p = u_k$，$c_{ijpl}^* = c_{ijkl}^*$，$e_{mpl}^* = e_{mkl}^*$；当 $p=4$ 时，$u_p = \varphi$，$c_{ij4l}^* = e_{lij}^*$，$e_{m4l}^* = -\epsilon_{ml}^*$。本节将采用这一符号。

如果引入与坐标旋转无关的 Jaumann 应力

$$\sigma_{kl}^{J} = \sigma_{kl} - \frac{1}{2}(u_{k,m} - u_{m,k})\sigma_{ml} - \frac{1}{2}(u_{l,m} - u_{m,l})\sigma_{mk} \tag{9-72a}$$

按照 1.3 节，通过变换，式(9-70)和(9-71)还可表成

$$\left[\sigma_{ij}^{J} + \frac{1}{2}(u_{i,m} - u_{m,i})\sigma_{mj}^0 + \frac{1}{2}(u_{j,m} - u_{m,j})\sigma_{mi}^0 + \sigma_{ij}^0 u_{k,k} + \frac{1}{2}\hat{\varepsilon}_{jsn}\hat{\varepsilon}_{kpm}u_{m,n}u_{p,s}\sigma_{ki}^0\right]_{,i} + f_j = \rho\ddot{u}_j$$
$$\left(D_i - u_{i,k}D_k^0 + u_{k,k}D_i^0 + \frac{1}{2}\hat{\varepsilon}_{isn}\hat{\varepsilon}_{kpm}u_{m,n}u_{p,s}D_k^0\right)_{,i} = 0$$
$$\left[\sigma_{ij}^{J} + \frac{1}{2}(u_{i,m} - u_{m,i})\sigma_{mj}^0 + \frac{1}{2}(u_{j,m} - u_{m,j})\sigma_{mi}^0\right]n_j + \sigma_{ij}^0(u_{r,m}n_r n_m n_j - u_{r,j}n_r) = T_i$$
$$D_i n_i + D_i^0(u_{r,m}n_r n_m n_j - u_{r,j}n_r) = -\sigma \tag{9-72b}$$

式中$\hat{\varepsilon}_{jsn}$是置换符号。

9.4.2 传递矩阵方法

对于多层结构，传递矩阵方法是一种行之有效的方法[139～143]。图 9-9 表示除基底和空气层外还有两层的层状结构，其中第一层厚 h_1，第二层厚 h_2，$h_1+h_2=h$，都位于 $x_1<0$ 的区域，

基底位于 $x_1>0$ 的区域，并记为 0 层，基底和第一层的界面为 $x_3=0$；第一层和第二层的界面为 $x_1=-h_1$。为了更精确地分析，图 9-10 又把每一层分为若干子层，其中第一层分为 M 层，分别记为 1，2，…，M 层；第二层又分为 $N-M$ 层，分别记为 $M+1$，$M+2$，…，N 层。空气区域记为 $N+1$ 层。空气和第二层的界面为 $x_1=-h$。由于本节中讨论的问题过于复杂，所以保留了原始文章中的记号。

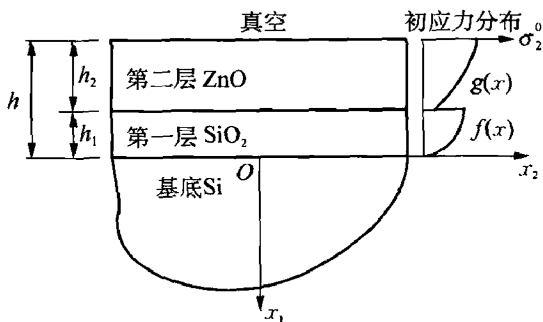


图 9-9　用于表面波的三层层状结构

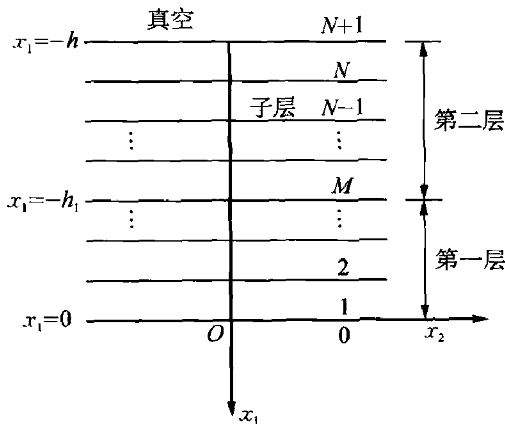


图 9-10　用于层状结构传递矩阵法的子层划分方法

传递矩阵的基本方法是利用层的界面间的广义位移和应力的连续性，把任一 m 层中的广义位移和应力通过传递矩阵，用其下面一层，即第 $m-1$ 层的量表示；从 0 到 $N+1$ 层连续应用传递矩阵法，我们便得到从第一层的界面到最后一层界面的广义位移和应力的相连续的传递矩阵；再引入基底和空气在无穷远处的边界条件后，便得到求解问题必需的方程。

在建立传递矩阵时，将视情况选用部分广义应力和部分广义位移作为混合独立变量，即所谓状态空间法，以便得到易于求解的方程组。按式(9-70)中的第一式，不计体积力时，在每一子层中有

$$\sigma_{i1,1}^{*}=\rho_0\ddot{u}_i-\sigma_{i2,2}^{*}-\sigma_{i3,3}^{*}-u_{i,jk}\sigma_{jk}^{0}-u_{i,k}\sigma_{jk,j}^{0} \tag{9-73}$$

设入射波位于 x_2x_3 平面，则广义位移 $U_p(p=1,2,3,4)$ 的解可表成

$$U_p=A_p(x_1)\exp[\mathrm{i}(k_2x_2+k_3x_3-\omega t)]=A_p(x_1)\exp[\mathrm{i}(k_\alpha x_\alpha-\omega t)],\ \alpha=2,3 \tag{9-74}$$

把式(9-74)和(9-71)代入(9-73)，得

$$\sigma_{i1,1}^{*}=[-\rho_0\omega^2A_i-\mathrm{i}k_\beta(c_{i\beta p1}^{*}A_{p,1}+\mathrm{i}k_\gamma c_{i\beta p\gamma}^{*}A_p)-\sigma_{11}^{0}A_{i,11}-2\mathrm{i}k_\gamma\sigma_{1\gamma}^{0}A_{i,1}+ k_\beta k_\gamma\sigma_{\beta\gamma}^{0}A_i-\sigma_{j1,j}^{0}A_{i,1}-\mathrm{i}k_\beta\sigma_{j\beta,j}^{0}A_i]\exp[\mathrm{i}(k_\alpha x_\alpha-\omega t)] \tag{9-75}$$

通常层间应力分量 σ_{11}^0，σ_{12}^0，σ_{13}^0 很小，可以略去。若再令

$$\sigma_{ij}^{*}=\tilde{\sigma}_{ij}(x_1)\exp[\mathrm{i}(k_\alpha x_\alpha-\omega t)],\qquad D_i=T_{i+6}(x_1)\exp[\mathrm{i}(k_\alpha x_\alpha-\omega t)] \tag{9-76}$$

则式(9-75)可以改写成

$$\tilde{\sigma}_{i1,1} + \mathrm{i}k_\beta c^*_{i\beta p1} A_{p,1} + \sigma^0_{j1,j} A_{i,1} = (-\rho_0\omega^2 + k_\beta k_\gamma \sigma^0_{\beta\gamma} - \mathrm{i}k_\beta \sigma^0_{j\beta,j}) A_i + k_\beta k_\gamma c^*_{i\beta p\gamma} A_p \tag{9-77a}$$

式(9－70)中的第二式和(9－71)可类似地写成

$$\begin{gathered} T_{7,1} + \mathrm{i}k_\beta e^*_{\beta p1} A_{p,1} = k_\beta k_\gamma e^*_{\beta p\gamma} A_p \\ c^*_{1jp1} A_{p,1} = \tilde{\sigma}_{j1} - \mathrm{i}k_\beta c^*_{1jp\beta} A_p, \qquad e^*_{1p1} A_{p,1} = T_7 - \mathrm{i}k_\beta e^*_{1p\beta} A_p \end{gathered} \tag{9-77b}$$

为了把式(9－77)表成矩阵形式,引入

$$\sigma_n = T_n(x_1)\exp[\mathrm{i}(k_\alpha x_\alpha - \omega t)],\ n = 1,\ 2,\ \cdots,\ 6 \tag{9-78}$$

按 Voigt 符号,式中 $\sigma_n(n = 1, 2, \cdots, 6)$ 代表 σ_{11}, σ_{22}, σ_{33}, σ_{32}, σ_{31}, σ_{12},而当 $i = 1, 2, 3$ 时,则以 T_1, T_6, T_5 代替 $\tilde{\sigma}_{i1}$。对第 m 层引入 8 维状态空间的状态矢量

$$\boldsymbol{v}_m(x_1) = [A_{1m},\ A_{2m},\ A_{3m},\ A_{4m},\ T_{1m},\ T_{6m},\ T_{5m},\ T_{7m}]^{\mathrm{T}} \tag{9-79}$$

式中 A_{1m}, A_{2m}, A_{3m} 分别是位移 u_1, u_2, u_3 的振幅,A_{4m} 是电势 φ 的振幅,T_{1m}, T_{6m}, T_{5m} 分别是应力分量 σ_{11}, σ_{21}, σ_{31} 的振幅,T_{7m} 是电位移 D_1 的振幅。式(9－79)可在 8 维状态空间用下列方程表示

$$\left[\boldsymbol{B}_m(x_1)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_1} - \boldsymbol{F}_m(x_1)\right]\boldsymbol{v}_m(x_1) = \boldsymbol{0}, \quad 或 \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_1} - \boldsymbol{B}_m^{-1}(x_1)\boldsymbol{F}_m(x_1)\right]\boldsymbol{v}_m(x_1) = \boldsymbol{0} \tag{9-80}$$

式中 $\boldsymbol{B}_m^{-1}(x_1)\boldsymbol{F}_m(x_1)$ 是第 m 层的状态矩阵,它们为

$$\boldsymbol{B}_m = \begin{vmatrix} B_m(11) & \mathrm{i}k_\beta c^*_{1\beta21} & \mathrm{i}k_\beta c^*_{1\beta31} & \mathrm{i}k_\beta c^*_{1\beta41} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \mathrm{i}k_\beta c^*_{2\beta11} & B_m(22) & \mathrm{i}k_\beta c^*_{2\beta31} & \mathrm{i}k_\beta c^*_{2\beta41} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \mathrm{i}k_\beta c^*_{3\beta11} & \mathrm{i}k_\beta c^*_{3\beta21} & B_m(33) & \mathrm{i}k_\beta c^*_{3\beta41} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \mathrm{i}k_\beta e^*_{\beta11} & \mathrm{i}k_\beta e^*_{\beta21} & \mathrm{i}k_\beta e^*_{\beta31} & \mathrm{i}k_\beta e^*_{\beta41} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ c^*_{1111} & c^*_{1121} & c^*_{1131} & c^*_{1141} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c^*_{1211} & c^*_{1221} & c^*_{1231} & c^*_{1241} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c^*_{1311} & c^*_{1321} & c^*_{1331} & c^*_{1341} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e^*_{111} & e^*_{121} & e^*_{131} & e^*_{141} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \tag{9-81}$$

$$B_m(11) = \sigma^0_{j1,j} + \mathrm{i}k_\beta c^*_{1\beta11}, \quad B_m(22) = \sigma^0_{j1,j} + \mathrm{i}k_\beta c^*_{2\beta21}, \quad B_m(33) = \sigma^0_{j1,j} + \mathrm{i}k_\beta c^*_{3\beta31}$$

和

$$\boldsymbol{F}_m = \begin{vmatrix} F_m(11) & k_\beta k_\gamma c^*_{1\beta2\gamma} & k_\beta k_\gamma c^*_{1\beta3\gamma} & k_\beta k_\gamma c^*_{1\beta4\gamma} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_\beta k_\gamma c^*_{2\beta1\gamma} & F_m(22) & k_\beta k_\gamma c^*_{2\beta3\gamma} & k_\beta k_\gamma c^*_{2\beta4\gamma} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_\beta k_\gamma c^*_{3\beta1\gamma} & k_\beta k_\gamma c^*_{3\beta2\gamma} & F_m(33) & k_\beta k_\gamma c^*_{3\beta4\gamma} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_\beta k_\gamma e^*_{\beta1\gamma} & k_\beta k_\gamma e^*_{\beta2\gamma} & k_\beta k_\gamma e^*_{\beta3\gamma} & k_\beta k_\gamma e^*_{\beta4\gamma} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i}k_\beta c^*_{111\beta} & -\mathrm{i}k_\beta c^*_{112\beta} & -\mathrm{i}k_\beta c^*_{113\beta} & -\mathrm{i}k_\beta c^*_{114\beta} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i}k_\beta c^*_{121\beta} & -\mathrm{i}k_\beta c^*_{122\beta} & -\mathrm{i}k_\beta c^*_{123\beta} & -\mathrm{i}k_\beta c^*_{124\beta} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i}k_\beta c^*_{131\beta} & -\mathrm{i}k_\beta c^*_{132\beta} & -\mathrm{i}k_\beta c^*_{133\beta} & -\mathrm{i}k_\beta c^*_{134\beta} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\mathrm{i}k_\beta e^*_{11\beta} & -\mathrm{i}k_\beta e^*_{12\beta} & -\mathrm{i}k_\beta e^*_{13\beta} & -\mathrm{i}k_\beta e^*_{14\beta} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$F_m(11) = -\rho_0\omega^2 + k_\beta k_\gamma \sigma^0_{\beta\gamma} - \mathrm{i}k_\beta \sigma^0_{j\beta,j} + k_\beta k_\gamma c^*_{1\beta 1\gamma}$$
$$F_m(22) = -\rho_0\omega^2 + k_\beta k_\gamma \sigma^0_{\beta\gamma} - \mathrm{i}k_\beta \sigma^0_{j\beta,j} + k_\beta k_\gamma c^*_{2\beta 2\gamma} \tag{9-82}$$
$$F_m(33) = -\rho_0\omega^2 + k_\beta k_\gamma \sigma^0_{\beta\gamma} - \mathrm{i}k_\beta \sigma^0_{j\beta,j} + k_\beta k_\gamma c^*_{3\beta 3\gamma}$$

式(9-80)易于求解,其解为

$$\boldsymbol{v}_m(x_1) = \boldsymbol{Q}_m\boldsymbol{R}_m\boldsymbol{a}_m,\ \boldsymbol{R}_m = \mathrm{diag}[\exp(b_{1m}x_1),\ \exp(b_{2m}x_1),\ \cdots,\ \exp(b_{8m}x_1)]$$
$$\boldsymbol{Q}_m = [h_{1m},\ h_{2m},\ \cdots,\ h_{8m}],\ \boldsymbol{a}_m = [a_{1m},\ a_{2m},\ \cdots,\ a_{8m}]^{\mathrm{T}} \tag{9-83}$$

式中 b_{jm} 和 h_{jm} 分别为状态矩阵的本征值和本征矢量,a_{jm} 为子层 m 中的待定常系数。子层 m 上边界的广义应力和广义位移可以通过传递矩阵 $\boldsymbol{P}_m(x_{1m}-d_m,\ x_{1m})$ 和下边界的量连续起来

$$\boldsymbol{v}_m(x_{1m}-d_m) = \boldsymbol{P}_m(x_{1m}-d_m,\ x_{1m})\,\boldsymbol{v}_m(x_{1m})$$
$$\boldsymbol{P}_m(x_{1m}-d_m,\ x_{1m}) = \boldsymbol{Q}_m\boldsymbol{R}_m(-d_m)\boldsymbol{Q}_m^{-1} \tag{9-84}$$

式中 x_{1m} 是子层 m 下边界的坐标,d_m 是子层 m 的厚度。利用传递矩阵的基本关系可以得到

$$\boldsymbol{P}(x_1',\ x_1) = \boldsymbol{P}(x_1',\ x_1'')\boldsymbol{P}(x_1'',\ x_1) \tag{9-85}$$

由此导出

$$\boldsymbol{P}(-h,\ 0) = \prod_{m-1}^{N}\boldsymbol{P}_m(x_{1m}-d_m,\ x_{1m}),\quad \boldsymbol{v}_N(-h) = \boldsymbol{P}(-h,\ 0)\,\boldsymbol{v}_0(0) \tag{9-86}$$

式中 $\boldsymbol{v}_N(-h)$ 和 $\boldsymbol{v}_1(0)$ 分别表示层状结构在上界面和下界面上的状态矢量。

9.4.3 Love 波在层状压电介质中的传播

图 9-9 表示在基底上有两个压电介质薄层:SiO_2 沉积在基底 Si 上,ZnO 沉积在 SiO_2 上。SiO_2 和 Si 是各向同性弹性材料,ZnO 是横观各向同性压电材料,设极化沿 x_3 方向。设偏应力只有分量 $\sigma^0_{33}(x_1)$ 和 $\sigma^0_{22}(x_1)$,其余偏应力分量均为零。由于 Love 波是横向剪切表面波,所以只有 $u_3(x_1,\ x_2,\ t)$ 和 $\varphi(x_1,\ x_2,\ t)$ 不为零;又设 Love 波沿 x_2 的正方向传播,所以只有 $k_2 = k$ 不为零。从而对于 Love 波,式(9-79)、(9-81)和(9-82)分别简化为

$$\boldsymbol{v}_m(x_3) = [A_{3m},\ A_{4m},\ T_{5m},\ T_{7m}]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{B}_m = \begin{bmatrix} \mathrm{i}kc^*_{45} & \mathrm{i}ke^*_{14} & 1 & 0 \\ \mathrm{i}ke^*_{25} & -\mathrm{i}k\epsilon^*_{21} & 0 & 1 \\ c^*_{55} & e^*_{15} & 0 & 0 \\ e^*_{15} & -\epsilon^*_{11} & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad \boldsymbol{F}_m = \begin{bmatrix} -\rho_0\omega^2 + (c^*_{44}+\sigma^0_{22})k^2 & e^*_{24}k^2 & 0 & 0 \\ e^*_{24}k^2 & -\epsilon^*_{22}k^2 & 0 & 0 \\ -\mathrm{i}kc^*_{54} & -\mathrm{i}ke^*_{25} & 1 & 0 \\ -\mathrm{i}ke^*_{14} & \mathrm{i}k\epsilon^*_{12} & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{9-87}$$

式中

$$c^*_{44} = C_{3232} + C_{3232mn}u^0_{m,n} + 2C_{23n2}u^0_{3,n},\ c^*_{45} = C_{3231} + C_{32n1}u^0_{3,n} + 2C_{3n31}u^0_{2,n}$$
$$c^*_{54} = C_{1332} + C_{1332mn}u^0_{m,n} + C_{1331}u^0_{3,2},\ c^*_{55} = C_{1313} + 2C_{13n3}u^0_{1,n} + C_{1331mn}u^0_{m,n}$$
$$e^*_{14} = e_{132} + e_{13l}u^0_{2,l} + e_{132mn}u^0_{m,n},\ e^*_{15} = e_{113} + e_{131mn}u^0_{m,n}$$

$$e_{24}^{*}=e_{232}+e_{241l}u_{1,l}^{0}+e_{241mn}u_{m,n}^{0},\quad e_{25}^{*}=e_{213}+e_{231l}u_{1,l}^{0}+e_{231mn}u_{m,n}^{0}$$
$$\epsilon_{11}^{*}=\epsilon_{11}+l_{11mn}u_{m,n}^{0},\quad \epsilon_{12}^{*}=\epsilon_{12}+l_{12mn}u_{m,n}^{0},\quad \epsilon_{21}^{*}=\epsilon_{21}+l_{21mn}u_{m,n}^{0},\quad \epsilon_{22}^{*}=\epsilon_{22}+l_{22mn}u_{m,n}^{0} \tag{9-88}$$

对于 ZnO 和 SiO_2，$c_{45}^{*}=c_{54}^{*}=e_{14}^{*}=e_{25}^{*}=\epsilon_{12}^{*}=\epsilon_{21}^{*}=0$，所以有

$$\boldsymbol{B}_m=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&0&0&1\\c_{55}^{*}&e_{15}^{*}&0&0\\e_{15}^{*}&-\epsilon_{11}^{*}&0&0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{F}_m=\begin{bmatrix}-\rho_0\omega^2+(c_{44}^{*}+\sigma_{22}^{0})k^2&e_{24}^{*}k^2&0&0\\e_{24}^{*}k^2&-\epsilon_{22}^{*}k^2&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} \tag{9-89}$$

对于 $6mm$ 类的陶瓷，有 $C_{44}=C_{55}$，$e_{15}=e_{24}$，$\epsilon_{11}=\epsilon_{22}$，从而 c_{44}^{*} 和 c_{55}^{*}，e_{15}^{*} 和 e_{24}^{*}，ϵ_{11}^{*} 和 ϵ_{22}^{*} 的差别可以略去，此时 $\boldsymbol{B}_m^{-1}(x_1)\boldsymbol{F}_m(x_1)$ 的本征值可求得为

$$\begin{gathered}b_{1m,2m}=\pm k,\quad b_{3m,4m}=\pm kq_m,\ q_m=\sqrt{1-[(\rho c^2-\sigma_{22}^{0})/\bar{c}_{55}]}\\ \bar{c}_{55}=c_{55}^{*}+(e_{15}^{*})^2/\epsilon_{11}^{*},\quad c=\omega/k\end{gathered} \tag{9-90}$$

式中 c 是相速度。对应于 4 个本征值的 4 个本征矢量组成矩阵 $\boldsymbol{Q}_m$

$$\boldsymbol{Q}_m=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&1&e_{15}^{*}/\epsilon_{11}^{*}&e_{15}^{*}/\epsilon_{11}^{*}\\e_{15}^{*}k&-e_{15}^{*}k&\bar{c}_{55}q_mk&-\bar{c}_{55}q_mk\\-\epsilon_{11}^{*}k&\epsilon_{11}^{*}k&0&0\end{bmatrix} \tag{9-91}$$

把式(9-90)和(9-91)代入(9-83)，便得

$$\boldsymbol{v}_m(x_1)=\begin{bmatrix}0&0&1&1\\1&1&e_{15}^{*}/\epsilon_{11}^{*}&e_{15}^{*}/\epsilon_{11}^{*}\\e_{15}^{*}k&-e_{15}^{*}k&\bar{c}_{55}q_mk&-\bar{c}_{55}q_mk\\-\epsilon_{11}^{*}k&\epsilon_{11}^{*}k&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{kx_{1m}}&0&0&0\\0&e^{-kx_{1m}}&0&0\\0&0&e^{kq_mx_{1m}}&0\\0&0&0&e^{-kq_mx_{1m}}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}a_{1m}\\a_{2m}\\a_{3m}\\a_{4m}\end{Bmatrix} \tag{9-92}$$

按式(9-84)，子层 m 的传递矩阵为

$$\boldsymbol{P}_m(x_{1m}-d_m,\ x_{1m})=$$

$$\begin{bmatrix}\cosh(kq_md_m)&0&-\dfrac{\sinh(kq_md_m)}{\bar{c}_{55}q_mk}&-\dfrac{e_{15}^{*}\sinh(kq_md_m)}{\bar{c}_{55}\epsilon_{11}^{*}q_mk}\\P(21)&\cosh(kd_m)&-\dfrac{e_{15}^{*}\sinh(kq_md_m)}{\bar{c}_{55}\epsilon_{11}^{*}q_mk}&P(24)\\P(31)&-e_{15}^{*}k\sinh(kd_m)&\cosh(kq_md_m)&P(34)\\-e_{15}^{*}k\sinh(kd_m)&\epsilon_{11}^{*}k\sinh(kd_m)&0&\cosh(kd_m)\end{bmatrix}$$

$$P(21)=\frac{e_{15}^{*}}{\epsilon_{11}^{*}}[\cosh(kq_md_m)-\cosh(kd_m)],\quad P(24)=\frac{\sinh(kd_m)}{\epsilon_{11}^{*}k}-\frac{e_{15}^{*2}\sinh(kq_md_m)}{\bar{c}_{55}\epsilon_{11}^{*2}q_mk}$$

$$P(31)=-\bar{c}_{55}q_mk\sinh(kq_md_m)+\frac{e_{15}^{*2}\sinh(kd_m)}{\epsilon_{11}^{*}}$$

$$P(34)=-\left(\frac{e_{15}^{*}}{\epsilon_{11}^{*}}\right)\cosh(kd_m)+\left(\frac{e_{15}^{*}}{\epsilon_{11}^{*}}\right)\cosh(kq_md_m) \tag{9-93}$$

因为 Love 波局限于薄层和基底界面附近，在基底中随 x_1 的增加而衰减，所以在基底中有

$$\boldsymbol{v}_0(x_1) = \boldsymbol{Q}_0[0,\ a_{20}e^{b_{20}x_1},\ 0,\ a_{40}e^{b_{40}x_1}]^{\mathrm{T}} \tag{9-94}$$

把基底的材料常数代入式(9-91)便可得 $\boldsymbol{Q}_0$。在 $x_1 = 0$ 处有

$$\boldsymbol{v}_0(x_1) = \boldsymbol{Q}_0[0,\ a_{20},\ 0,\ a_{40}]^{\mathrm{T}} \tag{9-95}$$

在 $x_1 < -h$ 的空气中的电势 φ_{N+1} 和电位移 $D_{1(N+1)}$ 可以写成

$$\varphi_{N+1}(x_1,\ t) = a_{N+1}\exp(kx_1)\exp[\mathrm{i}(k_\alpha x_\alpha - \omega t)],\quad D_{1(N+1)} = -\epsilon_0\varphi_{N+1,1} \tag{9-96}$$

式中 ϵ_0 是空气中的介电常数，a_{N+1} 是待定常数。

在 $x_1 = -h$ 和 $x_1 = 0$ 的力学连接条件分别为

$$\begin{aligned} &\sigma_{13} = 0, x_1 = -h \\ &\sigma_{13}^+ = \sigma_{13}^-,\quad u_3^+ = u_3^-, x_1 = 0 \end{aligned} \tag{9-97}$$

在空气和薄层间的电学连接条件通常讨论两种情况：电学短路（界面为无刚性的电极）和电学开路，即

$$\begin{aligned} &\varphi_N = \varphi_{N+1},\quad D_{1(N)} = D_{1(N+1)}, x_1 = -h\ (\text{电学开路}) \\ &\varphi_N = 0, x_1 = -h\ (\text{电学短路}) \end{aligned} \tag{9-98a}$$

基底和薄层间的电学连接条件为

$$D_1^+ = D_1^-,\quad \varphi^+ = \varphi^-, x_1 = 0 \tag{9-98b}$$

状态矢量 $\boldsymbol{v}(x_1)$ 在 $x_1 = 0$ 的连续性条件要求

$$\boldsymbol{v}_0(x_1) = \boldsymbol{v}_1(x_1),\ x_1 = 0 \tag{9-99}$$

按式(9-86)、(9-95)和(9-99)，状态矢量 $\boldsymbol{v}(x_1)$ 在 $x_1 = -h$ 的连续性条件要求

$$\boldsymbol{v}_N(-h) = \boldsymbol{P}(-h,\ 0)\,\boldsymbol{v}_0(0) = \boldsymbol{M}[0,\ a_{20},\ 0,\ a_{40}]^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{M} = \prod_{m=1}^{N}\boldsymbol{P}_m(x_{1m} - d_m,\ x_{1m})\boldsymbol{Q}_0 \tag{9-100}$$

则对于电学开路的情形，可得

$$\begin{Bmatrix} A_{3N} \\ A_{4N} \\ T_{5N} \\ T_{7N} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} & M_{14} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} & M_{24} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} & M_{34} \\ M_{41} & M_{42} & M_{43} & M_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ a_{20} \\ 0 \\ a_{40} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_{3(N+1)} \\ a_{N+1}\exp(-kh) \\ 0 \\ -\epsilon_0 a_{N+1}k\exp(-kh) \end{Bmatrix} \tag{9-101}$$

上式可简化为

$$\begin{Bmatrix} A_{4N} \\ T_{5N} \\ T_{7N} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{22} & M_{24} \\ M_{32} & M_{34} \\ M_{42} & M_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{20} \\ a_{40} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \exp(-kh) \\ 0 \\ -\epsilon_0 k\exp(-kh) \end{Bmatrix} a_{N+1}$$

或改写为

$$\begin{bmatrix} M_{22} & M_{24} & -\exp(-kh) \\ M_{32} & M_{34} & 0 \\ M_{42} & M_{44} & \epsilon_0 k\exp(-kh) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{20} \\ a_{40} \\ a_{N+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{9-102}$$

要 a_{20}，a_{40}，a_{N+1} 有非零解，必须其前的系数行列式为零，由此得到电学开路情况下的确定相速度 c 的方程

$$(M_{42} + \epsilon_0 kM_{22})M_{34} - (M_{44} + \epsilon_0 kM_{24})M_{32} = 0 \tag{9-103}$$

类似地，可得电学短路情况下确定相速度 c 的方程为

$$\begin{Bmatrix} A_{4N} \\ T_{5N} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{22} & M_{24} \\ M_{32} & M_{34} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_{20} \\ a_{40} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

或

$$M_{22}M_{34} - M_{24}M_{32} = 0 \tag{9-104}$$

讨论层状结构中 Love 波的传播有许多论文，如文献[144，145]。

9.4.4 偏应力的分布

假设基底中没有偏应力，即 $x_1 = 0$ 处没有偏应力，而层中偏应力的分布在 $x_1 = -h_1$ 处须服从界面连续条件，位移连续要求 u_2^0，u_3^0 连续，这等价于

$$\varepsilon_{2\text{ZnO}}^0 = \varepsilon_{2\text{SiO}_2}^0 = \varepsilon_2^0, \quad \varepsilon_{3\text{ZnO}}^0 = \varepsilon_{3\text{SiO}_2}^0 = \varepsilon_3^0, \quad \varepsilon_{23\text{ZnO}}^0 = \varepsilon_{23\text{SiO}_2}^0 = \varepsilon_{23}^0, \; x_1 = -h_1 \tag{9-105}$$

由于假设 σ_{11}^0，σ_{12}^0，σ_{13}^0 很小，所以层间应力连续条件自动满足。由本构方程得到

$$\begin{aligned} &\sigma_{1\text{ZnO}}^0 = C_{11}\varepsilon_{1\text{ZnO}}^0 + C_{12}\varepsilon_2^0 + C_{13}\varepsilon_3^0, \quad \sigma_{2\text{ZnO}}^0 = C_{12}\varepsilon_{1\text{ZnO}}^0 + C_{11}\varepsilon_2^0 + C_{13}\varepsilon_3^0 \\ &\sigma_{3\text{ZnO}}^0 = C_{13}\varepsilon_{1\text{ZnO}}^0 + C_{13}\varepsilon_2^0 + C_{33}\varepsilon_3^0, \quad E\varepsilon_2^0 = \sigma_{2\text{SiO}_2}^0 - \nu\sigma_{3\text{SiO}_2}^0, \quad E\varepsilon_3^0 = \sigma_{3\text{SiO}_2}^0 - \nu\sigma_{2\text{SiO}_2}^0 \end{aligned} \tag{9-106}$$

式中 C_{11}，C_{12}，C_{13}，C_{33} 是 ZnO 的弹性常数，E，ν 是 SiO_2 的弹性常数。由此推出在 $x_1 = -h_1$ 处有

$$\sigma_{2\text{ZnO}}^0 = \frac{C_{11}^2 - C_{12}^2 - \nu C_{13}(C_{11} - C_{12})}{EC_{11}}\sigma_{2\text{SiO}_2}^0 + \frac{C_{13}(C_{11} - C_{12}) - \nu(C_{11}^2 - C_{12}^2)}{EC_{11}}\sigma_{3\text{SiO}_2}^0 \tag{9-107}$$

类似地可推出 $\sigma_{3\text{SiO}_2}^0$，但下面并不用，所以略去。进一步假设偏应力 $\sigma_{2\text{SiO}_2}^0$，$\sigma_{2\text{ZnO}}^0$ 按指数规律变化，即

$$\begin{aligned} &\sigma_{2\text{SiO}_2}^0(x_1) = \frac{e^{x_1} - 1}{e^{-h_1} - 1}\sigma'^0, \; \sigma'^0 = \sigma_{2\text{SiO}_2}^0(-h), \; -h_1 \leqslant x_1 \leqslant 0 \\ &\sigma_{2\text{ZnO}}^0(x_1) = \frac{e^{x_1} - 1}{e^{-h} - 1}\sigma^0, \; \sigma^0 = \sigma_{2\text{ZnO}}^0(-h), \; -h \leqslant x_1 \leqslant -h_1 \end{aligned} \tag{9-108}$$

为简单计，令 $\sigma_{3\text{SiO}_2}^0 = L\sigma'^0$，其中 L 是比例系数，从而得到

$$\sigma^0_{2SiO_2}(x_1)=\frac{e^{x_1}-1}{e^{h}-1}\alpha\sigma^0,\ \alpha=\frac{EC_{11}}{(1-L\nu)(C_{11}^2-C_{12}^2)+(L-\nu)C_{13}(C_{11}-C_{12})} \tag{9-109}$$

当没有偏应力时，Love 波的相速度 c 存在下列关系

$$(c_{ZnO},\ c_{SiO_2})<c<c_{Si}$$

$$c_{ZnO}=\sqrt{\frac{C_{55}+e_{15}^2}{\rho_{ZnO}}}=2\,841.5\ \frac{m}{s},\ c_{SiO_2}=\sqrt{\frac{\mu_{SiO_2}}{\rho_{SiO_2}}}=3\,765.9\ \frac{m}{s},\ c_{Si}=\sqrt{\frac{\mu_{Si}}{\rho_{Si}}}=5\,840\ \frac{m}{s} \tag{9-110}$$

式中 c_{ZnO}，c_{SiO_2}，c_{Si}分别是在无限 ZnO、SiO_2 和 Si 介质中的剪切波速。

9.4.5 数值例子

材料常数如下：

ZnO：$\rho=5\,665\ kg/m^3$，$C_{11}=209.6\ MPa$，$C_{12}=120.5\ MPa$，$C_{13}=104.6\ MPa$，$C_{44}=242.3\ MPa$；$e_{15}=-0.48\ C/m^2$，$e_{31}=-0.573\ C/m^2$，$e_{33}=1.32\ C/m^2$；$\epsilon_{11}=0.67\times10^{-10}\ F/m$，$\epsilon_{33}=0.799\times10^{-10}\ F/m$。

SiO_2：$\rho=2\,200\ kg/m^3$，$\lambda=78.5\ MPa$，$G=31.2$；$\epsilon_{11}=\epsilon_{33}=0.33\times10^{-10}\ F/m$。

Si：$\rho=2\,328\ kg/m^3$，$\lambda=165.75\ MPa$，$G=79.4$；$\epsilon_{11}=\epsilon_{33}=1.035\times10^{-10}\ F/m$。

图 9-11 表示没有偏应力时的相速度 c_0 随 kh 的变化，而 h_1 作为参数；图 9-12 表示有偏应力时的相速度 c 和 c_0 之差 $\Delta c=c-c_0$ 随 kh 的变化，而 h_1 作为参数。由图 9-11 可见，对所有的 h_1，当 $kh\to0$ 时，$c_0\to c_{Si}$；随 kh 的增加 c_0 减小。当 $kh\to\infty$ 时，若 h_1 小于 h_2 或和 h_2 同量级，则 $c_0\to c_{ZnO}$，若 $h_1\gg h_2$，则 $c_0\to c_{SiO_2}$。中间层 SiO_2 对相速度有明显的影响。由图 9-12 可见，随 kh 的增加 $\Delta c/c_0$ 也增大；当 $kh\to\infty$ 时，$\Delta c/c_0$ 趋近于水平线。由图还可看到，$h_1/h_2\to0$ 或∞的 $\Delta c/c_0$ 值小于 h_1/h_2 的中间值。

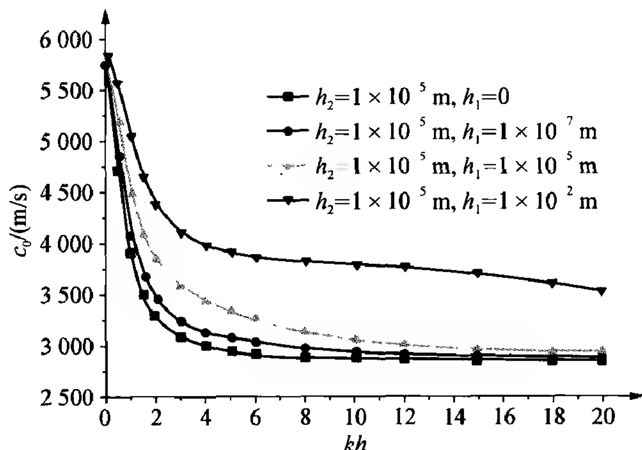


图 9-11　无初应力时的相速度 c_0 随 kh 的变化（h_1 为参数）

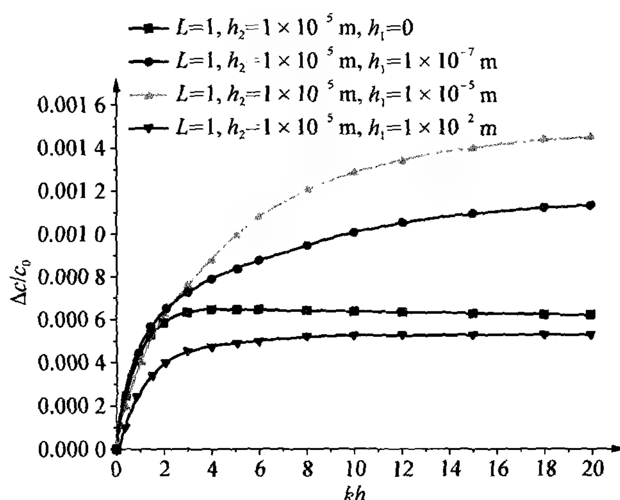


图 9-12 存在初应力时的相速度 c 与 c_0 之差随 kh 的变化(h_1 为参数)

9.5 在偏应力作用下的 B-G 波[146, 147]

9.5.1 基本方程

在非压电材料中,半无限体中不存在单纯的横向振动波,但在一定的压电晶体切片中可以存在,这便是 Bleustein 和 Gulyaev 发现的、现通称为 B-G 波。由于半无限压电介质中的 B-G 表面波的穿透深度很大,达到 10~100 个波长,使得能量不能集中在表面附近传播,限制了它的应用。改进的方法之一便是在半无限表面沉积一薄层压电体,构成薄层和基底均为压电体的层状结构。有时预先给定适当的偏应力或偏电压也有帮助。存在偏应力时的基本方程已在 9.4 节中讨论过,基本方程为式(9-70)和(9-71)。

9.5.2 层状结构中的 B-G 表面波

由于 B-G 表面波是横向剪切波,所以只有 $u_3(x_1, x_2, t)$ 和 $\varphi(x_1, x_2, t)$ 不为零(图 9-5),从而式(9-70)化为

$$
\begin{aligned}
&\sigma^*_{31,1} + \sigma^*_{32,2} + \sigma^0_{11} u_{3,11} + 2\sigma^0_{12} u_{3,12} + \sigma^0_{22} u_{3,22} = \rho_0 \ddot{u}_3 \\
&D_{1,1} + D_{2,2} = 0
\end{aligned}
\tag{9-111a}
$$

或

$$
\begin{aligned}
&(c^*_{1331} + \sigma^0_{11}) u_{3,11} + (c^*_{1332} + c^*_{2331} + 2\sigma^0_{12}) u_{3,12} + (c^*_{2332} + \sigma^0_{22}) u_{3,22} + \\
&\quad e^*_{131} \varphi_{,11} + (e^*_{132} + e^*_{231}) \varphi_{,12} + e^*_{232} \varphi_{,22} = \rho_0 \ddot{u}_3 \\
&e^*_{131} u_{3,11} + (e^*_{132} + e^*_{231}) u_{3,12} + e^*_{232} u_{3,22} - \epsilon^*_{11} \varphi_{,11} - 2\epsilon^*_{12} \varphi_{,12} - \epsilon^*_{22} \varphi_{,22} = 0
\end{aligned}
\tag{9-111b}
$$

对于 $x_1 > 0$ 的基底区域,其中的物理量在右上角标以“M”,因为设其中没有初应力,所以控制方程为

$$
\begin{aligned}
&c_{1331}^{*\mathrm{M}} u_{3,11}^{\mathrm{M}} + 2c_{1332}^{*\mathrm{M}} u_{3,12}^{\mathrm{M}} + c_{2332}^{*\mathrm{M}} u_{3,22}^{\mathrm{M}} + e_{131}^{*\mathrm{M}} \varphi_{,11}^{\mathrm{M}} + 2e_{132}^{*\mathrm{M}} \varphi_{,12}^{\mathrm{M}} + e_{232}^{*\mathrm{M}} \varphi_{,22}^{\mathrm{M}} = \rho_0 \ddot{u}_3^{\mathrm{M}} \\
&e_{131}^{*\mathrm{M}} u_{3,11}^{\mathrm{M}} + 2e_{132}^{*\mathrm{M}} u_{3,12}^{\mathrm{M}} + e_{232}^{*\mathrm{M}} u_{3,22}^{\mathrm{M}} - \epsilon_{11}^{*\mathrm{M}} \varphi_{,11}^{\mathrm{M}} - 2\epsilon_{12}^{*\mathrm{M}} \varphi_{,12}^{\mathrm{M}} - \epsilon_{22}^{*\mathrm{M}} \varphi_{,22}^{\mathrm{M}} = 0
\end{aligned}
\tag{9-112}
$$

在 $x_1 < -h$ 的空气中，电势 φ^{c} 满足 $\varphi_{,11}^{\mathrm{c}} + \varphi_{,22}^{\mathrm{c}} = 0$。

在 $x_1 = -h$ 和无穷远处的边界条件以及 $x_1 = 0$ 界面上的连接条件为

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{13}^* + \sigma_{1k}^0 u_{3,k} = 0,\ x_1 = -h \\
&\varphi = \varphi^{\mathrm{c}},\quad D_1 = D_1^{\mathrm{c}}\ (\text{电学开路});\quad \varphi = 0\ (\text{电学短路}),\ x_1 = -h \\
&u_3 = u_3^{\mathrm{M}},\quad \sigma_{13}^* = \sigma_{13}^{*\mathrm{M}},\quad \varphi = \varphi^{\mathrm{M}},\quad D_1 = D_1^{\mathrm{M}},\ x_1 = 0 \\
&u_3,\ \varphi \to 0,\ x_1 \to \infty;\quad \varphi^{\mathrm{c}} \to 0,\ x_1 \to -\infty
\end{aligned}
\tag{9-113}
$$

现设 B - G 波沿 x_2 的正向传播，故只有 $k_2 = k$ 不为零。薄层中的位移和电势可设为

$$
u_3 = \alpha_3 \exp(\mathrm{i}kbx_1)\exp[\mathrm{i}k(x_2 - ct)],\quad \varphi = \alpha_4 \exp(\mathrm{i}kbx_1)\exp[\mathrm{i}k(x_2 - ct)] \tag{9-114}
$$

把式(9 - 114)代入(9 - 111b)，便得

$$
\begin{bmatrix}
(c_{1331}^* + \sigma_{11}^0)b^2 + (c_{1332}^* + c_{2331}^* + 2\sigma_{12}^0)b + (c_{2332}^* + \sigma_{22}^0) - \rho_0 c^2 & e_{131}^* b^2 + (e_{132}^* + e_{231}^*)b + e_{232}^* \\
e_{131}^* b^2 + (e_{132}^* + e_{231}^*)b + e_{232}^* & -\epsilon_{11}^* b^2 - 2\epsilon_{12}^* b - \epsilon_{22}^*
\end{bmatrix}
\begin{Bmatrix} \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
\tag{9-115}
$$

要使 α_3，α_4 有非平凡解，其前的系数行列式必须为零，由此得到

$$
A_4 b^4 + A_3 b^3 + A_2 b^2 + A_1 b + A_0 = 0 \tag{9-116}
$$

式中 A_i 是由式(9 - 115)确定的系数，此处从略。从上式可以求出 4 个本征值 $b_p(p = 1,\ 2,\ 3,\ 4)$，进而对应每个 b_p 可求出一对本征矢量 α_3，α_4，它们的比值 β_p 是

$$
\beta_p = \frac{\alpha_4^{(p)}}{\alpha_3^{(p)}} = \frac{e_{131}^* b_p^2 + (e_{132}^* + e_{231}^*)b_p + e_{232}^*}{\epsilon_{11}^* b_p^2 + 2\epsilon_{12}^* b_p + \epsilon_{22}^*} \tag{9-117}
$$

由此得到薄层中的位移和电势为

$$
\begin{aligned}
u_3 &= \sum_{p=1}^{4} \alpha_3^{(p)} \exp(\mathrm{i}kb_p x_1)\exp[\mathrm{i}k(x_2 - ct)] \\
\varphi &= \sum_{p=1}^{4} \beta_p \alpha_3^{(p)} \exp(\mathrm{i}kb_p x_1)\exp[\mathrm{i}k(x_2 - ct)]
\end{aligned}
\tag{9-118}
$$

对于基底可类似地讨论，注意到无穷远处的条件，基底中只存在 2 个正虚部的根 $b_q^{\mathrm{M}}(q = 1,\ 2)$，因此有

$$
\begin{aligned}
u_3^{\mathrm{M}} &= \sum_{p=1}^{2} \alpha_3^{\mathrm{M}(q)} \exp(\mathrm{i}kb_q^{\mathrm{M}} x_1)\exp[\mathrm{i}k(x_2 - ct)] \\
\varphi^{\mathrm{M}} &= \sum_{p=1}^{2} \beta_q^{\mathrm{M}} \alpha_3^{\mathrm{M}(q)} \exp(\mathrm{i}kb_q^{\mathrm{M}} x_1)\exp[\mathrm{i}k(x_2 - ct)]
\end{aligned}
\tag{9-119}
$$

注意到 $x_1 = -h$ 的连接条件和无穷远处的边界条件，空气中的电势可表为

$$\varphi^{c} = \sum_{p=1}^{4} \beta_p \alpha_3^{(p)} \exp(\mathrm{i}kb_p x_1)\exp[k(x_1+h)]\exp[\mathrm{i}k(x_2-ct)] \tag{9-120}$$

把式(9-118)～(9-120)代入边界和界面连接条件，便得到含相速度的具有6个分量的矢量 $\boldsymbol{\alpha}=[\alpha_3^{(1)}, \alpha_3^{(2)}, \alpha_3^{(3)}, \alpha_3^{(4)}, \alpha_3^{M(1)}, \alpha_3^{M((1))}]^{T}$ 的6个齐次方程：

$$\boldsymbol{P\alpha}=\boldsymbol{0}, \quad [P_{ij}]\{\alpha_j\}=\{0\} \tag{9-121}$$

对于 $x_1=-h$ 界面上电学开路的情形，矩阵 $\boldsymbol{P}$ 中的元素如下：当 $j=1, 2, 3, 4$ 时，有

$$\begin{aligned}
P_{1j} &= \mathrm{i}k[(c_{1\ 331}^{*}+\sigma_{11}^{0}+e_{131}^{*}\beta_j)b_j+c_{1\ 332}^{*}+\sigma_{12}^{0}+e_{132}^{*}\beta_j]\exp(-\mathrm{i}kb_jh)\\
P_{2j} &= \mathrm{i}k[(e_{131}^{*}-\epsilon_{11}^{*}\beta_j)b_j+e_{132}^{*}-(\epsilon_{12}^{*}+\mathrm{i}\epsilon^{c})\beta_j]\exp(-\mathrm{i}kb_jh)\\
P_{3j} &= \mathrm{i}k[(c_{1\ 331}^{*}+\sigma_{11}^{0}+e_{131}^{*}\beta_j)b_j+c_{1\ 332}^{*}+\sigma_{12}^{0}+e_{132}^{*}\beta_j]\\
P_{4j} &= 1, \quad P_{5j}=\beta_j, \quad P_{6j}=\mathrm{i}k[(e_{131}^{*}-\epsilon_{11}^{*}\beta_j)b_j+e_{132}^{*}-\epsilon_{12}^{*}\beta_j]
\end{aligned} \tag{9-122a}$$

当 $j=5, 6$ 时，有

$$\begin{aligned}
&P_{1j}=0, \quad P_{2j}=0, \quad P_{3j}=-\mathrm{i}k[(c_{1\ 331}^{M*}+e_{131}^{M*}\beta_{j-4}^{M})b_{j-4}^{M}+\hat{c}_{1\ 332}^{M*}+e_{132}^{*}\beta_{j-4}^{M}]\\
&P_{4j}=-1, \quad P_{5j}=-\beta_{j-4}^{M}, \quad P_{6j}=-\mathrm{i}k[(e_{131}^{M*}-\epsilon_{11}^{M*}\beta_{j-4}^{M})b_{j-4}^{M}+e_{132}^{M*}-\epsilon_{12}^{M*}\beta_{j-4}^{M}]
\end{aligned} \tag{9-122b}$$

令其前的系数行列式为零，即

$$|\boldsymbol{P}|=0 \tag{9-123}$$

便得到确定B-G表面波的相速度 c 的方程。

对于 $x_1=-h$ 界面上电学短路的情形，式(9-121)中的第二行或(9-122)中的 P_{2j} 须更换为

$$P_{2j}=\beta_j\exp(-\mathrm{i}kb_jh), j=1, 2, 3, 4; \quad P_{2j}=0, j=5, 6 \tag{9-124}$$

B-G波存在的条件是 $c<\min(c^{L}, c^{M})$，其中 c^{L}，c^{M} 分别是在无限薄层和无限基底中的剪切波速。

9.5.3 例题

薄层和基底的材料均取为 $LiNbO_3$，但薄层的材料沿 x_3 正向极化，基底沿 x_3 负向极化。$LiNbO_3$ 的材料常数如下(Voigt形式)：

二阶弹性常数(10^{10} N/m²)：$C_{11}=20.3$, $C_{12}=5.3$, $C_{13}=7.5$, $C_{14}=0.9$, $C_{33}=2.45$, $C_{44}=6.0$。

三阶弹性常数(10^{11} N/m²)：$C_{111}=-21.2$, $C_{112}=-5.3$, $C_{113}=-5.7$, $C_{114}=2.0$, $C_{123}=-2.5$, $C_{124}=0.4$, $C_{133}=-7.8$, $C_{134}=1.5$, $C_{144}=-3.0$, $C_{155}=-6.7$, $C_{222}=-23.3$, $C_{333}=-29.6$, $C_{344}=-6.8$, $C_{444}=-0.3$。

二阶压电常数(C/m²)：$e_{15}=3.7$, $e_{22}=2.5$, $e_{31}=0.2$, $e_{33}=1.3$。

三阶压电常数(C/m²)：$e_{115}=17.1$, $e_{116}=-4.7$, $e_{125}=19.9$, $e_{126}=15.9$, $e_{135}=19.6$, $e_{136}=-0.9$, $e_{145}=20.3$, $e_{311}=14.7$, $e_{312}=13.0$, $e_{313}=-10.0$, $e_{314}=11.0$, $e_{333}=-17.3$, $e_{344}=-10.2$。

二阶介电常数(10^{-12} F/m)：　$\epsilon_{11}=\epsilon_{22}=389, \epsilon_{33}=257$。

三阶介电常数(F/V)：　$\epsilon_{111}=-2.81, \epsilon_{222}=-2.40, \epsilon_{333}=-2.91$。

电致伸缩常数(10^{-9} F/m)：　$l_{11}=1.11, l_{12}=2.19, l_{13}=2.32, l_{14}=1.51, l_{31}=0.19, l_{33}=-2,76, l_{41}=1.85, l_{44}=-1.83$。

通常偏应力较小，因而初始构形和现时构形可以不加区别。偏应力分量 σ_{11}^0，σ_{21}^0，σ_{31}^0 可以略去，偏位移和偏应力和 x_3 无关。进一般假设 $\sigma_{22}^0=\sigma_{33}^0=\text{const.}$，$\sigma_{23}^0=0$。

图 9－13 表示没有偏应力时的色散关系，即 c_0 相对 h/λ 的关系，其中 c_0 为没有偏应力时的相速度。由图可见，电学开路的相速度高于电学短路时的相速度；对于低频 $h/\lambda\to0$ 的情形，相速度趋近于半无限体时的值，即开路时趋于 4.538 km/s，短路时趋于 4.203 km/s。当 $h/\lambda>3$ 后，开路和短路两种情形，相速度均趋于 4.202 km/s。图 9－14 表示偏应力 $\sigma_{22}^0=40$ MPa 时的相速度相对变化和薄层相对厚度的关系，即 $\Delta c/c_0(\Delta c=c-c_0)$ 相对 h/λ 的关系，其中 c 为存在偏应力时的相速度。计算表明，对于考虑偏应力的低频情况，三阶常数有明显影响。

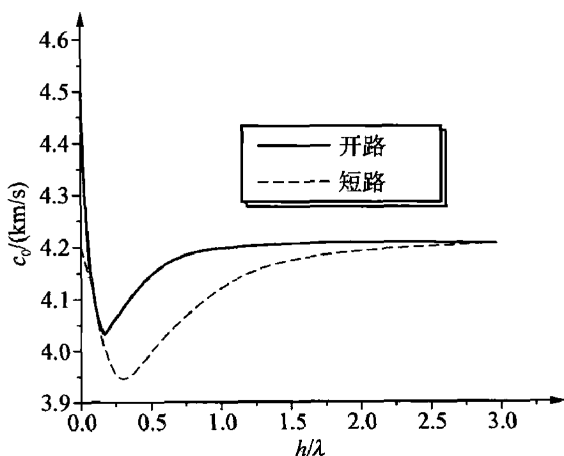


图 9－13　没有偏应力时的色散关系

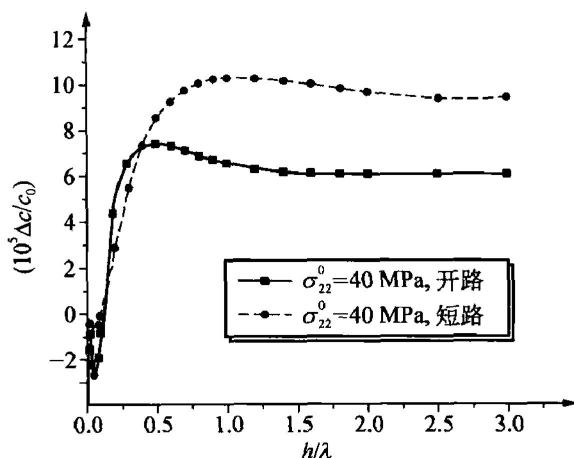


图 9－14　偏应力为 $\sigma_{22}^0=40$ MPa 时的相速度相对变化和薄层相对厚度的关系

9.6　在偏电压作用下的 Lamb 波

9.6.1　波动方程和边界条件

本节讨论横观各向同性介质中存在偏电场和初应力的 Lamb 波的传播问题。本节采用标准的 Voigt 紧缩符号，见式(1－3)。图 9－15 表示厚 h 的薄压电板，极化沿 x_3 方向，波沿 x_1 轴传播，由于板在 x_1，x_2 方向无界，故可看成平面应变问题。关于初应力和偏电场的问题，我们在 9.4 节已做过较为详细的讨论，为方便计，本节采用不带“＊”号的通常符号在初始构形中讨论。本节只讨论上表面施加均匀偏电压 V，下表面接地，因而只有偏电场分量 $E_3^0=V/h$ 作用、所有变量和 x_2 无关的简单的情况。对于

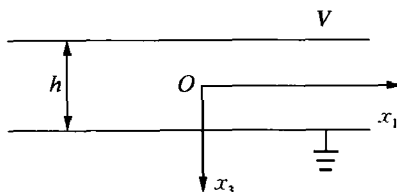


图 9－15　偏电压作用下的产生 Love 波的薄板结构

薄板，σ_3^0 可以略去。为使问题更简单一些，进一步假设使 $\sigma_2^0=0$。在上述情况下，按横观各向同性体广义应力的本构方程可求得

$$
\begin{aligned}
&\sigma_1^0 = \eta_\sigma E_3^0, \quad D_3^0 = \eta_D E_3^0 \\
&\eta_\sigma = \frac{(C_{11}-C_{12})C_{33}e_{31}+(C_{12}-C_{11})C_{13}e_{33}}{C_{12}C_{33}-C_{13}^2} \\
&\eta_D = \frac{C_{33}e_{31}^2-2C_{13}e_{31}e_{33}+C_{12}e_{33}^2}{C_{12}C_{33}-C_{13}^2}+\epsilon_{33}
\end{aligned}
\tag{9-125}
$$

对于上述偏应变不大的二维问题，按式(9-70)并仍记 σ_{ij}^* 为 σ_{ij}，在初始构形中的运动方程为

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{1,1}+\sigma_{5,3}+\sigma_1^0 u_{1,11}=\rho_0\ddot{u}_1, \quad \sigma_{5,1}+\sigma_{3,3}+\sigma_1^0 u_{3,11}=\rho_0\ddot{u}_3 \\
&D_{1,1}+D_{3,3}=0
\end{aligned}
\tag{9-126}
$$

本构方程的分量形式为

$$
\begin{aligned}
&\sigma_1 = C_{11}\varepsilon_1+C_{13}\varepsilon_3-e_{31}E_3, \quad \sigma_3 = C_{13}\varepsilon_1+C_{33}\varepsilon_3-e_{33}E_3 \\
&\sigma_5 = C_{44}\varepsilon_5-e_{15}E_1, \quad D_1 = e_{15}\varepsilon_5+\epsilon_{11}E_1, \quad D_3 = e_{31}\varepsilon_1+e_{33}\varepsilon_3+\epsilon_{33}E_3
\end{aligned}
\tag{9-127}
$$

把式(9-125)和(9-127)代入(9-126)，得

$$
\begin{aligned}
&(C_{11}+\eta_\sigma E_3^0)u_{1,11}+C_{44}u_{1,33}+(C_{13}+C_{44})u_{3,13}+(e_{31}+e_{15})\varphi_{,13}=\rho_0\ddot{u}_1 \\
&(C_{13}+C_{44})u_{1,13}+(C_{44}+\eta_\sigma E_3^0)u_{3,11}+C_{33}u_{3,33}+e_{15}\varphi_{,11}+e_{33}\varphi_{,33}=\rho_0\ddot{u}_3 \\
&(e_{31}+e_{15})u_{1,13}+e_{15}u_{3,11}+e_{33}u_{3,33}-\epsilon_{11}\varphi_{,11}-\epsilon_{33}\varphi_{,33}=0
\end{aligned}
\tag{9-128}
$$

9.6.2 Lamb 波的反对称解[148]

Lamb 波可以存在对称和反对称解。先讨论反对称解，设为

$$
\begin{aligned}
&u_1 = B_1\sin(kbx_3)\exp[\mathrm{i}k(x_1-ct)], \quad u_3 = B_2\cos(kbx_3)\exp[\mathrm{i}k(x_1-ct)] \\
&\varphi = B_3\cos(kbx_3)\exp[\mathrm{i}k(x_1-ct)]
\end{aligned}
\tag{9-129}
$$

式中 B_i 为待定系数。把上式代入(9-128)，便得

$$
\begin{aligned}
&(C_{11}-\rho_0c^2+C_{44}b^2+\eta_\sigma E_3^0)B_1+(C_{13}+C_{44})\mathrm{i}bB_2+(e_{31}+e_{15})\mathrm{i}bB_3=0 \\
&(C_{13}+C_{44})\mathrm{i}bB_1-(C_{44}-\rho_0c^2+C_{33}b^2+\eta_\sigma E_3^0)B_2+(e_{15}+e_{33}b^2)B_3=0 \\
&(e_{31}+e_{15})\mathrm{i}bB_1-(e_{15}+e_{33}b^2)B_2+(\epsilon_{11}+\epsilon_{33}b^2)B_3=0
\end{aligned}
\tag{9-130}
$$

为得到 B_1，B_2，B_3 的非平凡解，其前的系数行列式必须为零，由此得到含待定相速度 c 的 b^2 的三次方程

$$
A_1(c)b^6+A_2(c)b^4+A_3(c)b^2+A_4(c)=0 \tag{9-131}
$$

给定 c 和给定偏压 V 便可解得 b^2，有解 $\pm b$，但由式(9-129)知，b 和 $-b$ 两个解不是相互独立的，故只取其中的一个解，因此有三个 $b_l(l=1, 2, 3)$ 解。以之代入式(9-130)，得到振幅比 B_{1l}/B_{3l}，B_{2l}/B_{3l}，$l=1, 2, 3$，它们是

$$
\begin{aligned}
&B_{1l}=F_{1l}B_{3l},\quad B_{l2}=F_{2l}B_{3l}\\
&F_{1l}=\mathrm{i}b_l[(e_{31}+e_{15})(C_{44}-\rho_0c^2+C_{33}b_l^2+\eta_\sigma E_3^0)-(e_{15}+e_{33}b_l^2)(C_{13}+C_{44})]/\Delta\\
&F_{2l}=[(C_{11}-\rho_0c^2+C_{44}b^2-\eta_\sigma E_3^0)(e_{15}+e_{33}b_l^2)-(C_{13}+C_{44})(e_{31}+e_{15})b_l^2]/\Delta\\
&\Delta=(C_{13}+C_{44})^2b_l^2-(C_{11}-\rho_0c^2+C_{44}b^2-\eta_\sigma E_3^0)(C_{44}-\rho_0c^2+C_{33}b_l^2+\eta_\sigma E_3^0)
\end{aligned}
\tag{9-132}
$$

所以式(9－129)又可写成

$$
\begin{aligned}
u_1&=\sum_{l=1}^{3}F_{1l}B_{3l}\sin(kbx_3)\exp[\mathrm{i}k(x_1-ct)]\\
u_3&=\sum_{l=1}^{3}F_{2l}B_{3l}\cos(kbx_3)\exp[\mathrm{i}k(x_1-ct)]\\
\varphi&=\sum_{l=1}^{3}B_{3l}\cos(kbx_3)\exp[\mathrm{i}k(x_1-ct)]
\end{aligned}
\tag{9-133}
$$

在 $x_3=\pm h/2$ 的边界上，机械和电学闭路边界条件为

$$
\sigma_1(x_1,\pm h/2)=\sigma_5(x_1,\pm h/2)=\varphi(x_1,\pm h/2)=0 \tag{9-134}
$$

把式(9－133)代入(9－134)，可得确定待定系数 B_{31}，B_{32}，B_{33} 的 3 个齐次方程，要有非平凡解，其前的系数行列式必须为零，即

$$
[\boldsymbol{P}][\boldsymbol{B}]=\boldsymbol{0},\qquad |\boldsymbol{P}|=\boldsymbol{0} \tag{9-135}
$$

上式便是确定相速度 c 的方程。展开行列式，得

$$
\begin{aligned}
&\Pi_1\cot(\pi mb_1)\cot(\pi mb_2)+\Pi_2\cot(\pi mb_1)\cot(\pi mb_3)+\Pi_3\cot(\pi mb_2)\cot(\pi mb_3)=0\\
&m=h/\lambda,\ \Pi_1=(\mathrm{i}C_{13}F_{13}-C_{33}b_3F_{23}-e_{33}b_3)C_{44}[\mathrm{i}(F_{22}-F_{21})+b_2F_{12}-b_1F_{11}]\\
&\Pi_2=(\mathrm{i}C_{13}F_{12}-C_{33}b_2F_{22}-e_{33}b_2)C_{44}[\mathrm{i}(F_{21}-F_{23})+b_1F_{11}-b_3F_{13}]\\
&\Pi_3=(\mathrm{i}C_{13}F_{11}-C_{33}b_1F_{21}-e_{33}b_1)C_{44}[\mathrm{i}(F_{23}-F_{22})+b_3F_{13}-b_2F_{12}]
\end{aligned}
\tag{9-136}
$$

式中 m 是一个重要参数，通常在 0.01 到 3.0 之间。图 9－16 给出反对称情形的 a_0 模态有偏压时的相速度 c_{bias} 和无偏压时的相速度 c 之差 $\Delta c=c_{\text{bias}}-c$ 和偏电场之间的关系。

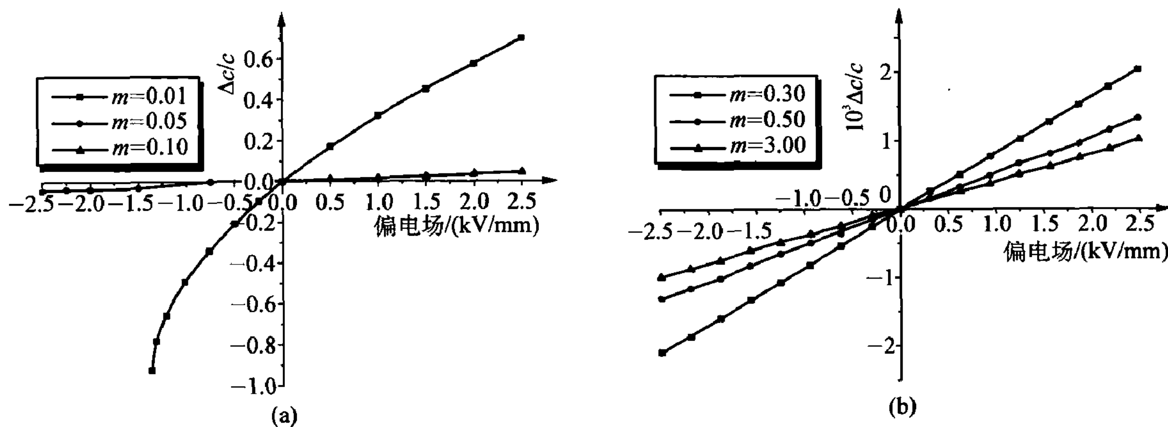


图 9－16　反对称情形的 a_0 模态的相速度差和偏电场的关系

对于电学开路情形可类似讨论。

9.6.3 Lamb 波的对称解[149]

设 Lamb 波的对称解为

$$u_1 = B_1\cos(kbx_3)\exp[ik(x_1-ct)],\quad u_3 = B_2\sin(kbx_3)\exp[ik(x_1-ct)]$$
$$\varphi = B_3\sin(kbx_3)\exp[ik(x_1-ct)] \tag{9-137}$$

把上式代入(9-128)，得

$$\begin{aligned}
&-(C_{11}-\rho_0c^2+C_{44}b^2+\eta_\sigma E_3^0)B_1+(C_{13}+C_{44})\mathrm{i}bB_2+(e_{31}+e_{15})\mathrm{i}bB_3=0\\
&(C_{13}+C_{44})\mathrm{i}bB_1+(C_{44}-\rho_0c^2+C_{33}b^2+\eta_\sigma E_3^0)B_2+(e_{15}+e_{33}b^2)B_3=0\\
&(e_{31}+e_{15})\mathrm{i}bB_1+(e_{15}+e_{33}b^2)B_2-(\epsilon_{11}+\epsilon_{33}b^2)B_3=0
\end{aligned} \tag{9-138}$$

为得到 B_1，B_2，B_3 的非平凡解，其前的系数行列式必须为零，由此得到含待定相速度 c 的 b^2 的三次方程

$$\widetilde{A}_1(c)b^6+\widetilde{A}_2(c)b^4+\widetilde{A}_3(c)b^2+\widetilde{A}_4(c)=0 \tag{9-139}$$

和前面一样，有三个 $b_l(l=1,2,3)$ 解。与之相对应，有三组振幅矢量 $\widetilde{\boldsymbol{B}}_l$ 解，且其中的两个可以表示第三个

$$\widetilde{B}_{1l}=\widetilde{F}_{1l}\widetilde{B}_{3l},\quad \widetilde{B}_{l2}=\widetilde{F}_{2l}\widetilde{B}_{3l}$$

$$\widetilde{F}_{1l}=\frac{\mathrm{i}b_l[-(e_{31}+e_{15})(C_{44}-\rho_0c^2+C_{33}b_l^2+\eta_\sigma E_3^0)+(e_{15}+e_{33}b_l^2)(C_{13}+C_{44})]}{(C_{13}+C_{44})^2b_l^2-(C_{11}-\rho_0c^2+C_{44}b^2+\eta_\sigma E_3^0)(C_{44}-\rho_0c^2+C_{33}b_l^2+\eta_\sigma E_3^0)}$$

$$\widetilde{F}_{2l}=\frac{(C_{11}-\rho_0c^2+C_{44}b^2+\eta_\sigma E_3^0)(e_{15}+e_{33}b_l^2)-(C_{13}+C_{44})(e_{31}+e_{15})b_l^2}{(C_{13}+C_{44})^2b_l^2-(C_{11}-\rho_0c^2+C_{44}b^2+\eta_\sigma E_3^0)(C_{44}-\rho_0c^2+C_{33}b_l^2+\eta_\sigma E_3^0)} \tag{9-140}$$

所以式(9-137)又可写成

$$\begin{aligned}
u_1&=\sum_{l=1}^{3}F_{1l}B_{3l}\cos(kbx_3)\exp[\mathrm{i}k(x_1-ct)]\\
u_3&=\sum_{l=1}^{3}F_{2l}B_{3l}\sin(kbx_3)\exp[\mathrm{i}k(x_1-ct)]\\
\varphi&=\sum_{l-1}^{3}B_{3l}\sin(kbx_3)\exp[\mathrm{i}k(x_1-ct)]
\end{aligned} \tag{9-141}$$

在 $x_3=\pm h/2$ 的边界上，机械和电学闭路边界条件为

$$\sigma_1(x_1,\pm h/2)=\sigma_5(x_1,\pm h/2)=\varphi(x_1,\pm h/2)=0 \tag{9-142}$$

把式(9-141)代入(9-142)，可得确定待定系数 B_{31}，B_{32}，B_{33} 的三个齐次方程，要有非平凡解，其前的系数行列式必须为零，即

$$[\boldsymbol{P}][\boldsymbol{B}]=\boldsymbol{0},\quad |\boldsymbol{P}|=\boldsymbol{0} \tag{9-143}$$

上式便是确定相速度 c 的方程。展开行列式得

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\Pi}_1\tan(\pi m b_1)\tan(\pi m b_2)+\widetilde{\Pi}_2\tan(\pi m b_1)\tan(\pi m b_3)+\widetilde{\Pi}_3\tan(\pi m b_2)\tan(\pi m b_3)=0\\
&m=h/\lambda,\quad \widetilde{\Pi}_1=(\mathrm{i}C_{13}F_{13}+C_{33}b_3F_{23}+e_{33}b_3)C_{44}[\mathrm{i}(F_{22}-F_{21})-b_2F_{12}+b_1F_{11}]\\
&\widetilde{\Pi}_2=(\mathrm{i}C_{13}F_{12}+C_{33}b_2F_{22}+e_{33}b_2)C_{44}[\mathrm{i}(F_{21}-F_{23})-b_1F_{11}+b_3F_{13}]\\
&\widetilde{\Pi}_3=(\mathrm{i}C_{13}F_{11}+C_{33}b_1F_{21}+e_{33}b_1)C_{44}[\mathrm{i}(F_{23}-F_{22})-b_3F_{13}+b_2F_{12}]
\end{aligned}
\tag{9-144}
$$

图 9-17 给出对称情形时的零阶模态和一阶模态的有偏压时的相速度 c_{bias} 和无偏压时的相速度 c 之差 $\Delta c=c_{\text{bias}}-c$ 和偏电场之间的关系。

对于电学开路情形可作类似讨论，计算表明，当 $k\to\infty$ 时，零阶模态的相速度趋于自由表面的 Rayleigh 波速。图 9-16 和 9-17 的计算稍嫌粗糙。

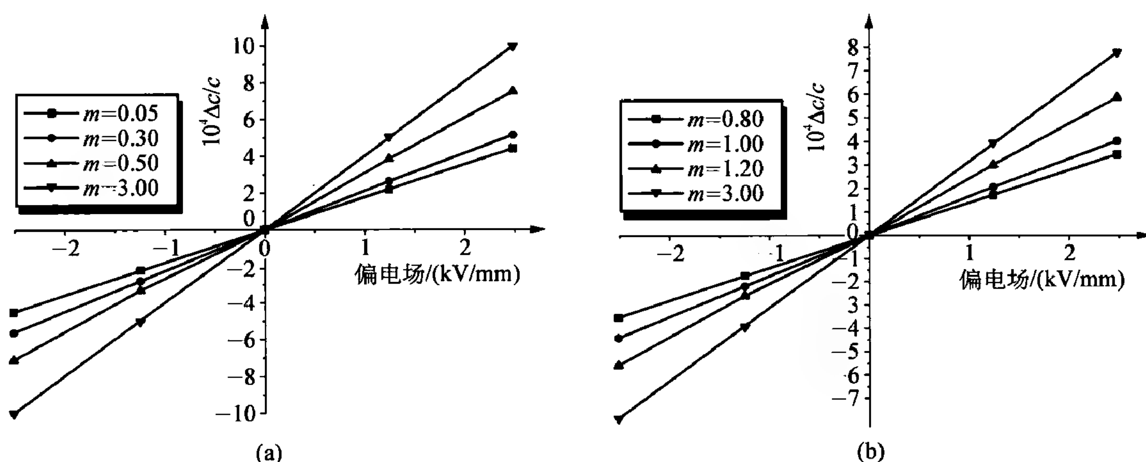


图 9-17　对称情形的相速度差和偏电场的关系
(a) 零阶模态；(b) 一阶模态

9.7　存在偏应力时的 Rayleigh 波[150]

9.7.1　问题的描述

讨论图 9-5(但图中的坐标需作变换：$x_1\to x_3$，$x_2\to x_1$，$x_3\to x_2$)所示的压电层状结构，覆盖层和基底均为横观各向同性压电陶瓷，沿 x_3 轴极化，本节讨论 c 轴取向的 $LiNbO_3$ 晶体沉积在非压电的蓝宝石基底结构中 Rayleigh 波的传播问题。$LiNbO_3$ 属 $3m$ 晶系，但在通常情况下，C_{14} 和 e_{31} 可近似取为零，因此可按 $6mm$ 晶系处理。式(9-6)中的 Γ_{12}，Γ_{23}，e_2^* 为零，从而位移 u_2 和其他分量解耦，声波分解为 Love 波和在(x_1，x_3)平面内的 u_1，u_3 与 φ 相耦合的 Rayleigh 波。通常覆盖层厚度 h 约几微米，基底厚度远大于覆盖层，因而基底可视为半无限体。覆盖层和基底在界面 $x_3=0$ 处理想连接。基本方程如式(9-70)所示，覆盖层内用位移表示的运动方程和电位移方程(略去材料常数上方的上标)为

$$
C_{ijkl}u_{k,li}+e_{kij}\varphi_{,ki}+\sigma_{ik}^0u_{j,ki}=\rho\ddot{u}_j,\qquad e_{ikl}u_{k,li}-\epsilon_{ik}\varphi_{,ik}=0 \tag{9-145}
$$

基底中不存在偏应力，其中的量用字母上方带“M”的量表示，其中的基本方程为

$$C^{M}_{ijkl}\,u^{M}_{k,li}+e^{M}_{kij}\varphi^{M}_{,ki}=\rho\ddot{u}^{M}_{j},\qquad e^{M}_{ikl}u^{M}_{k,li}-\epsilon^{M}_{ik}\varphi^{M}_{,ik}=0 \tag{9-146}$$

通常表面声波器件置于空气中，空气的电势 φ_0 满足 Laplace 方程 $\nabla^2\varphi_0=0$。

边界条件和界面连接条件是

$$\sigma_{3j}+\sigma^{0}_{3k}u_{j,k}=0,\ x_3=-h$$

$$\varphi_0=0\ (\text{电学短路});\quad \text{或}\ \varphi=\varphi_0,\quad D_3=D_{03}\ (\text{电学开路}),\ x_3=-h \tag{9-147}$$

$$\sigma_{3j}+\sigma^{0}_{3k}u_{j,k}=\sigma^{M}_{3j},\quad u_j=u^{M}_{j},\quad \varphi=\varphi^{M},\quad D_3=D^{M}_{33},\ x_3=0$$

9.7.2 问题的解

考虑到波沿 x_1 轴传播，按式(9-21)，取

$$u_i=B_i e^{ikbx_3}e^{ik(x_1-ct)},\qquad \varphi=B_4 e^{ikbx_3}e^{ik(x_1-ct)} \tag{9-148}$$

式中 B_i 为第 i 个位移分量的振幅。把上式代入式(9-145)，得

$$\boldsymbol{\Gamma B}=\boldsymbol{0},\quad \text{或}\ [\Gamma_{\alpha\beta}]\{B_\alpha\}=\{0\},\quad \boldsymbol{B}=[B_1,B_2,B_3,B_4]^{T},\ \alpha,\beta=1,2,3,4 \tag{9-149}$$

式中

$$\Gamma_{jk}=C_{1jk1}+b(C_{3jk1}+C_{1jk3})+b^2C_{3jk3}+\delta_{jk}(\sigma^{0}_{11}+2b\sigma^{0}_{13}+b^2\sigma^{0}_{33}-\rho c^2)$$

$$\Gamma_{j4}=e_{11j}+b(e_{13j}+e_{31j})+b^2e_{33j},\ \Gamma_{4j}=e_{1j1}+b(e_{1j3}+e_{3j1})+b^2e_{3j3} \tag{9-150}$$

$$\Gamma_{44}=-(\epsilon_{11}+2b\epsilon_{13}+b^2\epsilon_{33})\ i,\ j=1,2,3$$

为了得到非平凡解，要求式(9-154)中的系数行列式为零，便得到以表面波速 c 为参数的 b 的 8 阶方程

$$A_8b^8+A_7b^7+A_6b^6+A_5b^5+A_4b^4+A_3b^3+A_2b^2+A_1b^1+A_0=0 \tag{9-151}$$

式中 A_i 是材料参数和初应力的函数。由上式可解得 8 个 b_q 值。对每一个 b_q，可求得一个具有 4 个分量的振幅比值，可随意取 B_{1q} 为唯一的待定量

$$B_{iq}=\beta_{iq}B_{1q},\ \beta_{1q}=1,\ i=1,2,3,4,\ q=1\sim 8 \tag{9-152}$$

求得了 B_{iq} 后，覆盖层中的位移和电势便可表成

$$u_i=\sum_{q=1}^{8}\beta_{iq}B_{1q}e^{ikb_qx_3}e^{ik(x_1-ct)},\qquad \varphi=\sum_{q=1}^{8}\beta_{4q}B_{1q}e^{ikb_qx_3}e^{ik(x_1-ct)} \tag{9-153}$$

考虑到 $x_3\to\infty$ 时广义位移为零的条件，则 b^{M} 取 4 个带正虚部的根 b^{M}_{q}。基底中的广义位移可表成

$$u^{M}_{i}=\sum_{q=1}^{4}\beta^{M}_{iq}B^{M}_{1q}e^{ikb^{M}_{q}x_3}e^{ik(x_1-ct)},\qquad \varphi^{M}=\sum_{q=1}^{4}\beta^{M}_{4q}B^{M}_{1q}e^{ikb^{M}_{q}x_3}e^{ik(x_1-ct)} \tag{9-154}$$

9.7.3 相速度

相速度须分成电学开路和电学短路两种情况分别讨论。

1）电学开路

电学开路要求在空气和覆盖层的界面上电势和电位移相等，所以推得

$$\varphi_0 = \sum_{q=1}^{8} \beta_{4q} B_{1q} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kb_q h} \mathrm{e}^{k(h+x_3)} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(x_1 - ct)} \tag{9-155}$$

把式(9-153)～(9-155)代入边界条件，可得

$$\boldsymbol{PB} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{P} = [P_{mn}],\ \boldsymbol{B} = [B_{1q},\ B_{1q}^{\mathrm{M}}]^{\mathrm{T}}\ m,\ n = 1 \sim 12 \tag{9-156}$$

式中对于 $n = 1 \sim 8$，相关系数为

$$\begin{aligned}
P_{jn} &= \mathrm{i}k\{[C_{3jk1} + C_{3jk3} b_n + \delta_{jk}(\sigma_{13}^0 + \sigma_{33}^0 b_n)]\beta_{kn} + (e_{13j} + e_{33j} b_n)\beta_{4n}\}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kb_n h} \\
P_{4n} &= \mathrm{i}k[(e_{3k1} + e_{3k3} b_n)\beta_{kn} - (\epsilon_{31} + \epsilon_{33} b_n + \mathrm{i}\varepsilon_0)\beta_{4n}]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kb_n h} \\
P_{j+4,n} &= \mathrm{i}k\{[C_{3jk1} + C_{3jk3} b_n + \delta_{jk}(\sigma_{13}^0 + \sigma_{33}^0 b_n)]\beta_{kn} + (e_{13j} + e_{33j} b_n)\beta_{4n}\} \\
P_{k+7,n} &= \beta_{kn},\quad P_{11,n} = \beta_{4n},\quad P_{12,n} = \mathrm{i}k[(e_{3k1} + e_{3k3} b_n)\beta_{kn} - (\epsilon_{31} + \epsilon_{33} b_n)\beta_{4n}]
\end{aligned} \tag{9-157a}$$

对于 $n = 9 - 12$，相关系数为

$$\begin{aligned}
&P_{jn} = 0,\quad P_{4n} = 0,\quad P_{j+4,n} = -\mathrm{i}k[(C'_{3jk1} + C'_{3jk3} b'_n)\beta'_{kn} + (e'_{13j} + e'_{33j} b'_n)\beta'_{4n}] \\
&P_{k+7,n} = -\beta'_{k,n-8},\quad P_{11,n} = -\beta_{4,n-8} \\
&P_{12,n} = -\mathrm{i}k[(e'_{3k1} + e'_{3k3} b'_{n-8})\beta'_{kn} - (\epsilon'_{31} + \epsilon'_{33} b'_{n-8})\beta'_{4,n-8}]\ j,\ k = 1,\ 2,\ 3
\end{aligned} \tag{9-157b}$$

式(9-149)和(9-155)是两个相互耦合的方程，通常采用迭代法求解，由此可求得电学开路时的相速度。

2）电学短路

对于在空气和覆盖层的界面上电势为零的电学短路情形，只需将$[P_{mn}]$的第4行改为

$$P_{4n} = \beta_{4n}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kb_n h},\ n = 1 \sim 8;\quad P_{4n} = 0,\ n = 9 \sim 12 \tag{9-158}$$

由式(9-149)、(9-155)和(9-158)可求得电学短路时的相速度。

9.7.4 算例

在覆盖层中，主要存在初应力 σ_{11}^0，且 $\sigma_{33}^0 = 0$。材料系数见本章9.5.3的例题。图9-18表示无偏应力时的Rayleigh波的频散曲线，图中的实线和虚线分别代表基频模态的表面电学开路和短路的情形，电学开路时的相速度 c_{f0} 大于短路时的相速度 c_{s0}。当薄膜厚度和波长之比 h/λ 很小时，相速度趋近于基底的Rayleigh波速，随 h/λ 的增大，相速度趋近于覆盖层的Rayleigh波速。图9-19表示初应力对Rayleigh波的速度和相位的影响，图

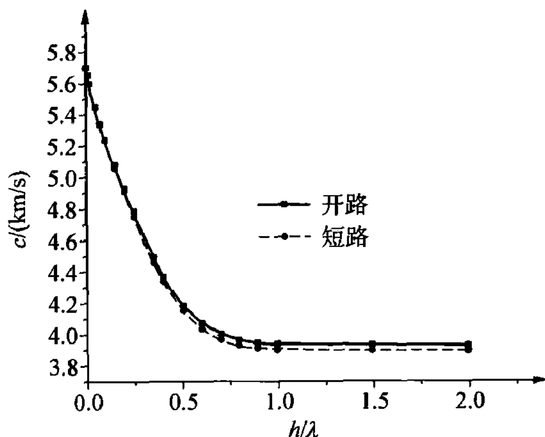


图9-18　压电层状结构中Rayleugh波的频散曲线

9-19(a)表示开路时的相速度相对变化，$\Delta c_f/c_{f0} = (c_f - c_{f0})/c_{f0}$ 和短路时的相速度相对变化 $\Delta c_s/c_{s0} = (c_s - c_{s0})/c_{s0}$ 随 h/λ 的变化，其中 c_f 和 c_s 分别表示存在偏应力时的电学开路和短路时的相速度；图 9-19(b)表示开路时的相位相对变化 $\Delta\phi_f/\phi_{f0} = (\phi_f - \phi_{f0})/\phi_{f0}$ 和短路时的相位相对变化 $\Delta\phi_s/\phi_{s0} = (\phi_s - \phi_{s0})/\phi_{s_0}$ 随 h/λ 的变化，其中 ϕ_f 和 ϕ_s 分别表示存在偏应力时的电学开路和短路时的相速度，ϕ_{f0} 和 ϕ_{s0} 为不存在偏应力时的值。在本例题中，$h/\lambda = 0.15$ 时，相对相速度和相对相位的变化最大。

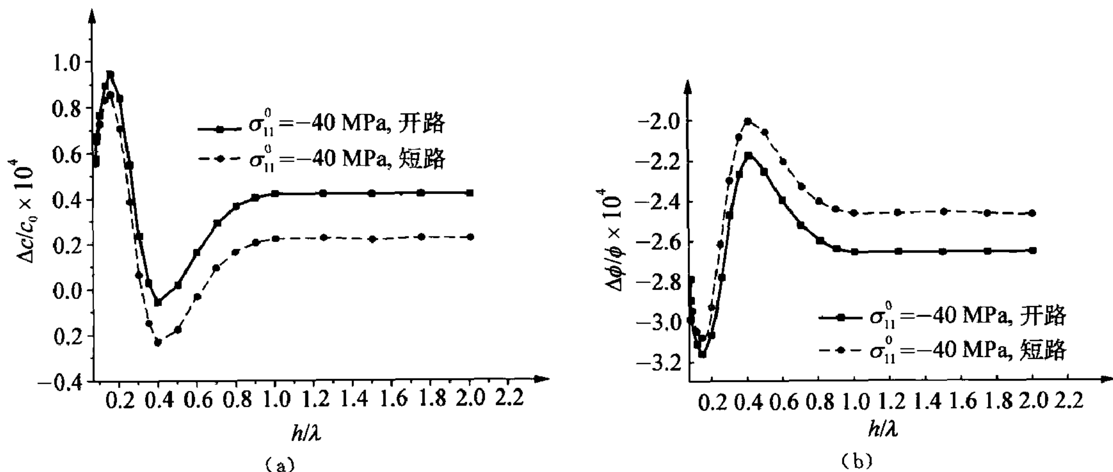


图 9-19 偏应力对相速度的影响

(a) $\Delta c/c_0$ 与 h/λ 的关系；(b) $\Delta\phi/\phi$ 与 h/λ 的关系

Babich 和 Lukyanov[151]讨论了曲线层状结构中波的传播。

9.8 一般情况下的界面动态断裂分析[152~154]

9.8.1 一般情况动态分析的基本控制方程

对于等温问题，介质的本构方程由式(9-2)表示，用广义位移表示的运动方程由式(9-3)表示。文献[152, 153]先采用 Laplace 变换，再用 Fourier 变换的两次变换来处理这一问题。对任一函数 $f(x_1, x_2, t)$的 Laplace 变换为(参见式(5-173))

$$\overline{f}(x_1, x_2, p) = \int_0^{\infty} f(x_1, x_2, t)\mathrm{e}^{-pt}\mathrm{d}t, \quad f(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{a-\mathrm{i}\infty}^{a+\mathrm{i}\infty} \overline{f}(x_1, x_2, p)\mathrm{e}^{pt}\mathrm{d}p \tag{9-159}$$

当各阶导数初始值均为零时，基本方程式(9-2)和(9-3)分别化为

$$\overline{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}\,\overline{u}_{k,l} + e_{kij}\,\overline{\varphi}_{,k}, \quad \overline{D}_i = -\epsilon_{ik}\,\overline{\varphi}_{,k} + e_{ikl}\,\overline{u}_{k,l} \tag{9-160}$$

$$(C_{ijkl}\,\overline{u}_l + e_{kij}\,\overline{\varphi})_{,ki} = \rho p^2\,\overline{u}_j, \quad (-\epsilon_{ik}\,\overline{\varphi} + e_{ikl}\,\overline{u}_l)_{,ki} = 0 \tag{9-161}$$

对于广义平面等温问题，上式中的下标 $i, j = 1, 2$。

在 Laplace 变换域上对任一函数$\overline{f}(x_1, x_2)$的 Fourier 变换为(参见式(6-227))

$$\tilde{\bar{f}}(s, x_2, p) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{f}(x_1, x_2, p) e^{-isx_1} dx_1, \bar{f}(x_1, x_2, p) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\bar{f}}(s, x_2, p) e^{ix_1 s} ds \tag{9-162}$$

引入变量置换

$$x = x_1, \quad y = isx_2 \tag{9-163}$$

再把式(9-161)对坐标 x_1 进行 Fourier 变换，参照 4.2.1 节中的理论，利用 $\tilde{\bar{u}}_{l,1} = is\tilde{\bar{u}}_l$，$\bar{u}_{l,11} = (is)^2 \tilde{\bar{u}}_l$ 后，则得

$$\begin{aligned} &[C^*_{1jk1} + (C_{1jk2} + C_{2jk1}) \partial/\partial y + C_{2jk2} \partial^2/\partial y^2] \tilde{\bar{u}}_k + \\ &\quad [e_{1j1} + (e_{1j2} + e_{2j1}) \partial/\partial y + e_{2j2} \partial^2/\partial y^2] \tilde{\bar{\varphi}} = 0 \\ &[e_{1k1} + (e_{1k2} + e_{2k1}) \partial/\partial y + e_{2k2} \partial^2/\partial y^2] \tilde{\bar{u}}_k - \\ &\quad [\epsilon_{11} + (\epsilon_{12} + \epsilon_{21}) \partial/\partial y + \epsilon_{22} \partial^2/\partial y^2] \tilde{\bar{\varphi}} = 0 \\ &C^*_{1jk1} = C^*_{1jk1}(p, s) = C_{1jk1} + \rho(p^2/s^2)\delta_{jk} \end{aligned} \tag{9-164}$$

引入符号

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} C^*_{1jk1} & e_{1j1} \\ e_{1k1} & -\epsilon_{11} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{R} = \begin{bmatrix} C_{1jk2} & e_{2j1} \\ e_{1k2} & -\epsilon_{12} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} C_{1jk2} & e_{1k2} \\ e_{2j1} & -\epsilon_{12} \end{bmatrix}$$
$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} C_{2jk2} & e_{2j2} \\ e_{2k2} & -\epsilon_{22} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\bar{\boldsymbol{U}}} = \begin{Bmatrix} \tilde{\bar{u}}_k \\ \tilde{\bar{\varphi}} \end{Bmatrix} \tag{9-165}$$

式中矩阵 $\boldsymbol{Q}$ 和 $\boldsymbol{T}$ 是正定的。利用上式，式(9-164)可以写成

$$[\boldsymbol{T}\partial^2/\partial y^2 + (\boldsymbol{R} + \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}) \partial/\partial y + \boldsymbol{Q}] \tilde{\bar{\boldsymbol{U}}} = \boldsymbol{0} \tag{9-166}$$

若令

$$\tilde{\bar{\boldsymbol{U}}}(s, y, p) = \boldsymbol{a}(s, p) e^{\mu y(s, p)}, \quad \partial\tilde{\bar{\boldsymbol{U}}}/\partial y = \mu \tilde{\bar{\boldsymbol{U}}} \tag{9-167}$$

把上式代入式(9-166)，便得

$$[\boldsymbol{T}\mu^2 + (\boldsymbol{R} + \boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})\mu + \boldsymbol{Q}]\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0} \tag{9-168}$$

由上式可得到由 4 个 $\mu^2 + b\mu + c$ 形式连乘组成的本征多项式，所以本征根具有形式 $\mu_i = -b + \sqrt{b^2 - 4ac}$ 和 $\mu_{i+4} = -b - \sqrt{b^2 - 4ac}$，其中 b, c 为由材料系数决定的常数[154]。当 $s \to \pm\infty$ 的极限情形，式(9-167)和 μ_i 应当趋近于静态解，此时 $\mu_i = \bar{u}_{i+4}$，且 $\mathrm{Im}\mu_i > 0$。本征方程式(9-168)的本征值 μ 有 8 个根 μ_i，$i = 1 \sim 8$，可记为 μ_i，μ_{i+4}，$i = 1 \sim 4$；相应的 8 个本征矢量记为 $\boldsymbol{a}_i$ 和 $\boldsymbol{a}_{i+4}$，从而式(9-167)的一般解取

$$\tilde{\bar{\boldsymbol{U}}}(s, y, p) = \sum_{k=1}^{4} [C_k \boldsymbol{a}_k(s, y, p) e^{y\mu_k(s, p)} + C_{k+4} \boldsymbol{a}_{k+4}(s, y, p) e^{y\mu_{k+4}(s, p)}] \tag{9-169}$$

把式(9-160)对坐标 x_1 进行 Fourier 变换，则得

$$\tilde{\bar{\boldsymbol{\Sigma}}}_2 = is(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{T}\partial/\partial y) \tilde{\bar{\boldsymbol{U}}} \tag{9-170}$$

9.8.2 界面动态裂纹问题的提法

设材Ⅰ位于上半平面 S^+，$x_2>0$；材料Ⅱ位于下半平面 S^-，$x_2<0$，界面为 $x_1=0$。沿 x_1 轴有一长 $2a$ 的裂纹，坐标原点选在裂纹的中点。假设无穷远处没有作用广义应力，裂纹面上作用有阶跃广义应力。对于等温问题，对任一介质 $i(i=\text{Ⅰ},\text{Ⅱ})$，运动方程和本构方程式的 Laplace 和 Fourier 联合变换式(9-166)和(9-170)都适用。边界条件为

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{\Sigma}_2^{(\text{Ⅰ})}=[\sigma_{21}^{(\text{Ⅰ})},\ \sigma_{22}^{(\text{Ⅰ})},\ \sigma_{23}^{(\text{Ⅰ})},\ D_2^{(\text{Ⅰ})}]^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\Sigma}_2^{(\text{Ⅱ})}=\boldsymbol{\tau}H(t),\ |x_1|<a\\&\Sigma_{ij}^{(N)}=0,\ N=\text{Ⅰ},\text{Ⅱ},\ \left|\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right|\to\infty\end{aligned}\tag{9-171}$$

式中 $\boldsymbol{\tau}$ 是常矢量。结合面上的连接条件为

$$\boldsymbol{U}^{(\text{Ⅰ})}(u_1,\ u_2,\ u_3,\ \varphi)=\boldsymbol{U}^{(\text{Ⅱ})},\quad \boldsymbol{\Sigma}_2^{(\text{Ⅰ})}(x_1)=\boldsymbol{\Sigma}_2^{(\text{Ⅰ})}(x_1)=\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1),\ |x_1|>a,\ x_2=0\tag{9-172}$$

在裂纹面上的广义位移跳跃可如下表示

$$\Delta\boldsymbol{U}(x_1)=\boldsymbol{U}^{(\text{Ⅰ})}(x_1,\ 0)-\boldsymbol{U}^{(\text{Ⅱ})}(x_1,\ 0),\quad \boldsymbol{\psi}(x_1)=\mathrm{d}\Delta\boldsymbol{U}(x_1)/\mathrm{d}x_1\tag{9-173}$$

称 $\boldsymbol{\psi}(x_1)$ 为广义位错密度。在结合面上 $\Delta\boldsymbol{U}(x_1)=\boldsymbol{0}$。围绕裂纹的广义位移单值性条件为

$$\int_{-a}^{a}\boldsymbol{\psi}(x_1,\ t)\mathrm{d}x_1=0,\quad \boldsymbol{\psi}=[\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \psi_4]\tag{9-174}$$

初始条件是

$$\boldsymbol{U}^{(i)}(x_1,\ x_2,\ 0)=\boldsymbol{0},\quad \dot{\boldsymbol{U}}^{(i)}(x_1,\ x_2,\ 0)=\boldsymbol{0}\tag{9-175}$$

边界条件和结合面上的连接条件在 Laplace 变换域上可以写成

$$\begin{aligned}&\overline{\boldsymbol{\Sigma}}_2(x_1,\ 0)=\boldsymbol{\tau}/p,\ |x_1|<a;\quad \overline{\boldsymbol{U}}^{(\text{Ⅰ})}(x_1,\ 0,\ t)=\overline{\boldsymbol{U}}^{(\text{Ⅱ})}(x_1,\ 0,\ t),\ a<|x_1|<\infty\\&\overline{\boldsymbol{\Sigma}}_2^{(\text{Ⅰ})}(x_1,\ 0)=\overline{\boldsymbol{\Sigma}}_2^{(\text{Ⅱ})}(x_1,\ 0)=\overline{\boldsymbol{\Sigma}}_2(x_1,\ 0),\ |x_1|<\infty;\quad \overline{\Sigma}_{ij}^{(N)}=0,\ \left|\sqrt{x_1^2+x_2^2}\right|\to\infty\end{aligned}\tag{9-176}$$

裂纹面上广义位移跳跃的条件式(9-173)和单值性条件(9-174)则化为

$$\begin{aligned}&\Delta\tilde{\overline{\boldsymbol{U}}}(s,\ p)=\tilde{\overline{\boldsymbol{U}}}^{(\text{Ⅰ})}(s,\ 0,\ p)-\tilde{\overline{\boldsymbol{U}}}^{(\text{Ⅱ})}(s,\ 0,\ p)=-\frac{\mathrm{i}}{s}\tilde{\overline{\boldsymbol{\psi}}}\\&\int_{-a}^{a}\overline{\boldsymbol{\psi}}(x_1,\ p)\mathrm{d}x_1=0\end{aligned}\tag{9-177}$$

9.8.3 把界面动态裂纹问题化为奇异积分方程

为使 $|s|\to\infty$ 时 $\tilde{\overline{\boldsymbol{U}}}$ 有界，不失一般性，式(9-169)可写成

$$\tilde{\overline{\boldsymbol{U}}}^{(\text{Ⅰ})}(s,\ y,\ p)=\begin{cases}\boldsymbol{A}_1^{(\text{Ⅰ})}\boldsymbol{E}_1^{(\text{Ⅰ})}\boldsymbol{C}_1^{(\text{Ⅰ})},\ s<0,\\\boldsymbol{A}_2^{(\text{Ⅰ})}\boldsymbol{E}_2^{(\text{Ⅰ})}\boldsymbol{C}_2^{(\text{Ⅰ})},\ s>0;\end{cases}\quad \tilde{\overline{\boldsymbol{U}}}^{(\text{Ⅱ})}(s,\ y,\ p)=\begin{cases}\boldsymbol{A}_1^{(\text{Ⅱ})}\boldsymbol{E}_1^{(\text{Ⅱ})}\boldsymbol{C}_1^{(\text{Ⅱ})},\ s>0\\\boldsymbol{A}_2^{(\text{Ⅱ})}\boldsymbol{E}_2^{(\text{Ⅱ})}\boldsymbol{C}_2^{(\text{Ⅱ})},\ s<0\end{cases}$$

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}_1^{(N)}=[\boldsymbol{a}_1^{(N)},\ \boldsymbol{a}_2^{(N)},\ \boldsymbol{a}_3^{(N)},\ \boldsymbol{a}_4^{(N)}],\quad \boldsymbol{A}_2^{(N)}=[\boldsymbol{a}_5^{(N)},\ \boldsymbol{a}_6^{(N)},\ \boldsymbol{a}_7^{(N)},\ \boldsymbol{a}_8^{(N)}];\quad \boldsymbol{E}_1^{(\text{Ⅰ})}=\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\mu_*x_2}\rangle\\&\boldsymbol{E}_2^{(\text{Ⅱ})}=\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}s\mu_{*+4}x_2}\rangle;\quad \boldsymbol{C}_1^{(N)}=[C_1^{(N)},\ C_2^{(N)},\ C_3^{(N)},\ C_4^{(N)}]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{C}_2^{(N)}=[C_5^{(N)},\ C_6^{(N)},\ C_7^{(N)},\ C_8^{(N)}]^{\mathrm{T}}\end{aligned}\tag{9-178a}$$

式(9－178a)也可写成

$$\tilde{\tilde{\boldsymbol{U}}}^{(\mathrm{I})}=\boldsymbol{A}_1^{(\mathrm{I})}\boldsymbol{E}_1^{(\mathrm{I})}\boldsymbol{C}_1^{(\mathrm{I})}+\boldsymbol{A}_2^{(\mathrm{I})}\boldsymbol{E}_2^{(\mathrm{I})}\boldsymbol{C}_2^{(\mathrm{I})},\quad \tilde{\tilde{\boldsymbol{U}}}^{(\mathrm{II})}=\boldsymbol{A}_1^{(\mathrm{II})}\boldsymbol{E}_1^{(\mathrm{II})}\boldsymbol{C}_1^{(\mathrm{II})}+\boldsymbol{A}_2^{(\mathrm{II})}\boldsymbol{E}_2^{(\mathrm{II})}\boldsymbol{C}_2^{(\mathrm{II})}$$

$$\boldsymbol{C}_2^{(\mathrm{I})}=\boldsymbol{C}_1^{(\mathrm{II})}=\boldsymbol{0},\ s<0;\ \boldsymbol{C}_1^{(\mathrm{I})}=\boldsymbol{C}_2^{(\mathrm{II})}=\boldsymbol{0},\ s>0 \tag{9-178b}$$

由式(9－170)推得

$$\tilde{\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}}_2^{(\mathrm{I})}(s,y,p)=\begin{cases}\mathrm{i}s\boldsymbol{B}_1^{(\mathrm{I})}\boldsymbol{E}_1^{(\mathrm{I})}\boldsymbol{C}_1^{(\mathrm{I})}=\mathrm{i}s\boldsymbol{B}_1^{(\mathrm{I})}\boldsymbol{A}_1^{(\mathrm{I})-1}\tilde{\tilde{\boldsymbol{U}}}^{(\mathrm{I})}=-s\boldsymbol{Y}_1^{(\mathrm{I})-1}\tilde{\tilde{\boldsymbol{U}}}^{(\mathrm{I})},\ s<0\\ \mathrm{i}s\boldsymbol{B}_2^{(\mathrm{I})}\boldsymbol{E}_2^{(\mathrm{I})}\boldsymbol{C}_2^{(\mathrm{I})}=\mathrm{i}s\boldsymbol{B}_2^{(\mathrm{I})}\boldsymbol{A}_2^{(\mathrm{I})-1}\tilde{\tilde{\boldsymbol{U}}}^{(\mathrm{I})}=-s\boldsymbol{Y}_2^{(\mathrm{I})-1}\tilde{\tilde{\boldsymbol{U}}}^{(\mathrm{I})},\ s>0\end{cases}$$

$$\tilde{\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}}_2^{(\mathrm{II})}(s,y,p)=\begin{cases}\mathrm{i}s\boldsymbol{B}_1^{(\mathrm{II})}E_1^{(\mathrm{II})}C_1^{(\mathrm{II})}=\mathrm{i}s\boldsymbol{B}_1^{(\mathrm{II})}\boldsymbol{A}_1^{(\mathrm{II})-1}\tilde{\tilde{\boldsymbol{U}}}^{(\mathrm{II})}=-s\boldsymbol{Y}_1^{(\mathrm{II})-1}\tilde{\tilde{\boldsymbol{U}}}^{(\mathrm{II})},\ s>0\\ \mathrm{i}s\boldsymbol{B}_2^{(\mathrm{II})}E_2^{(\mathrm{II})}\boldsymbol{C}_2^{(\mathrm{II})}=\mathrm{i}s\boldsymbol{B}_2^{(\mathrm{II})}\boldsymbol{A}_2^{(\mathrm{II})-1}\tilde{\tilde{\boldsymbol{U}}}^{(\mathrm{II})}=-s\boldsymbol{Y}_2^{(\mathrm{II})-1}\tilde{\tilde{\boldsymbol{U}}}^{(\mathrm{II})},\ s<0\end{cases} \tag{9-179}$$

$$\boldsymbol{B}_1^{(N)}=[\boldsymbol{b}_1^{(N)},\boldsymbol{b}_2^{(N)},\boldsymbol{b}_3^{(N)},\boldsymbol{b}_4^{(N)}],\quad \boldsymbol{B}_2^{(N)}=[\boldsymbol{b}_5^{(N)},\boldsymbol{b}_6^{(N)},\boldsymbol{b}_7^{(N)},\boldsymbol{b}_8^{(N)}],\quad \boldsymbol{b}^{(N)}=(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}+\boldsymbol{T}\partial/\partial y)\,\boldsymbol{a}^{(N)}$$

在裂纹面上有

$$\tilde{\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}}_2^{(\mathrm{I})}(s,0,p)=\boldsymbol{R}^{(\mathrm{I})}\tilde{\tilde{\boldsymbol{U}}}^{(\mathrm{I})},\quad \tilde{\tilde{\boldsymbol{\Sigma}}}_2^{(\mathrm{II})}(s,0,p)=\boldsymbol{R}^{(\mathrm{II})}\tilde{\tilde{\boldsymbol{U}}}^{(\mathrm{II})}$$

$$\boldsymbol{R}^{(\mathrm{I})}=\begin{cases}\mathrm{i}s\boldsymbol{B}_1^{(\mathrm{I})}\boldsymbol{A}_1^{(\mathrm{I})-1}=-s\boldsymbol{Y}_1^{(\mathrm{I})-1},\ s<0,\\ \mathrm{i}s\boldsymbol{B}_2^{(\mathrm{I})}\boldsymbol{A}_2^{(\mathrm{I})-1}=-s\boldsymbol{Y}_2^{(\mathrm{I})-1},\ s>0;\end{cases}\quad \boldsymbol{R}^{(\mathrm{II})}=\begin{cases}\mathrm{i}s\boldsymbol{B}_1^{(\mathrm{II})}\boldsymbol{A}_1^{(\mathrm{II})-1}=-s\boldsymbol{Y}_1^{(\mathrm{II})-1},\ s>0\\ \mathrm{i}s\boldsymbol{B}_2^{(\mathrm{II})}\boldsymbol{A}_2^{(\mathrm{II})-1}=-s\boldsymbol{Y}_2^{(\mathrm{II})-1},\ s<0\end{cases} \tag{9-180}$$

上两式中$\boldsymbol{Y}=\mathrm{i}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}$，$\boldsymbol{Y}^{-1}=-\mathrm{i}\boldsymbol{B}\boldsymbol{A}^{-1}$，由式(6－9)、(6－48)定义。由式(9－171)和(9－172)知，面力在整个界面上连续，有$\boldsymbol{\Sigma}_2^{(\mathrm{I})}(x_1)=\boldsymbol{\Sigma}_2^{(\mathrm{II})}(x_1)=\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1)$，故有

$$\boldsymbol{R}^{(\mathrm{I})}\tilde{\tilde{\boldsymbol{U}}}^{(\mathrm{I})}=\boldsymbol{R}^{(\mathrm{II})}\tilde{\tilde{\boldsymbol{U}}}^{(\mathrm{II})} \tag{9-181}$$

由式(9－177)和(9－181)，可得

$$\tilde{\tilde{\boldsymbol{U}}}^{(\mathrm{I})}=\boldsymbol{R}^{(\mathrm{II})}\boldsymbol{R}^{-1}\Delta\tilde{\tilde{\boldsymbol{U}}},\quad \tilde{\tilde{\boldsymbol{U}}}^{(\mathrm{II})}=\boldsymbol{R}^{(\mathrm{I})}\boldsymbol{R}^{-1}\Delta\tilde{\tilde{\boldsymbol{U}}};\quad \boldsymbol{R}=\boldsymbol{R}^{(\mathrm{II})}-\boldsymbol{R}^{(\mathrm{I})} \tag{9-182}$$

结合式(9－177)和(9－180)～(9－182)，并进行 Fourier 反变换后，可得

$$\bar{\boldsymbol{\Sigma}}_2(x_1,0,p)=-\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{-a}^{a}\bar{\boldsymbol{\psi}}(t,p)\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{s}\boldsymbol{M}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s(t-x_1)}\mathrm{d}s,\ |x_1|<\infty \tag{9-183}$$

式中$\boldsymbol{M}=\boldsymbol{R}^{(\mathrm{II})}\boldsymbol{R}^{(\mathrm{I})}\boldsymbol{R}^{-1}=\boldsymbol{R}^{(\mathrm{I})}\boldsymbol{R}^{(\mathrm{II})}\boldsymbol{R}^{-1}$，$\bar{\boldsymbol{\Sigma}}_2(x_1,0,p)$由式(9－176)表示。式(9－183)构成奇异积分方程组，其奇异性由核函数$s^{-1}\boldsymbol{M}(s,p)$在无穷远的渐近值确定。当$s\to\infty$时，$\boldsymbol{Y}_j^{(i)}$，$\boldsymbol{Y}_j^{(i)-1}$趋近于静态值，故有界；同时，在静态情况，$\boldsymbol{A}_2^{(N)}=\bar{\boldsymbol{A}}_1^{(N)}$，$\boldsymbol{B}_2^{(N)}=\bar{\boldsymbol{B}}_1^{(N)}$。应当注意，本处和式(9－184)中的材料常数$A$，$B$，$Y$，$M$等的共轭值记为$\bar{A}$，$\bar{B}$，$\bar{Y}$，$\bar{M}$等，其上的短横不代表 Laplace 变换。所以，按式(9－180)有

$$\lim_{s\to\infty}(1/s)\boldsymbol{R}^{(\mathrm{I})}=-\boldsymbol{Y}_{2静态}^{(\mathrm{I})-1}=\bar{\boldsymbol{Y}}_{1静态}^{(\mathrm{I})-1},\quad \lim_{s\to\infty}(1/s)\boldsymbol{R}^{(\mathrm{II})}=-\boldsymbol{Y}_{1静态}^{(\mathrm{II})-1}$$

$$\lim_{s\to-\infty}(1/s)\boldsymbol{R}^{(\mathrm{I})}=-\boldsymbol{Y}_{1静态}^{(\mathrm{I})-1},\quad \lim_{s\to-\infty}(1/s)\boldsymbol{R}^{(\mathrm{II})}=-\boldsymbol{Y}_{2静态}^{(\mathrm{II})-1}=\bar{\boldsymbol{Y}}_{1静态}^{(\mathrm{II})-1} \tag{9-184a}$$

所以

$$
\begin{aligned}
&\lim_{s\to\infty}(1/s)\boldsymbol{M} = \overline{\boldsymbol{Y}}_{1静态}^{(\mathrm{I})-1}(-s\boldsymbol{Y}_{1静态}^{(\mathrm{II})-1})[s(-\boldsymbol{Y}_{1静态}^{(\mathrm{II})-1} - \overline{\boldsymbol{Y}}_{1静态}^{(\mathrm{I})-1})]^{-1} = \boldsymbol{M}_\infty \\
&\lim_{s\to-\infty}(1/s)\boldsymbol{M} = -\boldsymbol{Y}_{1静态}^{(\mathrm{I})-1} s\overline{\boldsymbol{Y}}_{1静态}^{(\mathrm{II})-1}[s(\overline{\boldsymbol{Y}}_{1静态}^{(\mathrm{II})-1} + \boldsymbol{Y}_{1静态}^{(\mathrm{I})-1})]^{-1} = -\overline{\boldsymbol{M}}_\infty \qquad (9-184\mathrm{b}) \\
&\boldsymbol{M}_\infty = \overline{\boldsymbol{Y}}_{1静态}^{(\mathrm{I})-1}\boldsymbol{Y}_{1静态}^{(\mathrm{II})-1}(\boldsymbol{Y}_{1静态}^{(\mathrm{II})-1} + \overline{\boldsymbol{Y}}_{1静态}^{(\mathrm{I})-1})
\end{aligned}
$$

上式可统一写成

$$
\lim_{s\to\pm\infty}(1/s)\boldsymbol{M} = (s/|s|)\mathrm{Re}\boldsymbol{M}_\infty + \mathrm{i}\,\mathrm{Im}\boldsymbol{M}_\infty。 \qquad (9-185)
$$

我们把奇异部分分离出来。类似于6.7.2节，式(9－183)可化成下述奇异积分方程

$$
\mathrm{Im}\boldsymbol{M}_\infty\,\overline{\boldsymbol{\psi}} + \frac{\mathrm{Re}\boldsymbol{M}_\infty}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\overline{\boldsymbol{\psi}}(t,\ p)}{t-x_1}\mathrm{d}t - \frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{-a}^{a}\overline{\boldsymbol{\psi}}(t,\ p)\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{s}\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}_\infty\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s(t-x_1)}\mathrm{d}s = \boldsymbol{\tau}
$$

$$(9-186)$$

把上式等式两边同左乘$(\mathrm{Re}\boldsymbol{M}_\infty)^{-1}$，并引入由$(\mathrm{Re}\boldsymbol{M}_\infty)^{-1}\mathrm{Im}\boldsymbol{M}_\infty$的本征矢量组成的矩阵$\boldsymbol{\Lambda}$，使$(\mathrm{Re}\boldsymbol{M}_\infty)^{-1}\mathrm{Im}\boldsymbol{M}_\infty$对角化，即

$$
\boldsymbol{\Lambda}(\mathrm{Re}\boldsymbol{M}_\infty)^{-1}(\mathrm{Im}\boldsymbol{M}_\infty)\boldsymbol{\Lambda}^{-1} = \langle\lambda_i\rangle \qquad (9-187)
$$

式中λ_i是$(\mathrm{Re}\boldsymbol{M}_\infty)^{-1}\mathrm{Im}\boldsymbol{M}_\infty$的本征值。利用式(9－187)，并使长度尺寸除以$a$，使之规范化，即令$x = x_1/a$，则式(9－186)可化为

$$
\lambda_i\,\overline{\psi}_{\lambda i}(x,\ p) + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\overline{\psi}_{\lambda i}(t,\ p)}{t-x_1}\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1}\sum_{k=1}^{4}F_{ik}\,\overline{\psi}_{\lambda i}(t,\ p)\mathrm{d}t = \overline{T}_{0i}(x,\ p)
$$

$$(9-188)$$

$$
[F_{ik}] = -\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\boldsymbol{\Lambda}(\mathrm{Re}\boldsymbol{M}_\infty)^{-1}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{s}\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}_\infty\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s(t-x)}\mathrm{d}s\right]\boldsymbol{\Lambda}^{-1},\quad \boldsymbol{T}_0 = \boldsymbol{\Lambda}(\mathrm{Re}\boldsymbol{M}_\infty)^{-1}\boldsymbol{\tau}
$$

9.8.4 奇异积分方程的解

采用Jacobi多项式的无穷级数求解式(9－188)。令

$$
\overline{\psi}_{\lambda i}(x,\ p) = \sum_{n=0}^{\infty}C_{ni}(p)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)w_i(x),\quad |x|<1
$$

$$
w_i(x) = (1-x)^{\alpha_i}(1+x)^{\beta_i},\quad \alpha_k = \frac{\mathrm{i}}{2\pi\mathrm{i}}\ln\frac{1-\mathrm{i}\lambda_k}{1+\mathrm{i}\lambda_k} - \frac{1}{2},\quad \beta_k = -\frac{\mathrm{i}}{2\pi\mathrm{i}}\ln\frac{1-\mathrm{i}\lambda_k}{1+\mathrm{i}\lambda_k} - \frac{1}{2}
$$

$$(9-189)$$

式中$P_n^{(\alpha,\beta)}$是Jacobi多项式，C_{ni}是待求的常数。α_k，β_k由式(9－189)确定，是动态问题的奇异性指数，通常是复数。和通常的线弹性问题一样，在裂纹尖端前方的极小区域内，存在位移的相互嵌入问题。

把式(9－189)代入(9－188)和长度规范化后的式(9－177)，利用Jacobi多项式的正交性质和$P_0^{(\alpha,\beta)}(t) = 1$，以及下述关系

$$\lambda_k P_n^{(\alpha_k,\beta_k)}(x)w_k(x)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}P_n^{(\alpha,\beta)}(t)\frac{w_k(t)}{t-x}\mathrm{d}t=$$

$$\begin{cases}\frac{1}{2}\sqrt{1+\lambda_k^2}P_n^{(\alpha_k,\beta_k)}(x), & |x|<1\\ \frac{1}{2}\sqrt{1+\lambda_k^2}[(x-1)^{\alpha_k}(x-1)^{\beta_k}P_n^{(\alpha_k,\beta_k)}(x)+G_{kn}^{\infty}(x)], & |x|>1\end{cases} \tag{9-190}$$

式中 $G_{kn}^{\infty}(x)$ 是 $P_n^{(\alpha_k,\beta_k)}(x)w_k(x)$ 在无穷远处的主部，它在 $x=1$ 处有界，对应力强度因子没有贡献。由此推出 $C_0^k=0$ 和 C_n^k 的线性代数方程组。若只取式(9-189)中的首 $N+1$ 项，则得下述 $4N$ 个联立方程

$$\frac{1}{2}\sqrt{1+\lambda_k^2}\theta_{j-1}^{(-\alpha_k,-\beta_k)}C_j^k+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{4}Y_{jn}^{km}C_n^m=q_{jk},\ k=1,2,3,4,\ j=1\sim N$$

$$q_{jk}=\int_{-1}^{1}\overline{T}_{0k}P_{j-1}^{(-\alpha_k,\ \beta_k)}(x)w_k(x)\mathrm{d}x,\ Y_{jn}^{km}=\int_{-1}^{1}H_n^{km}P_{j-1}^{(-\alpha_k,-\beta_k)}(x)w_k(x)\mathrm{d}x \tag{9-191}$$

$$H_n^{km}(x,p)=\int_{-1}^{1}F_{km}(x,t,p)P_n^{(\alpha_k,\beta_k)}(t)w_k(t)\mathrm{d}t$$

$$\theta_k^{(\alpha,\beta)}=\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(k+\alpha+1)(k+\beta+1)}{(2k+\alpha+\beta+1)(k+\alpha+\beta+1)k!},\quad \theta_0^{(\alpha,\beta)}=\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}$$

由上式可算出 C_n^k。由式(9-183)，可算出裂纹面上 $|x|>1$ 处的广义面力的奇异部分为

$$\overline{\boldsymbol{\Sigma}}_2(x,0,p)=\mathrm{Re}\boldsymbol{M}_{\infty}\boldsymbol{\Lambda}^{-1}\sum_{n=1}^{N}\begin{Bmatrix}(1/2)\sqrt{1+\lambda_k^2}(x-1)^{\alpha_k}(x+1)^{\beta_k}P_n^{(\alpha_k,\beta_k)}(x)C_n^k\\ \cdots\\ \cdots\\ (1/2)\sqrt{1+\lambda_4^2}(x-1)^{\alpha_4}(x+1)^{\beta_4}P_n^{(\alpha_4,\beta_4)}(x)C_n^4\end{Bmatrix} \tag{9-192}$$

裂纹右端的关于应力强度因子为

$$\overline{\boldsymbol{K}}=[\overline{K}_{\mathrm{II}},\overline{K}_{\mathrm{I}},\overline{K}_{\mathrm{III}},\overline{K}_{\mathrm{D}}]^{\mathrm{T}}=\lim_{x\to1^{+}}\sqrt{2\pi}\langle(x-1)^{\alpha}\rangle\overline{\boldsymbol{\Sigma}}_2(x,0,p) \tag{9-193}$$

求出在 Laplace 域上的应力强度因子后，通常再采用数字反演方法求出物理应力强度因子。

9.8.5 广义应力波通过裂纹时的绕射

当广义应力波从无穷远处入射到存在裂纹的 $x_2=0$ 的界面时，将引起波的扰动。处理这一问题的方法是把这一问题分为两个问题的叠加：①不存在裂纹时入射波在界面处的反射和透射，这一问题已在前面研究过，它将在原裂纹面上产生广义应力 $\boldsymbol{\Sigma}_2$；②在原裂纹面处施加广义应力 $-\boldsymbol{\Sigma}_2$，用本节的方法求解。把两个问题的解叠加，便得到原问题的解。

9.8.6 裂纹面上作用载荷时的单个Ⅲ型界面裂纹[133]

现在来讨论Ⅲ型界面裂纹的动力学问题。采用记号和上节相同。对于Ⅲ型问题，广义位移只有 u_3 和 φ。基本方程如式(6-254)所示，在任一介质中有

$$C_{44}^{(i)} \nabla^2 u_3^{(i)} + e_{15}^{(i)} \nabla^2 \varphi^{(i)} = \rho \ddot{u}_3^{(i)}, \quad e_{15}^{(i)} \nabla^2 u_3^{(i)} - \epsilon_{11}^{(i)} \nabla^2 \varphi^{(i)} = 0 \tag{9-194}$$

式中上角(i)中$i = \text{Ⅰ}, \text{Ⅱ}$。引入符号

$$\varphi^{(i)} = (e_{15}^{(i)}/\epsilon_{11}^{(i)}) u_3^{(i)} + \phi^{(i)}, \quad C_{44}^{*(i)} = C_{44}^{(i)} + (e_{15}^{(i)2}/\epsilon_{11}^{(i)}) \tag{9-195}$$

设$u_3^{(i)} = u_{30}^{(i)} e^{i(kn_i x_i - \omega t)}$，$\varphi^{(i)} = \varphi_0^{(i)} e^{i(kn_i x_i - \omega t)}$，从而式(9-194)可化为

$$\nabla^2 u_3^{(i)} + k_i^2 u_3^{(i)} = 0, \quad \nabla^2 \phi^{(i)} = 0, \; k_i^2 = \rho_i \omega^2 / C_{44}^{*(i)} \tag{9-196}$$

为方便计，以后的公式中将省去时间因子$\exp(-i\omega t)$。现在本构方程可用$u_3^{(i)}$，$\phi^{(i)}$表为

$$\begin{aligned} &\sigma_{31}^{(i)} = C_{44}^{*(i)} u_{3,1}^{(i)} + e_{15}^{(i)} \phi_{,1}^{(i)}, \quad \sigma_{32}^{(i)} = C_{44}^{*(i)} u_{3,2}^{(i)} + e_{15}^{(i)} \phi_{,2}^{(i)} \\ &D_1^{(i)} = -\epsilon_{11}^{(i)} \phi_{,1}^{(i)}, \quad D_2^{(i)} = -\epsilon_{11}^{(i)} \phi_{,2}^{(i)} \end{aligned} \tag{9-197}$$

围绕裂纹的单值性条件可用位错密度$\psi(x_1)$表示

$$\int_{-a}^{a} \psi(x_1) dx_1 = 0, \; \psi(x_1) = d\Delta u_3(x_1)/dx_1, \; \Delta u_3(x_1) = u_3^{(\text{Ⅰ})}(x_1, 0^+) - u_3^{(\text{Ⅱ})}(x_1, 0^-) \tag{9-198}$$

讨论无穷远处没有载荷、在裂纹面$|x_1| < a$上承受应力$-\tau(x_1)$的单个界面裂纹。裂纹上下面和结合面连接的机械边界条件为

$$u_3^{(i)}(x_1, 0) = 0, \; |x_1| \geqslant a; \quad \sigma_{32}^{(\text{Ⅰ})}(x_1, 0^+) = \sigma_{32}^{(\text{Ⅱ})}(x_1, 0^-) = -\tau^{in}(x_1), \; |x_1| < a \tag{9-199a}$$

Ⅲ型问题没有裂纹张开位移，裂纹上下岸界面电学边界连接条件可分为以下两种情况

$$\begin{aligned} &(1)\; D_2^{(\text{Ⅰ})}(x_1, 0^+) = D_2^{(\text{Ⅱ})}(x_1, 0^-), \quad \varphi^{(\text{Ⅰ})}(x_1, 0^+) = \varphi^{(\text{Ⅱ})}(x_1, 0^-) \\ &(2)\; D_2^{(\text{Ⅰ})}(x_1, 0^+) - D_2^{(\text{Ⅱ})}(x_1, 0^-) = D_2^{in} \end{aligned} \tag{9-199b}$$

式中D_2^{in}为给定的$\boldsymbol{D}$沿x_2轴的分量。由于结合面上面力也连续，所以在整个界面$|x_1| < \infty$，$x_2 = 0$，故有

$$\sigma_{32}^{(\text{Ⅰ})}(x_1, 0^+) = \sigma_{32}^{(\text{Ⅱ})}(x_1, 0^-) \tag{9-199c}$$

采用 Fourier 变换方法处理。设这一问题满足无穷远处条件的解取下列形式

$$\begin{aligned} &u_3^{(\text{Ⅰ})}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} A_{\text{Ⅰ}}(s) e^{-\alpha^{(\text{Ⅰ})} x_2 + isx_1} ds, \quad \phi^{(\text{Ⅰ})}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} B_{\text{Ⅰ}}(s) e^{-|s| x_2 + isx_1} ds \\ &u_3^{(\text{Ⅱ})}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} A_{\text{Ⅱ}}(s) e^{\alpha^{(\text{Ⅱ})} x_2 + isx_1} ds, \quad \phi^{(\text{Ⅱ})}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\infty} B_{\text{Ⅱ}}(s) e^{|s| x_2 + isx_1} ds \end{aligned} \tag{9-200}$$

式中$u_3^{(\text{Ⅰ})}$位于$x_2 > 0$，$u_3^{(\text{Ⅱ})}$位于$x_2 < 0$的区域，$A_{\text{Ⅰ}}$，$A_{\text{Ⅱ}}$，$B_{\text{Ⅰ}}$，$B_{\text{Ⅱ}}$是4个待定函数。为使运动方程式(9-196)成立，必须

$$\alpha^{(\text{Ⅰ})} = \begin{cases} \sqrt{s^2 - k_1^2}, & |s| > k_1, \\ -i\sqrt{k_1^2 - s^2}, & |s| < k_1; \end{cases} \quad \alpha^{(\text{Ⅱ})} = \begin{cases} \sqrt{s^2 - k_2^2}, & |s| > k_2 \\ -i\sqrt{k_2^2 - s^2}, & |s| < k_2 \end{cases} \tag{9-201}$$

因为在$-\infty < x_1 < \infty$，$x_2 = 0$的整个界面上有$\sigma_{32}^{(\text{Ⅰ})} = \sigma_{32}^{(\text{Ⅱ})}$，$D_2^{(\text{Ⅰ})} = D_2^{(\text{Ⅱ})}$，$\varphi^{(\text{Ⅰ})} = \varphi^{(\text{Ⅱ})}$，所

以按式(9－199)和(9－200)，在界面 $x_2=0$ 上有

$$\int_{-\infty}^{\infty}(-C_{44}^{*(\mathrm{I})}\alpha^{(\mathrm{I})}A_{\mathrm{I}}-e_{15}^{(\mathrm{I})}|s|B_{\mathrm{I}}-C_{44}^{*(\mathrm{II})}\alpha^{(\mathrm{II})}A_{\mathrm{II}}-e_{15}^{(\mathrm{II})}|s|B_{\mathrm{II}})\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx_1}\mathrm{d}s=0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\epsilon_{11}^{(\mathrm{I})}B_{\mathrm{I}}+\epsilon_{11}^{(\mathrm{II})}B_{\mathrm{II}})|s|\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx_1}\mathrm{d}s=0 \tag{9-202}$$

$$\int_{\infty}^{\infty}[(e_{15}^{(\mathrm{I})}/\epsilon_{11}^{(\mathrm{I})})A_{\mathrm{I}}+B_{\mathrm{I}}-(e_{15}^{(\mathrm{II})}/\epsilon_{11}^{(\mathrm{II})})A_{\mathrm{II}}-B_{\mathrm{II}}]\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx_1}\mathrm{d}s=0$$

由上式推出的 4 个待定函数 A_{I}，A_{II}，B_{I}，B_{II} 可用一个函数 $E(s)$ 表示为

$$A_{\mathrm{I}}(s)=-\frac{\Delta_1(s)}{\Delta(s)}E(s),\quad A_{\mathrm{II}}(s)=\frac{\Delta_2(s)}{\Delta(s)}E(s)$$

$$B_{\mathrm{I}}(s)=\epsilon_{11}^{(\mathrm{II})}E(s),\quad B_{\mathrm{II}}(s)=-\epsilon_{11}^{(\mathrm{I})}E(s)$$

$$\Delta(s)=C_{44}^{*(\mathrm{II})}\alpha^{(\mathrm{II})}e_{15}^{(\mathrm{I})}/\epsilon_{11}^{(\mathrm{I})}+C_{44}^{*(\mathrm{I})}\alpha^{(\mathrm{I})}e_{15}^{(\mathrm{II})}/\epsilon_{11}^{(\mathrm{II})} \tag{9-203}$$

$$\Delta_1(s)=C_{44}^{*(\mathrm{II})}\alpha^{(\mathrm{II})}(\epsilon_{11}^{(\mathrm{I})}+\epsilon_{11}^{(\mathrm{II})})+|s|(e_{15}^{(\mathrm{I})}e_{15}^{(\mathrm{II})}-e_{15}^{(\mathrm{II})2}\epsilon_{11}^{(\mathrm{I})}/\epsilon_{11}^{(\mathrm{II})})$$

$$\Delta_2(s)=C_{44}^{*(\mathrm{I})}\alpha^{(\mathrm{I})}(\epsilon_{11}^{(\mathrm{I})}+\epsilon_{11}^{(\mathrm{II})})+|s|(e_{15}^{(\mathrm{I})}e_{15}^{(\mathrm{II})}-e_{15}^{(\mathrm{I})2}\epsilon_{11}^{(\mathrm{II})}/\epsilon_{11}^{(\mathrm{I})})$$

利用式(9－198)定义的位错密度，$E(s)$ 还可表成

$$\psi(x_1)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{i}s[A_{\mathrm{I}}(s)\mathrm{e}^{-\alpha^{(\mathrm{I})}x_2}-A_{\mathrm{II}}(s)\mathrm{e}^{\alpha^{(\mathrm{II})}x_2}]\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx_1}\mathrm{d}s$$

$$E(s)=\frac{\mathrm{i}}{2\pi s}\frac{\Delta}{\Delta_1+\Delta_2}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x_1)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}sx_1}\mathrm{d}x_1 \tag{9-204}$$

利用式(9－197)，可得

$$\begin{aligned}
\sigma_{32}^{(\mathrm{I})}(x_1,0^+)&=\sigma_{32}^{(\mathrm{II})}(x_1,0^-)=\sigma_{32}(x_1,0)=C_{44}^{*(\mathrm{I})}u_{3,2}^{(\mathrm{I})}+e_{15}^{(\mathrm{I})}\phi_{,2}^{(\mathrm{I})}=\\
&-\int_{-\infty}^{\infty}C_{44}^{*(\mathrm{I})}\alpha^{(\mathrm{I})}A_{\mathrm{I}}(s)\mathrm{e}^{-\alpha^{(\mathrm{I})}x_2+\mathrm{i}sx_1}\mathrm{d}s-\int_{-\infty}^{\infty}|s|e_{15}^{(\mathrm{I})}B_{\mathrm{I}}(s)\mathrm{e}^{-sx_2+\mathrm{i}sx_1}\mathrm{d}s=\\
&\int_{-\infty}^{\infty}\left[C_{44}^{*(\mathrm{I})}\alpha^{(\mathrm{I})}\frac{\Delta_1(s)}{\Delta(s)}-|s|e_{15}^{(\mathrm{I})}\epsilon_{11}^{(\mathrm{II})}\right]E(s)\mathrm{e}^{\mathrm{i}sx_1}\mathrm{d}s=\\
&\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{i}}{2\pi s}\left(C_{44}^{*(\mathrm{I})}\alpha^{(\mathrm{I})}\frac{\Delta_1}{\Delta}-|s|e_{15}^{(\mathrm{I})}\epsilon_{11}^{(\mathrm{II})}\right)\frac{\Delta}{\Delta_1+\Delta_2}\int_{-a}^{a}\psi(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s(t-x_1)}\mathrm{d}t\mathrm{d}s=\\
&-\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{-a}^{a}\psi(t)\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{G(s)}{s}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s(t-x_1)}\mathrm{d}s
\end{aligned} \tag{9-205}$$

$$\begin{aligned}G(s)=&-C_{44}^{*(\mathrm{I})}C_{44}^{*(\mathrm{II})}\alpha^{(\mathrm{I})}\alpha^{(\mathrm{II})}(\epsilon_{11}^{(\mathrm{I})}+\epsilon_{11}^{\mathrm{II}})+\\
&|s|(C_{44}^{*(\mathrm{I})}\alpha^{(\mathrm{I})}e_{15}^{(\mathrm{II})2}\epsilon_{11}^{(\mathrm{I})}/\epsilon_{11}^{(\mathrm{II})}+C_{44}^{*(\mathrm{II})}\alpha^{(\mathrm{II})}e_{15}^{(\mathrm{I})2}\epsilon_{11}^{\mathrm{II}}/\epsilon_{11}^{(\mathrm{I})})\end{aligned}$$

通过合适的渐近分析，可以推出

$$\beta_0=-\lim_{s\to\infty}\frac{G(s)}{s}=$$

$$\frac{C_{44}^{*(\mathrm{I})}C_{44}^{*(\mathrm{II})}(\epsilon_{11}^{(\mathrm{I})}+\epsilon_{11}^{(\mathrm{II})})-C_{44}^{*(\mathrm{I})}e_{15}^{(\mathrm{II})2}\frac{\epsilon_{11}^{(\mathrm{I})}}{\epsilon_{11}^{(\mathrm{II})}}-C_{44}^{*(\mathrm{II})}e_{15}^{(\mathrm{I})2}\frac{\epsilon_{11}^{(\mathrm{II})}}{\epsilon_{11}^{(\mathrm{I})}}}{(\epsilon_{11}^{(\mathrm{I})}+\epsilon_{11}^{(\mathrm{II})})(C_{44}^{*(\mathrm{I})}+C_{44}^{*(\mathrm{II})})+\left(2e_{15}^{(\mathrm{I})}e_{15}^{(\mathrm{II})}-e_{15}^{(\mathrm{II})2}\frac{\epsilon_{11}^{(\mathrm{I})}}{\epsilon_{11}^{(\mathrm{II})}}-e_{15}^{(\mathrm{I})2}\frac{\epsilon_{11}^{(\mathrm{II})}}{\epsilon_{11}^{(\mathrm{I})}}\right)} \tag{9-206}$$

式(9－207)对应于应力中的奇异项。我们从式(9－206)中把奇异部分离出来，并利用公式(6－237)和(6－238)，便得

$$\sigma_{32}^{(\mathrm{I})}(x_1,\ 0^+)=\frac{\mathrm{i}\beta_0}{2\pi}\cdot$$

$$\int_{-a}^{a}\psi(t)\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{\infty}\frac{s}{|s|}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s(t-x_1)}\mathrm{d}s-\frac{\mathrm{i}}{2\pi}\int_{-a}^{a}\psi(t)\mathrm{d}t\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{G(s)}{s}+\beta_0\frac{s}{|s|}\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}s(t-x_1)}\mathrm{d}s=$$

$$-\frac{\mathrm{i}\beta_0}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{2\mathrm{i}\psi(t)\mathrm{d}t}{t-x_1}-\frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a}\psi(t)\mathrm{d}t\int_{0}^{\infty}\left[\frac{G(s)}{s}+\beta_0\frac{s}{|s|}\right]\sin[s(t-x_1)]\mathrm{d}s=$$

$$\frac{\beta_0}{\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\psi(t)\mathrm{d}t}{t-x_1}-\frac{\beta_0}{\pi}\int_{-a}^{a}\psi(t)\mathrm{d}t\int_{0}^{\infty}\left[\frac{G(s)}{s\beta_0}+1\right]\sin[s(t-x_1)]\mathrm{d}s \tag{9-207}$$

把上式代入裂纹面上的边界条件式(9－199)，便得

$$\int_{-a}^{a}\frac{\psi(t)\mathrm{d}t}{t-x_1}-\int_{-a}^{a}\psi(t)\mathrm{d}t\int_{0}^{\infty}\left[\frac{G(s)}{s\beta_0}+1\right]\sin[s(t-x_1)]\mathrm{d}s=-\frac{\pi}{\beta_0}\tau^{\mathrm{in}} \tag{9-208}$$

结合条件式(9－198)，式(9－208)可解，它是第一类奇异积分方程，可用 Chebyshev 多项式 $T_k(t/a)$求解，其解可以写成

$$\psi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{\sqrt{1-(t^2/a^2)}}T_k\left(\frac{t}{a}\right) \tag{9-209}$$

式中 c_k 为待定常数，$T_k(x_1)$是第一类 Chebyshev 多项式。鉴于 Chebyshev 多项式的正交性条件，$c_0=0$。把式(9－209)代入(9－208)，便得 c_k 的下列代数方程组

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_kU_{k-1}\left(\frac{x_1}{a}\right)-\sum_{k=1}^{\infty}c_kg_k(x_1)=-\frac{1}{\beta_0}\tau^{\mathrm{in}}(x_1),\ |x_1|<a \tag{9-210}$$

式中 $U_k(x_1)$是第二类 Chebyshev 多项式，

$$g_k(x_1)=\begin{cases}(-1)^m a\displaystyle\int_0^{\infty}\{[G(s)/\beta_0 s]+1\}\mathrm{J}_k(sa)\cos(sx_1)\mathrm{d}s,\ k=2m+1\\(-1)^{m+1}a\displaystyle\int_0^{\infty}\{[G(s)/\beta_0 s]+1\}\mathrm{J}_k(sa)\sin(sx_1)\mathrm{d}s,\ k=2m\end{cases} \tag{9-211}$$

式中 $\mathrm{J}_k(x_1)$是第一类 Bessel 函数。用在 N 个配点 x_n 处满足的方法近似求解式(9－210)，配点取为

$$x_n=a\cos[(n\pi)/(N+1)],\ n=1,\ 2,\ \cdots,\ N \tag{9-212}$$

则式(9－210)化为下列代数方程

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \frac{\sin[kn\pi/(N+1)]}{\sin[k\pi/(N+1)]} - \sum_{k=1}^{\infty} c_k g_k(x_n) = -\frac{1}{\beta_0}\tau^{in}(x_n),\ k,\ n = 1,\ 2,\ \cdots,\ N \tag{9-213}$$

由上式解出 c_k，代入式(9－209)得 $\psi(t)$，再代入式(9－207)，便得到沿界面的应力

$$\sigma_{32}(x_1,\ 0) = [f_k(a,\ x_1)]\{c_k\} = [f_1(a,\ x_1),\ f_2,\ \cdots,\ f_N(a,\ x_1)][c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_N]^{\mathrm{T}}$$

$$f_k(a,\ x_k) = \begin{cases} (-1)^m a\int_0^{\infty}\{\beta_0 + [G(s)/s] + \beta_0\}\mathrm{J}_k(sa)\cos(sx_1)\mathrm{d}s,\ k = 2m+1 \\ (-1)^{m+1} a\int_0^{\infty}\{\beta_0 + [G(s)/s] + \beta_0\}\mathrm{J}_k(sa)\sin(sx_1)\mathrm{d}s,\ k = 2m \end{cases}$$

$$\int_0^{\infty}\mathrm{J}_k(sa)\cos(sx_1)\mathrm{d}s = (-1)^{m+1}a^{2m+1}/[\sqrt{x_1^2-a^2}(\sqrt{x_1^2-a^2}+|\ x_1\ |)^{2m+1}]$$

$$\int_0^{\infty}\mathrm{J}_k(sa)\sin(sx_1)\mathrm{d}s = (-1)^m \mathrm{sgn}(x_1)a^{2m}/[\sqrt{x_1^2-a^2}(\sqrt{x_1^2-a^2}+|\ x_1\ |)^{2m}] \tag{9-214}$$

式中由 $[G(s)/s]+\beta_0$ 部分产生的应力是非奇异的，由 β_0 部分产生的应力是奇异的，所以右裂尖的应力强度因子为

$$K_{\mathrm{III}} = \lim_{x_1\to a^+}\sqrt{2\pi(x_1-a)}\,\sigma_{32}(x_1,\ 0) = \sqrt{\pi a}\sum_{k=1}^{N} c_k \tag{9-215}$$

文献[155]讨论了非线性电介质中的Ⅲ型界面动态裂纹。

第10章

热释电体

10.1 热释电体中静态问题的通解

热释电体的基本理论很早就研究过[156,157]，前面有关章节我们也讨论过。其本构方程见式(3-29)或(4-1)，经典热传导方程为式(3-21)或(4-2)。对于无体积力的定常温度的静态线性问题，用广义位移表示的控制方程和定常热传导方程(式(4-8))为

$$(C_{ijrs}u_r + e_{sij}\varphi)_{,si} = \alpha_{ij}\vartheta_{,i}, \quad (-\epsilon_{is}\varphi + e_{irs}u_r)_{,si} = -\tau_i\vartheta_{,i}, \quad -q_{i,i} = (\lambda_{ij}\vartheta_{,j})_{,i} = 0 \tag{10-1}$$

式中 α_{ij}，τ_i，λ_{ij} 分别为热弹性、热电效应和热传导系数。由上式知，广义应力场依赖于温度场，但温度场不依赖于广义应力场，故可单独求解[158,159]。因 ϑ 是实数，故可令

$$\vartheta(x_1, x_2) = g'(z_T) + \overline{g}'(\overline{z}_T) = 2\mathrm{Re}g'(z_T), \; z_T = x_1 + \mu_T x_2 \tag{10-2}$$

把上式代入式(10-1)的第三式，得

$$(\lambda_{11} + 2\mu_T\lambda_{12} + \mu_T^2\lambda_{22})g'''(z) = 0 \tag{10-3}$$

要 $g'''(z)$ 有非零解，必须

$$\lambda_{11} + 2\mu_T\lambda_{12} + \mu_T^2\lambda_{22} = 0 \tag{10-4}$$

因 $\boldsymbol{\lambda}$ 组成的平方形式是正定的，所以 μ_T 是一对复根，今后取其实部大于零

$$\mu_T = (-\lambda_{12} + \mathrm{i}\lambda_0)/\lambda_{22}, \quad \overline{\mu}_T = (-\lambda_{12} - \mathrm{i}\lambda_0)/\lambda_{22}, \; \lambda_0 = \sqrt{\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2} \tag{10-5}$$

由 Fourier 热传导定理式推出

$$q_i = -2\mathrm{Re}[(\lambda_{i1} + \mu_T\lambda_{i2})g''(z_T)] \tag{10-6}$$

解出温度 ϑ 后，式(10-1)的第一、二式中有关 ϑ 的项便成为已知的右端项，没有右端项的齐次方程的解已在前面第4、5和6章研究过。因而有关定常温度的静态问题的解，只需用齐次方程的通解再叠加由温度场引起的特解 $\boldsymbol{U}_T$ 便可得到。设特解为

$$\boldsymbol{U}_T = [u_{T1}, u_{T2}, u_{T3}, \varphi_T]^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{c}g(z_T), \quad U_{Ti} = c_i g(z_T), \; i = 1, 2, 3, 4 \tag{10-7}$$

对于纯温度场，式中的 $\boldsymbol{c} = [c_1, c_2, c_3, c_4]^{\mathrm{T}}$ 可如下求出。把式(10-7)代入(10-1)的第一、二式，得

$$[C_{j1k1}+\mu_T(C_{j1k2}+C_{j2k1})+\mu_T^2 C_{j2k2}]c_k+[e_{1j1}+\mu_T(e_{2j1}+e_{1j2})+\mu_T^2 e_{2j2}]c_4=\alpha_{1j}+\mu_T\alpha_{2j}$$

$$[e_{1k1}+\mu_T(e_{2k1}+e_{1k2})+\mu_T^2 e_{2k2}]c_k-[\epsilon_{11}+\mu_T(\epsilon_{12}+\epsilon_{21})+\mu_T^2\epsilon_{22}]c_4=-\tau_1-\mu_T\tau_2$$

$$[\boldsymbol{Q}+\mu_T(\boldsymbol{R}+\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}})+\mu_T^2\boldsymbol{T}]\boldsymbol{c}=\boldsymbol{D}(\mu_T)\boldsymbol{c}=\boldsymbol{\chi}_1+\mu_T\boldsymbol{\chi}_2,\ \boldsymbol{\chi}_i=[\alpha_{i1},\alpha_{i2},\alpha_{i3},-\tau_i]^{\mathrm{T}} \tag{10-8}$$

式中 $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{T}$ 仍由式(4-16)表示。由上式可解出 $\boldsymbol{c}$。因温度场而引起的应力和电位移为

$$\begin{aligned}\sigma_{Tij}&=2\mathrm{Re}[(C_{ijkl}c_k+e_{lij}c_4)z_{T,l}-\alpha_{ij}]g'(z_T)\\ D_{Ti}&=2\mathrm{Re}[(e_{ikl}c_k-\epsilon_{il}c_4)z_{T,l}+\tau_i]g'(z_T)\end{aligned} \tag{10-9}$$

则定常温度的静态问题的一般解为

$$\boldsymbol{U}=2\mathrm{Re}[\boldsymbol{Af}(z_*)+\boldsymbol{c}g(z_T)],\quad 或\ \boldsymbol{U}=2\mathrm{Re}[\boldsymbol{A}\langle f(z_*)\rangle\boldsymbol{p}+\boldsymbol{c}g(z_T)] \tag{10-10}$$

本章中为避免和热流矢量混淆，式(4-19b)中的 $\boldsymbol{q}$ 用 $\boldsymbol{p}$ 代替，则有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma}_1&=-2\mathrm{Re}[\boldsymbol{B}\langle\boldsymbol{\mu}\rangle\boldsymbol{F}(z)+\boldsymbol{d}\langle\boldsymbol{\mu}_T\rangle g'(z_T)]\\ \boldsymbol{\Sigma}_2&=2\mathrm{Re}[\boldsymbol{BF}(z)+\boldsymbol{d}g'(z_T)]\end{aligned} \tag{10-11}$$

式中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{d}&=(\boldsymbol{R}^{\mathrm{T}}+\mu_T\boldsymbol{T})\boldsymbol{c}-\boldsymbol{\chi}_2=[-(\boldsymbol{Q}+\mu_T\boldsymbol{R})\boldsymbol{c}+\boldsymbol{\chi}_1]/\mu_T\\ d_j&=(C_{j2kl}c_k+e_{l2j}c_4)z_{T,l}-\alpha_{2j}=-[(C_{j1kl}c_k+e_{l1j}c_4)z_{T,l}-\alpha_{1j}]/\mu_T\\ d_4&=(e_{2kl}c_k-\epsilon_{2l}c_4)z_{T,l}+\tau_2=-[(e_{1kl}c_k-\epsilon_{1l}c_4)z_{T,l}+\tau_2]/\mu_T\end{aligned} \tag{10-12}$$

推导最右边的等式时，利用了式(10-8)。

引入应力函数 $\boldsymbol{\Phi}$

$$\boldsymbol{\Phi}=[\Phi_1,\Phi_2,\Phi_3,\Phi_4]^{\mathrm{T}}=2\mathrm{Re}[\boldsymbol{Bf}(\boldsymbol{z})+\boldsymbol{d}g(z_T)] \tag{10-13}$$

则有

$$\Sigma_{2i}=\Phi_{i,1},\quad \Sigma_{1i}=-\Phi_{i,2} \tag{10-14}$$

式(10-10)、(10-13)、(10-2)和(10-6)构成热释电问题的一般解，结合适当的边界条件，便可求解各种具体问题。对于多连域，广义位移和温度还须满足单值性条件

$$\oint_L \mathrm{d}U_i=0,\quad \oint_L \mathrm{d}T=0 \tag{10-15}$$

10.2 界面绝缘裂纹[158, 159]

10.2.1 一般讨论

设材料Ⅰ位于上半平面 S^+，$x_2>0$；材料Ⅱ位于下半平面 S^-，$x_2<0$；$x_1=0$ 为界面，全

体界面的集合记为 L，界面上存在共线裂纹，其左端点记为 a_k，右端点记为 b_k 其集合记为 L_c。为方便计，其余的部分 $L-L_c$ 称结合面(图 6-1)。无穷远处设广义应力为和法向热流均为零。本章令 $\hat{\boldsymbol{d}}(x_1)$(前面用的符号是 $\boldsymbol{d}$)是 x_1 轴上的上面和下面广义位移的间断值，注意到对任何 j 有 $x_{1j}=x_1$。结合面上，广义位移、广义应力、温度和法向热流连续的条件要求

$$\hat{\boldsymbol{d}}(x_1)=\boldsymbol{U}_{\mathrm{I}}(x_1)-\boldsymbol{U}_{\mathrm{II}}(x_1)=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{I},1}(x_1)=\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{II},1}(x_1)$$
$$T_{\mathrm{I}}(x_1)=T_{\mathrm{II}}(x_1),\quad q_{\mathrm{I}2}(x_1)=q_{\mathrm{II}2}(x_1),\ x\in L-L_c \tag{10-16}$$

设裂纹面上作用的广义力是自平衡的，即作用相同的 $\boldsymbol{\Sigma}_0(x_1)=[t_1^*,t_2^*,t_3^*,-\sigma^*]^{\mathrm{T}}$；法向热流也是连续的，即

$$\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{I},1}(x_1)=\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{II},1}(x_1)=\boldsymbol{\Sigma}_0(x_1),\quad q_{\mathrm{I}2}(x_1)=q_{\mathrm{II}2}(x_1)=q_0(x_1),\ x\in L_c \tag{10-17}$$

由式(10-16)和(10-17)知，在整个 x_1 轴上有

$$\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{I},1}(x_1)=\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{II},1}(x_1),\quad q_{\mathrm{I}2}(x_1)=q_{\mathrm{II}2}(x_1),\ -\infty<x<\infty \tag{10-18}$$

由式(10-5)知，$\lambda_{21}+\mu_T\lambda_{22}=\lambda_{22}(\mu_T-\bar{\mu}_T)/2$。引入实参数 α

$$\alpha=\lambda_{22}(\mu_T-\bar{\mu}_T)/2\mathrm{i}=-\mathrm{i}(\lambda_{21}+\mu_T\lambda_{22}) \tag{10-19}$$

从而式(10-6)可以改写成

$$q_2=-2\mathrm{Re}[(\lambda_{21}+\mu_T\lambda_{22})g''(z_T)]=-2\mathrm{Re}[\mathrm{i}\alpha g''(z_T)]=-\mathrm{i}\alpha g''(z_T)+\mathrm{i}\alpha\bar{g}''(\bar{z}_T) \tag{10-20}$$

由式(10-20)和(10-18)，在裂纹面上有

$$-\mathrm{i}\alpha_{\mathrm{I}}g''_{\mathrm{I}}(x_1)+\mathrm{i}\alpha_{\mathrm{I}}\bar{g}''_{\mathrm{I}}(\bar{x}_1)=-\mathrm{i}\alpha_{\mathrm{II}}g''_{\mathrm{II}}(x_1)+\mathrm{i}\alpha_{\mathrm{II}}\bar{g}''_{\mathrm{II}}(\bar{x}_1) \tag{10-21a}$$

把上式改写为

$$\mathrm{i}\alpha_{\mathrm{I}}g''^{+}_{\mathrm{I}}(x_1)+\mathrm{i}\alpha_{\mathrm{II}}\bar{g}''^{+}_{\mathrm{II}}(x_1)=\mathrm{i}\alpha_{\mathrm{II}}g''^{-}_{\mathrm{II}}(x_1)+\mathrm{i}\alpha_{\mathrm{I}}\bar{g}''^{-}_{\mathrm{I}}(x_1) \tag{10-21b}$$

上面等式的左边和右边，分别为在 $x_2>0$ 和 $x_2<0$ 的解析的函数的边值，而在 $x_1=0$ 上是连续的，因而在全平面解析；又因设 $|z|\to\infty$ 时，$q_{\mathrm{I}2}=q_{\mathrm{II}2}=0$，故该函数为零，从而有

$$\bar{g}''_{\mathrm{II}}(z_T)=-(\alpha_{\mathrm{I}}/\alpha_{\mathrm{II}})g''_{\mathrm{I}}(z_T),\ x_2>0$$
$$\bar{g}''_{\mathrm{I}}(z_T)=-(\alpha_{\mathrm{II}}/\alpha_{\mathrm{I}})g''_{\mathrm{II}}(z_T),\ x_2<0 \tag{10-22a}$$

为简单计，设温度场满足相同的规律，即有

$$\bar{g}'_{\mathrm{II}}(z_T)=-(\alpha_{\mathrm{I}}/\alpha_{\mathrm{II}})g'_{\mathrm{I}}(z_T),\ x_2>0$$
$$\bar{g}'_{\mathrm{I}}(z_T)=-(\alpha_{\mathrm{II}}/\alpha_{\mathrm{I}})g'_{\mathrm{II}}(z_T),\ x_2<0 \tag{10-22b}$$

同理，由式(10-13)、(10-18)和(10-22)，并设无穷远处广义应力为零，则可推出

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{d}_{\mathrm{I}}+\bar{\boldsymbol{d}}_{\mathrm{II}}\alpha_{\mathrm{I}}/\alpha_{\mathrm{II}})g'_{\mathrm{I}}(z)=\bar{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\bar{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{z}),\ x_2>0$$
$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(\boldsymbol{z})+(\boldsymbol{d}_{\mathrm{II}}+\bar{\boldsymbol{d}}_{\mathrm{I}}\alpha_{\mathrm{II}}/\alpha_{\mathrm{I}})g'_{\mathrm{II}}(z)=\bar{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\bar{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{I}}(\boldsymbol{z}),\ x_2<0 \tag{10-23}$$

由式(10-2)和(10-22),可得

$$\begin{aligned}\vartheta_{\mathrm{I}}(x_1)&=g'_{\mathrm{I}}(x_1)+\overline{g}'_{\mathrm{I}}(\overline{x}_1)=g'_{\mathrm{I}}(x_1)-(\alpha_{\mathrm{II}}/\alpha_{\mathrm{I}})g'_{\mathrm{II}}(x_1)\\ \vartheta_{\mathrm{II}}(x_1)&=g'_{\mathrm{II}}(x_1)+\overline{g}'_{\mathrm{II}}(\overline{x}_1)=g'_{\mathrm{II}}(x_1)-(\alpha_{\mathrm{I}}/\alpha_{\mathrm{II}})g'_{\mathrm{I}}(x_1)\end{aligned}\tag{10-24}$$

由式(10-10)和(10-23),可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{U}'_{\mathrm{I}}(x_1)=&\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)+\boldsymbol{c}_{\mathrm{I}}g'_{\mathrm{I}}(x_1)+\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}^{-1}[\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)+\\&(\boldsymbol{d}_{\mathrm{II}}+\overline{\boldsymbol{d}}_{\mathrm{I}}\alpha_{\mathrm{II}}/\alpha_{\mathrm{I}})g'_{\mathrm{II}}(x_1)]-(\alpha_{\mathrm{II}}/\alpha_{\mathrm{I}})\overline{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{I}}g'_{\mathrm{II}}(x_1)\\ \boldsymbol{U}'_{\mathrm{II}}(x_1)=&\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)+\boldsymbol{c}_{\mathrm{II}}g'_{\mathrm{II}}(x_1)+\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{II}}\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}^{-1}[\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)+\\&(\boldsymbol{d}_{\mathrm{I}}+\overline{\boldsymbol{d}}_{\mathrm{II}}\alpha_{\mathrm{I}}/\alpha_{\mathrm{II}})g'_{\mathrm{I}}(x_1)]-(\alpha_{\mathrm{I}}/\alpha_{\mathrm{II}})\overline{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{II}}g'_{\mathrm{I}}(x_1)\end{aligned}\tag{10-25}$$

10.2.2 温度场的解

利用式(10-24),由结合面上的式(10-16)中的温度连续性条件 $\vartheta_{\mathrm{I}}(x_1)=\vartheta_{\mathrm{II}}(x_1)$,可得

$$g'_{\mathrm{I}}(x_1)[1+(\alpha_{\mathrm{I}}/\alpha_{\mathrm{II}})]=g'_{\mathrm{II}}(x_1)[1+(\alpha_{\mathrm{II}}/\alpha_{\mathrm{I}})],\ x\notin L_c\tag{10-26}$$

因此可构造一个除裂纹外的在 z_T 平面上解析的函数 $\theta(z_T)$

$$\theta(z_T)=\begin{cases}[1+(\alpha_{\mathrm{I}}/\alpha_{\mathrm{II}})]g_{\mathrm{I}}(z_T),\ x_2>0,\\ [1+(\alpha_{\mathrm{II}}/\alpha_{\mathrm{I}})]g_{\mathrm{II}}(z_T),\ x_2<0,\end{cases}\ x\notin L_c\tag{10-27}$$

在裂纹面上的热流是

$$\begin{aligned}q_{\mathrm{I}2}=&-\lambda_{2j}\vartheta_{,j}=-\mathrm{i}\alpha_{\mathrm{I}}g''_{\mathrm{I}}(x_1)+\mathrm{i}\alpha_{\mathrm{I}}\overline{g}''_{\mathrm{I}}(\overline{x}_1)=-\mathrm{i}\alpha_{\mathrm{I}}g''_{\mathrm{I}}(x_1)-\mathrm{i}\alpha_{\mathrm{II}}g''_{\mathrm{II}}(x_1)=\\&-\mathrm{i}\frac{\alpha_{\mathrm{I}}\alpha_{\mathrm{II}}}{\alpha_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{II}}}[\theta''^{+}(x_1)+\theta''^{-}(x_1)]\end{aligned}\tag{10-28}$$

从而式(10-17)中的热流边界条件可以写成

$$\theta''^{+}(x_1)+\theta''^{-}(x_1)=\mathrm{i}\frac{\alpha_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{II}}}{\alpha_{\mathrm{I}}\alpha_{\mathrm{II}}}q_0(x_1),\ x\in L_c\tag{10-29}$$

上述问题的解为

$$\begin{aligned}\theta''(z_T)&=\frac{\alpha_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{II}}}{2\pi\alpha_{\mathrm{I}}\alpha_{\mathrm{II}}}Z_0(z_T)\int_{L_c}\frac{q_0(x_1)\mathrm{d}x_1}{Z_0^{+}(x_1)(x_1-z_T)}+Z_0(z_T)C(z_T)\\ Z_0(z_T)&=\prod_{j=1}^{n}(z_T-a_j)^{-1/2}(z_T-b_j)^{-1/2}\end{aligned}\tag{10-30}$$

式中 $C(z_T)$ 为 z_T 的不超过 n 次多项式。由上式知,温度问题可以单独处理。

10.2.3 广义应力场的解

利用式(10-25),由结合面上的式(10-16)中的广义位移的连续性条件 $\mathrm{i}\hat{\boldsymbol{d}}'(x_1)=0$ 可得

$$\boldsymbol{HB}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)+\left[\mathrm{i}\left(\boldsymbol{c}_{\mathrm{I}}+\frac{\alpha_{\mathrm{I}}}{\alpha_{\mathrm{II}}}\bar{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{II}}\right)+\bar{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}\left(\boldsymbol{d}_{\mathrm{I}}+\frac{\alpha_{\mathrm{I}}}{\alpha_{\mathrm{II}}}\bar{\boldsymbol{d}}_{\mathrm{II}}\right)\right]g'_{\mathrm{I}}(x_1)=$$
$$\bar{\boldsymbol{H}}\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)+\left[\mathrm{i}\left(\boldsymbol{c}_{\mathrm{II}}+\frac{\alpha_{\mathrm{II}}}{\alpha_{\mathrm{I}}}\bar{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{I}}\right)+\bar{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}}\left(\boldsymbol{d}_{\mathrm{II}}+\frac{\alpha_{\mathrm{II}}}{\alpha_{\mathrm{I}}}\bar{\boldsymbol{d}}_{\mathrm{I}}\right)\right]g'_{\mathrm{II}}(x_1),\ x\notin L_c \tag{10-31}$$

式中 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}+\bar{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}$，$\boldsymbol{Y}_\alpha=\mathrm{i}\boldsymbol{A}_\alpha\boldsymbol{B}_\alpha^{-1}(\alpha=\mathrm{I},\mathrm{II})$，仍由式(6-9)表示。由式(10-27)和(10-31)知，我们可通过除裂纹外的 x_1 轴进行解析延拓，构造一个除裂纹外的在 z 平面上解析的函数 $\boldsymbol{h}(z)$

$$\boldsymbol{h}(z)=\begin{cases}\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(z)+(\alpha_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{II}})^{-1}\boldsymbol{H}^{-1}[\mathrm{i}(\alpha_{\mathrm{II}}\boldsymbol{c}_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{I}}\bar{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{II}})+\\ \quad\bar{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}(\alpha_{\mathrm{II}}\boldsymbol{d}_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{I}}\bar{\boldsymbol{d}}_{\mathrm{II}})]\theta'(z),\ x_2>0\\ \boldsymbol{H}^{-1}\bar{\boldsymbol{H}}\{\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(z)+(\alpha_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{II}})^{-1}\bar{\boldsymbol{H}}^{-1}[\mathrm{i}(\alpha_{\mathrm{I}}\boldsymbol{c}_{\mathrm{II}}+\alpha_{\mathrm{II}}\bar{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{I}})+\\ \quad\bar{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}}(\alpha_{\mathrm{I}}\boldsymbol{d}_{\mathrm{II}}+\alpha_{\mathrm{II}}\bar{\boldsymbol{d}}_{\mathrm{I}})]\theta'(z)\},\ x_2<0\end{cases} \tag{10-32}$$

利用式(10-22)、(10-23)和(10-32)，由式(10-13)，可得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{I},1}(x_1)&=\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)+\bar{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\bar{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{I}}(\bar{x}_1)+\boldsymbol{d}_{\mathrm{I}}g'_{\mathrm{I}}(x_1)+\bar{\boldsymbol{d}}_{\mathrm{I}}\bar{g}'_{\mathrm{I}}(\bar{x}_1)=\\ &\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)+\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)+\boldsymbol{d}_{\mathrm{I}}g'_{\mathrm{I}}(x_1)+d_{\mathrm{II}}g'_{\mathrm{II}}(x_1)=\\ &\boldsymbol{h}^{+}(x_1)+\bar{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{h}^{-}(x_1)-\boldsymbol{\eta}_1\theta'^{+}(x_1)-\boldsymbol{\eta}_2\theta'^{-}(x_1)\end{aligned} \tag{10-33}$$

式中

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\eta}_1&=-\bar{\boldsymbol{\eta}}_2=(\alpha_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{II}})^{-1}\boldsymbol{H}^{-1}\{[\mathrm{i}(\alpha_{\mathrm{II}}\boldsymbol{c}_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{I}}\bar{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{II}})+\bar{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}(\alpha_{\mathrm{II}}\boldsymbol{d}_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{I}}\bar{\boldsymbol{d}}_{\mathrm{II}})]-\alpha_{\mathrm{II}}\boldsymbol{d}_{\mathrm{I}}\}\\ \boldsymbol{\eta}_2&=-\bar{\boldsymbol{\eta}}_1=(\alpha_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{II}})^{-1}\bar{\boldsymbol{H}}^{-1}\{[\mathrm{i}(\alpha_{\mathrm{I}}\boldsymbol{c}_{\mathrm{II}}+\alpha_{\mathrm{II}}\bar{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{I}})+\bar{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}}(\alpha_{\mathrm{I}}\boldsymbol{d}_{\mathrm{II}}+\alpha_{\mathrm{II}}\bar{\boldsymbol{d}}_{\mathrm{I}})]-\alpha_{\mathrm{I}}\boldsymbol{d}_{\mathrm{II}}\}\end{aligned} \tag{10-34}$$

把式(10-33)代入式(10-17)中裂纹面上的广义应力边界条件，便得

$$\boldsymbol{h}^{+}(x_1)+\bar{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H}\boldsymbol{h}^{-}(x_1)=\boldsymbol{\Sigma}_0(x_1)+\boldsymbol{\eta}_1\theta'^{+}(x_1)+\boldsymbol{\eta}_2\theta'^{-}(x_1) \tag{10-35}$$

因温度场已解出，故上式的右端项已知。上式是非齐次的 Riemann - Hilbert 边值问题，形式上和式(6-22)完全一致，仅右端项的不同。按第二种解法的式(6-28)，上式的解为

$$\begin{aligned}&\bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}(z)=\boldsymbol{Q}(z)\left[\boldsymbol{C}(z)+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\boldsymbol{\Sigma}''_0(x_1)\mathrm{d}x_1}{\boldsymbol{Q}^{+}(x_1)(x_1-z)}\right]\\ &\boldsymbol{\Sigma}''_0(x_1)=\bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}'_0(x_1)=\bar{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\Sigma}_0(x_1)+\boldsymbol{\eta}_1\theta'^{+}(x_1)+\boldsymbol{\eta}_2\theta'^{-}(x_1)]\\ &\boldsymbol{Q}(z)=\langle Y_0^{(i)}(z)\rangle,\ Y_0^{(i)}(z)=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(z-a_k)(z-b_k)}}\left(\frac{z-b_k}{z-a_k}\right)^{\mathrm{i}\varepsilon_i}\end{aligned} \tag{10-36}$$

由式(10-35)还可看出，热释电材料得出的齐次方程和式(6-11)完全相同，和材料的温度参数无关，因而本征值和本征矢量也相同。所以式(10-36)中的 $\boldsymbol{Q}(z)$ 和 $\boldsymbol{\Omega}$ 仍由式(6-20)表示。

在结合面上有 $\boldsymbol{h}^{+}(x_1)=\boldsymbol{h}^{-}(x_1)=\boldsymbol{h}(x_1)$，$\theta'^{+}(x_1)=\theta'^{-}(x_1)=\theta'(x_1)$，所以其上的面力按式(10-33)为

$$\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1) = \boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{I},1}(x_1) = (\boldsymbol{I} + \overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\boldsymbol{H})\boldsymbol{h}(x_1) - (\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2)\theta'(x_1),\ x \in L - L_c \tag{10-37}$$

由式(10-25)易于求出裂尖后方的广义张开位移为

$$\hat{\boldsymbol{d}}'(x_1) = \boldsymbol{U}'_{\mathrm{I}}(x_1) - \boldsymbol{U}'_{\mathrm{II}}(x_1) = -\mathrm{i}\boldsymbol{H}[\boldsymbol{h}^+(x_1) - \boldsymbol{h}^-(x_1)],\ x \notin L_c \tag{10-38}$$

10.2.4 单个界面裂纹

现在讨论一个长 $2a$ 的裂纹，坐标原点取在裂纹的中点，裂纹面上作用均匀的广义应力 $-\boldsymbol{\Sigma}_0$ 和法向热流 $-q_0$，无穷远处 $\boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_2 = \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0},\ \vartheta = 0$。由式(10-30)，易于得到

$$\theta''(z_T) = -\mathrm{i}q_0^*\left(1 - \frac{z_T}{\sqrt{z_T^2 - a^2}}\right),\ q_0^* = q_0\frac{\alpha_{\mathrm{I}} + \alpha_{\mathrm{II}}}{2\alpha_{\mathrm{I}}\alpha_{\mathrm{II}}} \tag{10-39a}$$

上式满足无穷远处 $\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$ 和裂纹面上的边界条件。由式(10-39a)可推出

$$\theta'(z_T) = -\mathrm{i}q_0^*(z_T - \sqrt{z_T^2 - a^2}) \tag{10-39b}$$

按式(10-27)解出

$$g''_{\mathrm{I}}(z_T) = \frac{\alpha_{\mathrm{II}}}{\alpha_{\mathrm{I}} + \alpha_{\mathrm{II}}}\theta''(z_T),\quad g''_{\mathrm{II}}(z_T) = \frac{\alpha_{\mathrm{I}}}{\alpha_{\mathrm{I}} + \alpha_{\mathrm{II}}}\theta''(z_T) \tag{10-39c}$$

由于式(10-36)是解耦的，所以有

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{h}(z) = \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{Q}(z)\left[\boldsymbol{C}(z) + \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{\boldsymbol{\Sigma}''_0(x_1)\mathrm{d}x_1}{\boldsymbol{Q}^+(x_1)(x_1 - z)}\right] \\
&\boldsymbol{\Sigma}''_0(x_1) = \overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}'_0(x_1) = \overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}[-\boldsymbol{\Sigma}_0 + \boldsymbol{\eta}_1\theta'^+(x_1) + \boldsymbol{\eta}_2\theta'^-(x_1)] = \\
&\qquad -\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\{\boldsymbol{\Sigma}_0 + \mathrm{i}q_0^*[(\boldsymbol{\eta}_1 + \boldsymbol{\eta}_2)x_1 + \mathrm{i}(\boldsymbol{\eta}_2 - \boldsymbol{\eta}_1)\sqrt{a^2 - x_1^2}]\} \\
&\boldsymbol{Q}(z) = \langle Y_0^{(j)}(z)\rangle,\ Y_0^{(j)}(z) = (z^2 - a^2)^{-1/2}[(z-a)/(z+a)]^{\mathrm{i}\varepsilon_j}
\end{aligned} \tag{10-40}$$

上式中的积分共有三种类型，按式(1-131)都可以积出，这三种类型的积分是

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{d}x_1}{Y_0^{(j)+}(x_1)(x_1 - z)} = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_j}}\left[\frac{1}{Y_0^{(j)}(z)} - (z + 2\mathrm{i}\varepsilon_j a)\right] \\
&\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-a}^{a}\frac{x_1\mathrm{d}x_1}{Y_0^{(j)+}(x_1)(x_1 - z)} = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_j}}\left\{\frac{z}{Y_0^{(j)}(z)} - \left[z^2 + 2\mathrm{i}\varepsilon_j az - \frac{a^2}{2}(1 + 4\varepsilon_j^2)\right]\right\} \\
&\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-a}^{a}\frac{\mathrm{i}\sqrt{a^2 - x_1^2}\,\mathrm{d}x_1}{Y_0^{(j)+}(x_1)(x_1 - z)} = \frac{1}{1 - \mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_j}}\left\{\frac{\sqrt{z^2 - a^2}}{Y_0^{(j)}(z)} - [z^2 + 2\mathrm{i}\varepsilon_j az - a^2(1 + 2\varepsilon_j^2)]\right\}
\end{aligned} \tag{10-41}$$

上式中的第三式在使用式(1-131)时，因 $\lim\limits_{z\to x^-}\sqrt{z^2 - a^2} = -\lim\limits_{z\to x^+}\sqrt{z^2 - a^2} = \mathrm{i}\sqrt{a^2 - x_1^2}$，所以其中的 $g^* = -1$。利用式(10-41)，式(10-40)可化为

$$\boldsymbol{h}(z)=\boldsymbol{\Omega Q}(z)(\boldsymbol{C}_1 z+\boldsymbol{C}_0)-\boldsymbol{\Omega}\left\langle\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_j}}\right\rangle\langle 1-(z+2\mathrm{i}\varepsilon_j a)Y_0^{(j)}(z)\rangle\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_0-$$
$$\mathrm{i}q_0^*\boldsymbol{\Omega}\left\langle\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_j}}\right\rangle\left\langle z-\left[z^2+2\mathrm{i}\varepsilon_j az-\frac{a^2}{2}(1+4\varepsilon_j^2)\right]Y_0^{(j)}(z)\right\rangle\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)-$$
$$\mathrm{i}q_0^*\boldsymbol{\Omega}\left\langle\frac{1}{1-\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_j}}\right\rangle\langle\sqrt{z^2-a^2}-[z^2+2\mathrm{i}\varepsilon_j az-a^2(1+2\varepsilon_j^2)]Y_0^{(j)}(z)\rangle\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$$
$$(10-42)$$

当$|z|\to\infty$无穷远处时，$\boldsymbol{Q}(z)\to\boldsymbol{I}/z$，$\theta'(z_T)\to 0$，而按式(10-32)，边界条件要求$\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1)=\boldsymbol{0}$。按式(10-37)可推出

$$\boldsymbol{C}_1=\mathrm{i}q_0^*\left\langle\frac{2\mathrm{i}\,\varepsilon_j a}{1+\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_j}}\right\rangle\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)+\mathrm{i}q_0^*\left\langle\frac{2\mathrm{i}\,\varepsilon_j a}{1-\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_j}}\right\rangle\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)\langle 2\mathrm{i}\,\varepsilon_j a\rangle \quad (10-43)$$
$$C_1^{(j)}=\mathrm{i}q_0^*\left[\frac{2\mathrm{i}\varepsilon_j a}{1+\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_j}}\overline{\Omega}_{jk}^{\mathrm{T}}(\eta_{1k}+\eta_{2k})+\frac{2\mathrm{i}\varepsilon_j a}{1-\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_j}}\overline{\Omega}_{jk}^{\mathrm{T}}(\eta_{2k}-\eta_{1k})\right],\ \overline{\Omega}_{jk}^{\mathrm{T}}=\Omega_{kj}$$

如无穷远处存在常应力，上述公式需要修正。把式(10-43)代入(10-42)，便得

$$\boldsymbol{h}(z)=\boldsymbol{\Omega Q}(z)\boldsymbol{C}_0-\boldsymbol{\Omega}\left\langle\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_j}}\right\rangle\langle 1-(z+2\mathrm{i}\,\varepsilon_j a)Y_0^{(j)}(z)\rangle\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_0-$$
$$\mathrm{i}q_0^*\boldsymbol{\Omega}\left\langle\frac{1}{1+\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_j}}\right\rangle\left\langle z-\left[z^2-\frac{a^2}{2}(1+4\varepsilon_j^2)\right]Y_0^{(j)}(z)\right\rangle\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)-$$
$$\mathrm{i}q_0^*\boldsymbol{\Omega}\left\langle\frac{1}{1-\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_j}}\right\rangle\langle\sqrt{z^2-a^2}-[z^2-a^2(1+2\varepsilon_j^2)]Y_0^{(j)}(z)\rangle\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$$
$$(10-44)$$

$\boldsymbol{C}_0$ 要由广义位移单值性条件确定。由式(10-38)知，这等价于要求

$$\int_{-a}^{a}\boldsymbol{H}[\boldsymbol{h}^+(x_1)-\boldsymbol{h}^-(x_1)]\mathrm{d}x_1=0,\quad \int_{-a}^{a}H_{ij}[h_j^+(x_1)-h_j^-(x_1)]\mathrm{d}x_1=0 \quad (10-45)$$

在裂纹面上有$\langle Y_0^{(*)-}(x_1)\rangle=-\langle \mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_*}Y_0^{(*)+}(x_1)\rangle$或$\boldsymbol{Q}^+-\boldsymbol{Q}^-=\langle 1+\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_*}\rangle\boldsymbol{Q}^+$。利用式(1-136)

$$\int_{-a}^{a}\frac{x^n}{\sqrt{a^2-x^2}}\left(\frac{a-x}{a+x}\right)^{\mathrm{i}\varepsilon}\mathrm{d}x=\begin{cases}\pi/\cosh\pi\varepsilon,\ n=0\\ -2\mathrm{i}\pi a\varepsilon/\cosh\pi\varepsilon,\ n=1\\ (1-4\varepsilon^2)\pi a^2/2\cosh\pi\varepsilon,\ n=2\end{cases}$$

以及在裂纹上下面分别有$\int_{-a}^{a}\sqrt{x_1^2-a^2}\,\mathrm{d}x_1=\pm\mathrm{i}\pi a^2/2$，由单值性条件可推出

$$\boldsymbol{C}_0=\mathrm{i}q_0^*a^2\left\langle\frac{4\varepsilon_j^2}{1+\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_j}}\right\rangle\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\eta}_1+\boldsymbol{\eta}_2)+\mathrm{i}q_0^*a^2\left\langle\frac{1+8\varepsilon_j^2+2\mathrm{i}\cosh\pi\varepsilon_j}{2(1-\mathrm{e}^{2\pi\varepsilon_j})}\right\rangle\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{\eta}_2-\boldsymbol{\eta}_1)$$
$$(10-46)$$

如只关心 x_1 轴上的物理量和应力强度因子，则无需求出 z_j 平面上的完整解，只需令 z 平面上解中的 $z=x_1$ 即可。按式(6-38)的定义，在端点 $x_1=b_k$ 处的应力强度因子为

$$\boldsymbol{K}=[K_{\mathrm{II}},K_{\mathrm{I}},K_{\mathrm{III}},K_{\mathrm{D}}]^{\mathrm{T}}=\lim_{x_1\to b_k}\sqrt{2\pi(x_1-b_k)}\boldsymbol{\Omega}\langle(x_1-b_k)^{-\mathrm{i}\varepsilon_j}\rangle\boldsymbol{\Omega}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1) \quad (10-47)$$

式中 $\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1)$ 由式(10-37)确定。

10.2.5 均匀介质中的单个裂纹

对于均匀介质有

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}=\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}=\boldsymbol{A},\quad \boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}=\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}=\boldsymbol{B},\quad \boldsymbol{Y}_{\mathrm{I}}=\boldsymbol{Y}_{\mathrm{II}}=\boldsymbol{Y},\quad \boldsymbol{H}=\overline{\boldsymbol{H}},\quad \boldsymbol{c}_{\mathrm{I}}=\boldsymbol{c}_{\mathrm{II}}=\boldsymbol{c},\quad \boldsymbol{d}_{\mathrm{I}}=\boldsymbol{d}_{\mathrm{II}}=\boldsymbol{d}$$

$$\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{I}}=\boldsymbol{\eta}_{\mathrm{II}}=\boldsymbol{\eta},\quad \boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{I}}=\boldsymbol{\alpha}_{\mathrm{II}}=\boldsymbol{\alpha},\quad q_0^*=q_0/\alpha,\quad \varepsilon_j=0,\quad Y_0^{(j)}=1/\sqrt{z_j^2-a^2},\quad \boldsymbol{C}_0=\boldsymbol{0} \tag{10-48}$$

从而由式(10-39)和(10-44),可直接推出单个裂纹问题的解为

$$\theta''(z_T)=-\mathrm{i}q_0^*\left(1-\frac{z_T}{\sqrt{z_T^2-a^2}}\right),\quad \theta'(z_T)=-\mathrm{i}q_0^*\left(z_T-\sqrt{z_T^2-a^2}\right)$$

$$g''_{\mathrm{I}}(z_T)=g''_{\mathrm{II}}(z_T)=\frac{1}{2}\theta''(z_T)=-\frac{\mathrm{i}q_0^*}{2}\left(1-\frac{z_T}{\sqrt{z_T^2-a^2}}\right) \tag{10-49}$$

$$\boldsymbol{h}(z)=-\frac{1}{2}\boldsymbol{\Omega}\langle 1-zY_0^{(j)}(z)\rangle\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_0-\mathrm{i}q_0^*\boldsymbol{\Omega}\left\langle z-\frac{2z^2-a^2}{2}Y_0^{(j)}(z)\right\rangle\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}$$

按式(10-37),对于均匀介质,在 $x_1=a$ 处的广义应力的渐近场为

$$\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1)=\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{I},1}(x_1)=2\boldsymbol{h}(x_1)-2\boldsymbol{\eta}\theta'(x_1)=$$

$$\boldsymbol{\Omega}\left\langle\sqrt{\frac{a}{2}}\frac{1}{\sqrt{x_1-a}}\right\rangle\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_0+\mathrm{i}q_0^*a\boldsymbol{\Omega}\left\langle\sqrt{\frac{a}{2}}\frac{1}{\sqrt{x_1-a}}\right\rangle\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta}$$

在 $x_1=a$ 处的应力强度因子为

$$\boldsymbol{K}=[K_{\mathrm{II}},K_{\mathrm{I}},K_{\mathrm{III}},K_{\mathrm{D}}]^{\mathrm{T}}=\lim_{x_1\to b_j}\sqrt{2\pi(x_1-a)}\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1)= \tag{10-50}$$

$$\sqrt{\pi a}(\boldsymbol{\Omega}\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_0+\mathrm{i}q_0^*a\boldsymbol{\Omega}\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\eta})=\sqrt{\pi a}(\boldsymbol{\Sigma}_0+\mathrm{i}q_0^*a\boldsymbol{\eta})$$

10.2.6 界面绝缘裂纹和广义位错与广义集中力的相互作用

设材料Ⅰ占据上半平面 S^+,材料Ⅱ占据下半平面 S^-, $x=0$ 为界面,界面上存在集合为 L_c 的共线裂纹。设在材料Ⅱ的点 $z_0(x_{10},x_{20})$ 处有广义位错与广义集中力。按式(7-6)和(7-10),在无裂纹的双材料中,此广义位错与广义集中力在界面上产生的广义应力为

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{I}2}=\boldsymbol{\Sigma}_{\mathrm{II}2}=\boldsymbol{\Sigma}_2=\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{I},1}=2\mathrm{Re}\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)$$

$$\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)=\boldsymbol{H}^{-1}(\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}+\boldsymbol{Y}_{\mathrm{II}})\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\left\langle\frac{1}{x_1-z_0}\right\rangle\boldsymbol{c}=$$

$$\boldsymbol{H}^{-1}(\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}+\boldsymbol{Y}_{\mathrm{II}})\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\left\langle\frac{1}{x_1-z_0}\right\rangle\left[\frac{1}{2\pi}\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}^{-1}(\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}+\boldsymbol{Y}_{\mathrm{II}})^{-1}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\right]=$$

$$\left\langle\frac{1}{x_1-z_0}\right\rangle\left[\frac{1}{2\pi}\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\boldsymbol{H}^{-1}(\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}+\boldsymbol{Y}_{\mathrm{II}})\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\right] \tag{10-51}$$

式中 c 的公式见式(7 - 6)。由于实际上裂纹 L_c 上的应力为零,所以在裂纹上应当施加载荷

$$t_2=-\boldsymbol{\Sigma}_2=-2\mathrm{Re}\left\{\left\langle\frac{1}{x_1-z_0}\right\rangle\left[\frac{1}{2\pi}\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{b}+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\boldsymbol{H}^{-1}(\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{II}}+\boldsymbol{Y}_{\mathrm{II}})\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{P}\right]\right\},\ x_1\in L_c \tag{10 - 52}$$

以保证 L_c 上的应力为零。由式(10 - 51)知,广义位错与广义集中力的影响相等于在裂纹面上增加了面力 t_2,而对界面上的热流没有影响。这一问题的解已由 10.2 节讨论过,其解为

$$\begin{aligned}
&\theta''(z_T)=\frac{\alpha_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{II}}}{2\pi\alpha_{\mathrm{I}}\alpha_{\mathrm{II}}}Z_0(z_T)\int_{L_c}\frac{q_0(x_1)\mathrm{d}x_1}{Z_0^+(x_1)(x_1-z_T)}+Z_0(z_T)C(z_T)\\
&\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}(z)=\boldsymbol{Q}(z)\left[\boldsymbol{C}(z)+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\boldsymbol{\Sigma}''_0(x_1)\mathrm{d}x_1}{\boldsymbol{Q}^+(x_1)(x_1-z)}\right]\\
&\boldsymbol{\Sigma}''_0(x_1)=\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}'_0(x_1)=\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\Sigma}_0(x_1)+\boldsymbol{t}_2(x_1)+\boldsymbol{\eta}_1\theta'^+(x_1)+\boldsymbol{\eta}_2\theta'(x_1)]\\
&\boldsymbol{Q}(z)=\langle Y_0^{(i)}(z)\rangle,\ Y_0^{(i)}(z)=\prod_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(z-a_k)(z-b_k)}}\left(\frac{z-b_k}{z-a_k}\right)^{\mathrm{i}\varepsilon_i}\\
&Z_0(z_T)=\prod_{j=1}^{n}(z_T-a_j)^{-1/2}(z_T-b_j)^{-1/2}
\end{aligned} \tag{10 - 53}$$

10.2.7 其他边界条件的裂纹

和第 6 章一样,以下还可讨论其他边界条件下的裂纹。

(1) 开路裂纹。此时裂纹面上的边界条件式(10 - 18)改为

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{I}2}(x_1)=\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{II}2}(x_1)=\boldsymbol{\sigma}_{02}(x_1),\quad q_{\mathrm{I}2}(x_1)=q_{\mathrm{II}2}(x_1)=q_0(x_1)\\
&D_{\mathrm{I}2}(x_1)=D_{\mathrm{II}2}(x_1),\quad E_{\mathrm{I}1}(x_1)=E_{\mathrm{II}1}(x_1),\ x\in L_c
\end{aligned} \tag{10 - 54}$$

Gao 和 Wang[160]详细分析了这一问题。

(2) 共线刚性夹杂。此时刚性夹杂面上的边界条件为

$$\begin{aligned}
&u_{\mathrm{I}j,1}(x_1)=u_{\mathrm{II}j,1}(x_1)=\omega\delta_{j2},\quad q_{\mathrm{I}2}(x_1)=q_{\mathrm{II}2}(x_1)=q_0(x_1)\\
&D_{\mathrm{I}2}(x_1)=D_{\mathrm{II}2}(x_1),\quad E_{\mathrm{I}1}(x_1)=E_{\mathrm{II}1}(x_1),\ x\in L_c
\end{aligned} \tag{10 - 55}$$

采用本章和第 6 章的理论,上述问题都可解决。

(3) 文献[161]讨论了热释电问题的接触区域模型,[162]讨论了动态问题的 Green 函数,还有其他许多论文研究了不同问题。

10.3 点热源引起的温度场

10.3.1 均匀材料中的点热源[9, 39, 158, 159]

设在无限均匀压电体中,在点 $z_0(x_{10},x_{20})$ 处有一强度为 M 的点热源。由式(10 - 1)~

(10 - 6)知,电弹性方程不影响热传导方程,热传导方程可独立求解,因此可令

$$\vartheta(x_1,\ x_2) = 2\mathrm{Re}g'(z_T),\ z_T = x_1 + \mu_T x_2 \tag{10-56}$$

按式(10 - 5)和(10 - 6),有

$$q_1 = -2\mathrm{Re}(\lambda_{11} + \mu_T\lambda_{12})g''(z_T) = 2\mathrm{Re}[\mathrm{i}\lambda_0\mu_T g''(z_T)] = 2\mathrm{Re}[\mathrm{i}\lambda_0 g'_{,2}(z_T)]$$

$$q_2 = -2\mathrm{Re}(\lambda_{21} + \mu_T\lambda_{22})g''(z_T) = -2\mathrm{Re}[\mathrm{i}\lambda_0 g''(z_T)] = -2\mathrm{Re}[\mathrm{i}\lambda_0 g'_{,1}(z_T)]$$

$$\lambda_0 = \sqrt{\lambda_{11}\lambda_{22} - \lambda_{12}^2} = \lambda_{22}(\mu_T - \bar{\mu}_T)/2\mathrm{i} = -\mathrm{i}(\lambda_{21} + \mu_T\lambda_{22}) = \mathrm{i}(\lambda_{11} + \mu_T\lambda_{12})\mu_T^{-1} \tag{10-57}$$

利用式(10 - 57)和(10 - 6),注意到 $n_1 = \mathrm{d}x_2/\mathrm{d}s$, $n_2 = -\mathrm{d}x_1/\mathrm{d}s$, 则有

$$\begin{aligned} q_n\mathrm{d}s &= (q_1 n_1 + q_2 n_2)\mathrm{d}s = q_1\mathrm{d}x_2 - q_2\mathrm{d}x_1 = \\ &2\mathrm{Re}[\mathrm{i}\lambda_0 g'_{,2}(z_T)]\mathrm{d}x_2 + 2\mathrm{Re}[\mathrm{i}\lambda_0 g'_{,1}(z_T)]\mathrm{d}x_1 = 2\mathrm{Red}[\mathrm{i}\lambda_0 g'(z_T)] \end{aligned} \tag{10-58}$$

取 $g'(z_T) = c\ln(z_T - z_{T0}) = g'_0(z_T)$, 则 $g''(z_T) = c/(z_T - z_{T0})$, 代入下式可确定 c 值。因为热源强度为 M,利用 1.5.1 节的结果,便有

$$M = -\oint \boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s = -2\mathrm{Im}[\lambda_0 g'(z_T)]_0^{2\pi} = -2\mathrm{Im}[\lambda_0 c\ln(z_T - z_{T0})]_0^{2\pi} = -4\pi\lambda_0 c \tag{10-59}$$

$$c = -M/4\pi\lambda_0$$

从而得

$$\vartheta = g'_0(z_T) = -\frac{M}{4\pi\lambda_0}\ln(z_T - z_{T0}),\ z_{T0} = x_{10} + \mu_T x_{20} \tag{10-60}$$

10.3.2 双材料中的点热源[9, 39, 158, 159]

设材料Ⅰ占据上半平面 S^+,材料Ⅱ占据下半平面 S^-, $x = 0$ 为界面,在材料Ⅱ的点 z_0 $(x_{10},\ x_{20})$处有一点热源(也是奇点载荷的一种),电热源问题可采用和等温电介质中奇点载荷相类似的解法。设 $g_0(z_T)$是材料Ⅱ占据整个空间时的解,它在材料Ⅰ内是解析的,材料Ⅱ内的点 z_0 是一分支点。双材料中的点热源的解可取为

$$g'(z_T) = \begin{cases} g'_{\mathrm{I}}(z_T),\ z_T \in S^+ \\ g'_{\mathrm{II}}(z_T) + g'_0(z_T),\ z_T \in S^- \end{cases} \tag{10-61}$$

式中 $g'_{\mathrm{I}}(z_T)$, $g'_{\mathrm{II}}(z_T)$分别是 S^+, S^- 中的解析函数。按式(10 - 20),在整个界面 $x_1 = 0$ 上热流连续的条件要求

$$\alpha_{\mathrm{I}} g''_{I}(x_1) - \alpha_{\mathrm{I}}\overline{g''_{\mathrm{I}}(x_1)} = \alpha_{\mathrm{II}} g''_{\mathrm{II}}(x_1) - \alpha_{\mathrm{II}}\overline{g''_{\mathrm{II}}(x_1)} + \alpha_{\mathrm{II}} g''_0(x_1) - \alpha_{\mathrm{II}}\overline{g''_0(x_1)} \tag{10-62a}$$

改写上式为

$$\alpha_{\mathrm{I}} g''_{\mathrm{I}}(x_1) + \alpha_{\mathrm{II}}\bar{g}''_{\mathrm{II}}(x_1) - \alpha_{\mathrm{II}} g''_0(x_1) = \alpha_{\mathrm{II}} g''_{\mathrm{II}}(x_1) + \alpha_{\mathrm{I}}\bar{g}''_{\mathrm{I}}(x_1) - \alpha_{\mathrm{II}}\bar{g}''_0(x_1) \tag{10-62b}$$

则上式左、右端分别是 S^+，S^- 内的解析函数。若设 $|z|\to\infty$ 时，$q\to 0$，则由上式导出

$$\alpha_{\mathrm{I}} g''_{\mathrm{I}}(z_T)+\alpha_{\mathrm{II}}\overline{g}''_{\mathrm{II}}(z_T)-\alpha_{\mathrm{II}} g''_0(z_T)=0,\quad \alpha_{\mathrm{II}} g''_{\mathrm{II}}(z_T)+\alpha_{\mathrm{I}}\overline{g}''_{\mathrm{I}}(z_T)-\alpha_{\mathrm{II}}\overline{g}''_0(z_T)=0 \tag{10-63}$$

界面 $x_1=0$ 上温度连续的条件要求

$$g'_{\mathrm{I}}(x_1)+\overline{g'_{\mathrm{I}}(x_1)}=g'_{\mathrm{II}}(x_1)+g'_0(x_1)+\overline{g'_{\mathrm{II}}(x_1)}+\overline{g'_0(x_1)} \tag{10-64}$$

设 $|z|\to\infty$ 时 $T\to 0$，由上式可导出

$$g'_{\mathrm{I}}(z_T)-\overline{g}'_{\mathrm{II}}(z_T)-g'_0(z_T)=0,\quad g'_{\mathrm{II}}(z_T)-\overline{g}'_{\mathrm{I}}(z_T)+\overline{g}'_0(z_T)=0 \tag{10-65}$$

同时式(10-63)对 g'_i 也成立，再结合式(10-65)，解得

$$\vartheta=g'(z_T)=\begin{cases}g'_{\mathrm{I}}(z_T)=\dfrac{2\alpha_{\mathrm{II}}}{\alpha_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{II}}}g'_0(z_T),\ z\in S^+\\[2ex] g'_{\mathrm{II}}(z_T)+g'_0(z_T)=\dfrac{\alpha_{\mathrm{II}}-\alpha_{\mathrm{I}}}{\alpha_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{II}}}\overline{g}'_0(z_T)+g'_0(z_T),\ z\in S^-\end{cases} \tag{10-66}$$

所以在 $x_2=0$ 的界面上有

$$q_2=-\mathrm{i}\alpha_{\mathrm{I}} g''_{\mathrm{I}}(x_1)+\mathrm{i}\alpha_{\mathrm{I}}\overline{g}''_{\mathrm{I}}(x_1)=-\mathrm{i}\frac{2\alpha_{\mathrm{I}}\alpha_{\mathrm{II}}}{\alpha_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{II}}}[g''_0(x_1)-\overline{g}''_0(x_1)] \tag{10-67}$$

类似于式(10-18)和(10-23)，由整个界面上广义应力连续和无穷远为零的条件，可得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(z)-\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{II}}\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{II}}(z)-\left(\frac{\alpha_{\mathrm{II}}-\alpha_{\mathrm{I}}}{\alpha_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{II}}}\overline{\boldsymbol{d}}_{\mathrm{II}}-\frac{2\alpha_{\mathrm{II}}}{\alpha_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{II}}}\boldsymbol{d}_{\mathrm{I}}+\boldsymbol{d}_{\mathrm{II}}\right)g'_0(z)=0\\&\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(z)-\overline{\boldsymbol{B}}_{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{I}}(z)+\left(\frac{\alpha_{\mathrm{II}}-\alpha_{\mathrm{I}}}{\alpha_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{II}}}\boldsymbol{d}_{\mathrm{II}}-\frac{2\alpha_{\mathrm{II}}}{\alpha_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{II}}}\overline{\boldsymbol{d}}_{\mathrm{I}}+\overline{\boldsymbol{d}}_{\mathrm{II}}\right)\overline{g}'_0(z)=0\end{aligned} \tag{10-68}$$

由整个界面上位移和电势连续的条件，可得

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{A}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(z)-\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{II}}\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{II}}(z)-\left(\frac{\alpha_{\mathrm{II}}-\alpha_{\mathrm{I}}}{\alpha_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{II}}}\overline{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{II}}-\frac{2\alpha_{\mathrm{II}}}{\alpha_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{II}}}\boldsymbol{c}_{\mathrm{I}}+\boldsymbol{c}_{\mathrm{II}}\right)g'_0(z)=0\\&\boldsymbol{A}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(z)-\overline{\boldsymbol{A}}_{\mathrm{I}}\overline{\boldsymbol{F}}_{\mathrm{I}}(z)+\left(\frac{\alpha_{\mathrm{II}}-\alpha_{\mathrm{I}}}{\alpha_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{II}}}\boldsymbol{c}_{\mathrm{II}}-\frac{2\alpha_{\mathrm{II}}}{\alpha_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{II}}}\overline{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{I}}+\overline{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{II}}\right)\overline{g}'_0(z)=0\end{aligned} \tag{10-69}$$

由上两式解得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(z)=&\ \mathrm{i}\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{H}^{-1}\left(\frac{\alpha_{\mathrm{II}}-\alpha_{\mathrm{I}}}{\alpha_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{II}}}\overline{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{II}}-\frac{2\alpha_{\mathrm{II}}}{\alpha_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{II}}}\boldsymbol{c}_{\mathrm{I}}+\boldsymbol{c}_{\mathrm{II}}\right)g'_0(z)+\\&\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}^{-1}\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{Y}_{\mathrm{II}}\left(\frac{\alpha_{\mathrm{II}}-\alpha_{\mathrm{I}}}{\alpha_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{II}}}\overline{\boldsymbol{d}}_{\mathrm{II}}-\frac{2\alpha_{\mathrm{II}}}{\alpha_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{II}}}\boldsymbol{d}_{\mathrm{I}}+\boldsymbol{d}_{\mathrm{II}}\right)g'_0(z)\\\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(z)=&-\mathrm{i}\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}^{-1}\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\left(\frac{\alpha_{\mathrm{II}}-\alpha_{\mathrm{I}}}{\alpha_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{II}}}\boldsymbol{c}_{\mathrm{II}}-\frac{2\alpha_{\mathrm{II}}}{\alpha_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{II}}}\overline{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{I}}+\overline{\boldsymbol{c}}_{\mathrm{II}}\right)\overline{g}'_0(z)-\\&\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}^{-1}\overline{\boldsymbol{H}}^{-1}\overline{\boldsymbol{Y}}_{\mathrm{I}}\left(\frac{\alpha_{\mathrm{II}}-\alpha_{\mathrm{I}}}{\alpha_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{II}}}\boldsymbol{d}_{\mathrm{II}}-\frac{2\alpha_{\mathrm{II}}}{\alpha_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{II}}}\overline{\boldsymbol{d}}_{\mathrm{I}}+\overline{\boldsymbol{d}}_{\mathrm{II}}\right)\overline{g}'_0(z)\end{aligned} \tag{10-70}$$

从而在 $x_2=0$ 界面上的应力和电位移为

$$\boldsymbol{\Sigma}_2(x_1)=2\mathrm{Re}[\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)+\boldsymbol{d}_{\mathrm{II}}g'_{\mathrm{II}}(x_1)]=2\mathrm{Re}[\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{F}_1(x_1)+\boldsymbol{d}_1 g'_1(x_1)] \tag{10-71}$$

式中 $\boldsymbol{B}_{\mathrm{II}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{II}}(x_1)$，$\boldsymbol{B}_{\mathrm{I}}\boldsymbol{F}_{\mathrm{I}}(x_1)$ 由式(10-70)计算，$g'_{\mathrm{II}}(x_1)$，$g'_{\mathrm{I}}(x_1)$ 由式(10-66)计算。

10.3.3 椭圆夹杂外部基体中的点热源[163, 164]

设无限体内有一长、短半轴分别为 a，b 的椭圆夹杂，夹杂和基体间理想连接。夹杂Ⅰ内部区域记为 S^+，夹杂外的电介质基体Ⅱ的区域记为 S^-，两者的边界记为 L，法线记为 $\boldsymbol{n}$，指向夹杂内或基体的外部。无穷远处 $T_{\mathrm{II}}=0$，$q_n=0$，在界面 Γ 上的连接条件为

$$T_{\mathrm{I}}=T_{\mathrm{II}},\quad q_{\mathrm{I}2}(x_1)=q_{\mathrm{II}2}(x_1),\ x\in L \tag{10-72}$$

采用 1.5.4 节中的变换方法求解。按式(1-55)，变换函数为

$$z_j=\omega_j(\varsigma_j)=\frac{1}{2}\left[(a-\mathrm{i}\mu_j b)\varsigma_j+(a+\mathrm{i}\mu_j b)\varsigma_j^{-1}\right] \tag{10-73}$$

变换函数式(10-73)把 z 平面上椭圆夹杂的外部 S^- 和所有 z_j 平面上对应的边界外部变换到 ς平面上的单位圆周 γ 的外部 Ω^-，而且变换是一一对应的。但是把 z_j 平面上椭圆夹杂的内部变换到ς_j 平面上的圆环域：$\Omega^+-\Omega_0$，其中 $\Omega^+:\rho\leqslant 1$，$\Omega_0:\rho\leqslant\rho_0$，$\rho_0=|\sqrt{m_j}|$。按式(4-96)，在 $\rho=\rho_0$ 的边界上必须存在关系

$$f(\rho_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi})=f(\rho_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\psi}),\quad 或\ f(\rho_0\sigma)=f(\rho_0/\sigma) \tag{10-74}$$

式中 $\sigma=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$，是$\varsigma_j$ 平面上单位圆周 γ 上的点。上述变换和说明同样适合温度变换平面ς_T。ς_j 平面上单位圆周 γ 上的微元弧长 $\mathrm{d}l$ 和在 z 平面上椭圆夹杂边界上的微元弧长 $\mathrm{d}s$ 分别为

$$\mathrm{d}l^2=\mathrm{d}\psi^2,\quad \mathrm{d}s^2=\beta^2\mathrm{d}\psi^2,\ \beta^2=a^2\sin^2\psi+b^2\cos^2\psi \tag{10-75}$$

设强度为 M 的点热源位于基体中的ς_0 处，现在在变换平面ς上求解。设 $g_0(\varsigma_T)$是基体占据整个空间时的解，取 $g'_0(\varsigma_T)=c\ln(\varsigma_T-\varsigma_{0T})$，它在夹杂内是解析的。解可取为

$$\begin{aligned}&\vartheta(x_1,x_2)=g'(\varsigma_T)+\overline{g}'(\overline{\varsigma}_T)=2\mathrm{Re}g'(\varsigma_T)\\&g'(\varsigma_T)=\begin{cases}g'_{\mathrm{I}}(\varsigma_T),\ \varsigma_T\in\Omega^+-\Omega_0\\g'_{\mathrm{II}}(\varsigma_T)+g'_0(\varsigma_T),\ \varsigma_T\in\Omega^-\end{cases}\end{aligned} \tag{10-76}$$

式中 $g'_{\mathrm{I}}(\varsigma_T)$，$g'_{\mathrm{II}}(\varsigma_T)$ 分别是 $\Omega^+-\Omega_0$，Ω^- 中的解析函数，其中$\varsigma_{0T}=\varsigma_{01}+\mu_{T\mathrm{II}}\varsigma_{02}\in\Omega^-$。仿式(10-58)～(10-60)，在$\varsigma$平面上围绕点热源作一微闭围线，则有

$$\begin{aligned}&q_n\mathrm{d}s=(q_1n_1+q_2n_2)\mathrm{d}s=2\mathrm{Re}[\mathrm{i}\lambda_{0\mathrm{II}}g'(\varsigma_T)],\quad g'_0(\varsigma_T)=c\ln(\varsigma_T-\varsigma_{0T})\\&M=-\oint\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s=-2\mathrm{Im}[\lambda_{0\mathrm{II}}g'_0(\varsigma_T)]_0^{2\pi}=-2\mathrm{Im}[\lambda_{0\mathrm{II}}c\ln(\varsigma_T-\varsigma_{0T})]_0^{2\pi}=-4\pi\lambda_{0\mathrm{II}}c\\&c=-M/4\pi\lambda_{0\mathrm{II}},\ \lambda_{0\mathrm{II}}=\sqrt{\lambda_{\mathrm{II}11}\lambda_{\mathrm{II}22}-\lambda_{\mathrm{II}12}^2}\end{aligned} \tag{10-77}$$

由式(10-76)和(10-77)推出，界面上温度和热流连续的要求分别等价于

$$\begin{aligned}&g'_{\mathrm{I}}(\sigma)+\overline{g'_{\mathrm{I}}(\sigma)}=g'_{\mathrm{II}}(\sigma)+\overline{g'_{\mathrm{II}}(\sigma)}+g'_0(\sigma)+\overline{g'_0(\sigma)}\\&\lambda_{0\mathrm{I}}g'_{\mathrm{I}}(\sigma)-\lambda_{0\mathrm{I}}\overline{g'_{\mathrm{I}}(\sigma)}=\lambda_{0\mathrm{II}}g'_{\mathrm{II}}(\sigma)-\lambda_{0\mathrm{II}}\overline{g'_{\mathrm{II}}(\sigma)}+\lambda_{0\mathrm{II}}g'_0(\sigma)-\lambda_{0\mathrm{II}}\overline{g'_0(\sigma)}\end{aligned} \tag{10-78}$$

首先在ς平面上讨论问题，然后再转换到ς_T平面。应当注意，$g'_{\mathrm{I}}(\sigma)$只是环形域$\Omega^+ - \Omega_0$中的解析函数的边值，类似于式(4－97)，因此可令

$$g'_{\mathrm{I}}(\varsigma) = \sum_{k=1}^{\infty}(d_{-k}\varsigma^{-k} + d_k\varsigma^k) = \sum_{k=1}^{\infty}d_k(\varsigma^k + \gamma_k\varsigma^{-k}) \tag{10-79}$$

上式中的γ_k可如下求得。按式(10－74)，有

$$\sum_{k=1}^{\infty}d_k(\rho_0^k e^{ik\psi} + \gamma_k\rho_0^{-k}e^{-ik\psi}) = \sum_{k=1}^{\infty}d_k(\rho_0^k e^{-ik\psi} + \gamma_k\rho_0^{-k}e^{ik\psi}),\ \gamma_k = \rho_0^{2k} = m_{T\mathrm{I}}^k = \left(\frac{a + i\mu_{T\mathrm{I}}b}{a - i\mu_{T\mathrm{I}}b}\right)^k \tag{10-80}$$

因而，整个界面Γ上温度和热流连续的条件式(10－78)可以写成

$$\sum_{k=1}^{\infty}(d_k + \bar{\gamma}_k\bar{d}_k)\sigma^k + \sum_{k=1}^{\infty}(\bar{d}_k + \gamma_k d_k)\sigma^{-k} = g'_{\mathrm{II}}(\sigma) + \overline{g'_{\mathrm{II}}(\sigma)} + g'_0(\sigma) + \overline{g'_0(\sigma)}$$

$$\frac{\lambda_{0\mathrm{I}}}{\lambda_{0\mathrm{II}}}\sum_{k=0}^{\infty}(d_k - \bar{\gamma}_k\bar{d}_k)\sigma^k - \frac{\lambda_{0\mathrm{I}}}{\lambda_{0\mathrm{II}}}\sum_{k=0}^{\infty}(\bar{d}_k - \gamma_k d_k)\sigma^{-k} = g'_{\mathrm{II}}(\sigma) - \overline{g'_{\mathrm{II}}(\sigma)} + g'_0(\sigma) - \overline{g'_0(\sigma)}$$

上式可以改写成

$$\sum_{k=1}^{\infty}(d_k + \bar{\gamma}_k\bar{d}_k)\sigma^k - \bar{g}'_{\mathrm{II}}(1/\sigma) - g'_0(\sigma) = g'_{\mathrm{II}}(\sigma) + \overline{g'_0(\sigma)} - \sum_{k=1}^{\infty}(\bar{d}_k + \gamma_k d_k)\sigma^{-k}$$

$$\begin{aligned}&(\lambda_{0\mathrm{I}}/\lambda_{0\mathrm{II}})\sum_{k=0}^{\infty}(d_k - \bar{\gamma}_k\bar{d}_k)\sigma^k + \bar{g}'_{\mathrm{II}}(1/\sigma) - g'_0(\sigma) = \\ &g'_{\mathrm{II}}(\sigma) - \bar{g}'_0(1/\sigma) + (\lambda_{0\mathrm{I}}/\lambda_{0\mathrm{II}})\sum_{k=0}^{\infty}(\bar{d}_k - \gamma_k d_k)\sigma^{-k}\end{aligned} \tag{10-81}$$

上式的左边是在Ω^+解析的某两个函数的边值，右边也是某两个在Ω^-解析的函数的边值，它们通过边界Γ相互解析延拓，成为整个ς平面上的解析函数，即存在解析函数

$$\begin{aligned}\theta_1(\varsigma) &= \begin{cases}\sum_{k=1}^{\infty}(d_k + \bar{\gamma}_k\bar{d}_k)\varsigma^k - \bar{g}'_{\mathrm{II}}(1/\varsigma) - g'_0(\varsigma),\ \varsigma \in \Omega^+ \\ g'_{\mathrm{II}}(\varsigma) - \sum_{k=1}^{\infty}(\bar{d}_k + \gamma_k d_k)\varsigma^{-k} + \bar{g}'_0(1/\varsigma),\ \varsigma \in \Omega^-\end{cases} \\ \theta_2(\varsigma) &= \begin{cases}\lambda_{0\mathrm{I}}\sum_{k=0}^{\infty}(d_k - \bar{\gamma}_k\bar{d}_k)\varsigma^k + \lambda_{0\mathrm{II}}\bar{g}'_{\mathrm{II}}(1/\varsigma) - \lambda_{0\mathrm{II}}g'_0(\varsigma),\ \varsigma \in \Omega^+ \\ \lambda_{0\mathrm{II}}g'_{\mathrm{II}}(\varsigma) + \lambda_{0\mathrm{I}}\sum_{k=0}^{\infty}(\bar{d}_k - \gamma_k d_k)\varsigma^{-k} - \lambda_{0\mathrm{II}}\bar{g}'_0(1/\varsigma),\ \varsigma \in \Omega^-\end{cases}\end{aligned} \tag{10-82}$$

进一步假设无穷远处这些函数为零，即$\theta_1(\infty) = \theta_2(\infty) = 0$，或略去无穷远处可能存在的常数，则按 Liouville 定理，有$\theta_1(\varsigma) = \theta_2(\varsigma) = 0$。由此导得下列关系

$$\sum_{k=1}^{\infty}(d_k + \bar{\gamma}_k\bar{d}_k)\varsigma^k = \bar{g}'_{\mathrm{II}}(1/\varsigma) + g'_0(\varsigma)$$

$$
\begin{aligned}
&\lambda_{0\,\mathrm{I}} \sum_{k=0}^{\infty}(d_k-\bar{\gamma}_k \bar{d}_k)\varsigma^k=-\lambda_{0\,\mathrm{II}}\,\bar{g}'_{\mathrm{II}}(1/\varsigma)+\lambda_{0\,\mathrm{II}}\,g'_0(\varsigma),\ \varsigma\in\Omega^+\\
&\sum_{k=1}^{\infty}(\bar{d}_k+\gamma_k d_k)\varsigma^{-k}=g'_{\mathrm{II}}(\varsigma)+\bar{g}'_0(1/\varsigma)\\
&\lambda_{0\,\mathrm{I}} \sum_{k=0}^{\infty}(\bar{d}_k-\gamma_k d_k)\varsigma^{-k}=-\lambda_{0\,\mathrm{II}}\,g'_{\mathrm{II}}(\varsigma)+\lambda_{0\,\mathrm{II}}\,\bar{g}'_0(1/\varsigma),\ \varsigma\in\Omega^-
\end{aligned}
\tag{10-83}
$$

由上式解得

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{\infty}[(\lambda_{0\,\mathrm{I}}+\lambda_{0\,\mathrm{II}})d_k+(\lambda_{0\,\mathrm{II}}-\lambda_{0\,\mathrm{I}})\bar{\gamma}_k\bar{d}_k]\varsigma^k=2\lambda_{0\,\mathrm{II}}\,g'_0(\varsigma)\\
&g'_{\mathrm{II}}(\varsigma)=-\bar{g}'_0(1/\varsigma)+\sum_{k=1}^{\infty}(\bar{d}_k+\gamma_k d_k)\varsigma^{-k}
\end{aligned}
\tag{10-84}
$$

由上式便可求得 d_k，$g'_{\mathrm{II}}(\varsigma)$，然后合适地把$\varsigma$替换为$\varsigma_T$，进一步由式(10－76)，可求出

$$
\begin{aligned}
&g'(\varsigma_T)=\begin{cases} g'_{\mathrm{I}}(\varsigma_T)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}d_k(\varsigma_T^k+\gamma_k\varsigma_T^{-k}),\ \varsigma_T\in\Omega^+-\Omega_0\\ \tilde{g}'_{\mathrm{II}}(\varsigma_T)=g'_0(\varsigma_T)-\bar{g}'_0(1/\varsigma)+\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\bar{d}_k+\gamma_k d_k)\varsigma_T^{-k},\ \varsigma_T\in\Omega^- \end{cases}\\
&\vartheta(x_1,x_2)=2\mathrm{Re}g'(\varsigma_T),\quad g'_0(z_T)=-(M/4\pi\lambda_{0\,\mathrm{II}})\ln(\varsigma_T-\varsigma_{0T})
\end{aligned}
\tag{10-85}
$$

利用式(10－73)，由式(10－85)可求出 z 平面上的表达式 $g'(z_T)$。$g(z_T)$由 $g'(z_T)$积分得到

$$
g(z_T)=\int g'(z_T)\mathrm{d}z_T=\int g'[\omega(\varsigma_T)]\omega'(\varsigma_T)\mathrm{d}\,\varsigma_T=\int g'(\varsigma_T)\omega'(\varsigma_T)\mathrm{d}\,\varsigma_T=g(\varsigma_T)
\tag{10-86}
$$

由式(10－85)和(10－86)，得

$$
\begin{aligned}
g_{\mathrm{II}}(\varsigma_T)=&\ a_{T1}^{(\mathrm{II})}[cF_1(\varsigma_T,\varsigma_{0T})-\bar{c}F_2(\varsigma_T^{-1},\bar{\varsigma}_{0T})]+a_{T2}^{(\mathrm{II})}[cF_2(\varsigma_T,\varsigma_{0T})-\\
&\bar{c}F_1(\varsigma_T^{-1},\bar{\varsigma}_{0T})]+a_{T1}^{(\mathrm{II})}(\bar{d}_1+\gamma_1 d_1)\ln\varsigma_T+\sum_{k=1}^{\infty}G_{1k}\varsigma_T^{-k},\ \varsigma_T\in\Omega^-\\
g_{\mathrm{I}}(\varsigma_T)=&\sum_{k=1}^{\infty}(G_{2k}\varsigma_T^k+G_{3k}\varsigma_T^{-k}),\ \varsigma_T\in\Omega^+-\Omega_0
\end{aligned}
\tag{10-87}
$$

式中

$$
\begin{aligned}
&F_1(\varsigma_T,\varsigma_{0T})=(\varsigma_T-\varsigma_{0T})[\ln(\varsigma_T-\varsigma_{0T})-1]\\
&F_2(\varsigma_T,\varsigma_{0T})=(\varsigma_T^{-1}-\varsigma_{0T}^{-1})\ln(\varsigma_T-\varsigma_{0T})+\varsigma_{0T}^{-1}\ln\varsigma_T\\
&a_{T1}^{(\Lambda)}=\frac{1}{2}(a-\mathrm{i}\mu_{T\Lambda}b),\ a_{T2}^{(\Lambda)}=\frac{1}{2}(a+\mathrm{i}\mu_{T\Lambda}b),\ \Lambda=\mathrm{I},\mathrm{II}\\
&G_{1k}=-[(\bar{d}_{k+1}+\gamma_{k+1}d_{k+1})a_{T1}^{(\mathrm{II})}-(\bar{d}_{k-1}+\gamma_{k-1}d_{k-1})a_{T2}^{(\mathrm{II})}]/k\\
&G_{2k}=(a_{T1}^{(\mathrm{I})}d_{k-1}s_{k1}-a_{T2}^{(\mathrm{I})}d_{k+1})/k\\
&G_{3k}=-(a_{T1}^{(\mathrm{I})}\gamma_{k+1}d_{k+1}-a_{T2}^{(\mathrm{I})}\gamma_{k-1}d_{k-1}s_{k1})/k
\end{aligned}
\tag{10-88}
$$

式中 $s_{k1}=1$，$k\neq 1$；$s_{k1}=0$，$k=1$。

10.4 界面裂纹与点热源的相互作用[9, 158]

10.4.1 一般情形

材料Ⅱ存在点热源时，将在界面上产生式(10－67)所示的热流和式(10－71)所示的面力和电位移。因此，必须在裂纹面上施加

$$q_T=-q_2=\mathrm{i}\frac{2\alpha_{\mathrm{I}}\alpha_{\mathrm{II}}}{\alpha_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{II}}}[g_0''(x_1)-\overline{g}_0''(x_1)] \qquad (10-89)$$
$$\boldsymbol{t}_2=-\boldsymbol{\Sigma}_2$$

来满足裂纹面上无广义应力的边界条件。从而问题的完全解为

$$\theta''(z_T)=\frac{\alpha_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{II}}}{2\pi\alpha_{\mathrm{I}}\alpha_{\mathrm{II}}}Z_0(z_T)\int_{L_c}\frac{q_0(x_1)+q_T(x_1)}{Z_0^+(x_1)(x_1-z_T)}\mathrm{d}x_1+Z_0(z_T)C(z_T)$$
$$\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}(z)=\boldsymbol{Q}(z)\left[\boldsymbol{C}(z)+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_L\frac{\boldsymbol{\Sigma}_0''(x_1)\mathrm{d}x_1}{\boldsymbol{Q}^+(x_1)(x_1-z)}\right] \qquad (10-90)$$
$$\boldsymbol{\Sigma}_0''(x_1)=\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\Sigma}_0'(x_1)=\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}[\boldsymbol{\Sigma}_0(x_1)+\boldsymbol{t}_2(x_1)+\boldsymbol{\eta}_1\theta'^{+}(x_1)+\boldsymbol{\eta}_2\theta'^{-}(x_1)]$$

由上式可知，点热源既影响温度场，又影响广义应力场。

10.4.2 单个点热源和单个裂纹的相互作用

设在双材料$(-a,\ a)$中存在一个界面裂纹，在下半平面 S^- 的 z_0 处有一强度为 M 的点热源且有下述边界条件

$$\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{I},1}(x_1)=\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{II},1}(x_1)=\boldsymbol{0},\quad q_{\mathrm{I}2}(x_1)=q_{\mathrm{II}2}(x_1)=0,\ x\in L_c \qquad (10-91)$$

且在无穷远处衰减到零，即有

$$\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{I},1}(x_1)=\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{II},1}(x_1)=\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{I},2}(x_1)=\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{II},2}(x_1)=\boldsymbol{0},\quad q_i=T=0,\ |z|\to\infty$$

把式(10－89)和(10－61)代入(10－90)，便得

$$\theta''(z_T)=\frac{\alpha_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{II}}}{2\pi\alpha_{\mathrm{I}}\alpha_{\mathrm{II}}}Z_0(z_T)\int_{L_c}\frac{2\mathrm{i}\alpha_{\mathrm{I}}\alpha_{\mathrm{II}}}{\alpha_{\mathrm{I}}+\alpha_{\mathrm{II}}}\left[-\frac{M}{4\pi\lambda_0}\left(\frac{1}{x_1-z_0}-\frac{1}{x_1-\overline{z}_0}\right)\right]\cdot$$
$$\frac{1}{Z_0^+(x_1)(x_1-z_T)}\mathrm{d}x_1+Z_0(z_T)C(z_T)=$$
$$-\frac{M\mathrm{i}}{4\pi^2\lambda_0}Z_0(z_T)\int_{L_c}\left[\left(\frac{1}{x_1-z_0}-\frac{1}{x_1-\overline{z}_0}\right)\right]\frac{1}{Z_0^+(x_1)(x_1-z_T)}\mathrm{d}x_1+Z_0(z_T)C(z_T) \qquad (10-92)$$

式中 $Z_0(z_T)=(z_T^2-a^2)^{-1/2}$。上式中的积分部分可以化为

$$I=\int_{L_c}\left[\left(\frac{1}{x_1-z_0}-\frac{1}{x_1-\overline{z}_0}\right)\right]\frac{1}{Z_0^+(x_1)(x_1-z_T)}\mathrm{d}x_1=$$

$$\int_{L_c}\frac{z_0-\bar{z}_0}{Z_0^+(x_1)(x_1-z_T)(x_1-z_0)(x_1-\bar{z}_0)}\mathrm{d}x_1$$

首先讨论下述积分

$$\Omega=\int_{\Lambda}\frac{1}{Z_0^+(x_1)(x_1-z_T)(x_1-z_0)(x_1-\bar{z}_0)}\mathrm{d}x_1 \tag{10-93}$$

式中围线 Λ 如图 10-1 所示。在围线内被积函数有三个极点：z_T，z_0，$\bar{z}_0$。利用留数定理，上述积分化为

$$\Omega=2\pi\mathrm{i}\left[\frac{\sqrt{z_T^2-a^2}}{(z-z_0)(z-\bar{z}_0)}+\frac{\sqrt{z_0^2-a^2}}{(z_0-z)(z_0-\bar{z}_0)}+\frac{\sqrt{\bar{z}_0^2-a^2}}{(\bar{z}_0-z)(\bar{z}_0-z_0)}\right]$$

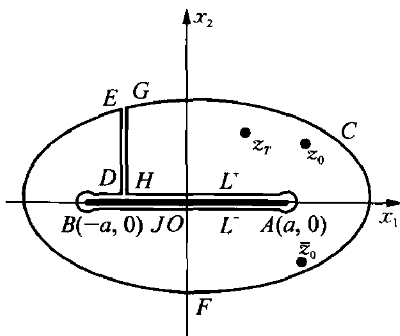


图 10-1　积分 Ω 的积分路径

易于证明，围线的沿 $DEFGH$ 无穷远部分的积分为零，而沿 HJD 的积分 $\Omega=2I$。由无穷远处的衰减条件和温度的单值型条件，易证 $C(z_T)=0$，从而式(10-92)化为

$$\theta''(z_T)=\frac{M}{4\pi\lambda_0}\frac{1}{\sqrt{z_T^2-a^2}}\left(\frac{\sqrt{\bar{z}_0^2-a^2}}{z_T-\bar{z}_0}-\frac{\sqrt{z_0^2-a^2}}{z_T-z_0}\right)+\frac{M}{4\pi\lambda_0}\left(\frac{1}{z_T-z_0}-\frac{1}{z_T-\bar{z}_0}\right) \tag{10-93}$$

将上式积分后，再应用无穷远处温度为零的边界条件，求出积分常数，最终得

$$\theta'(z_T)=\frac{M}{4\pi\lambda_0}\ln\left(\frac{\sqrt{\bar{z}_0^2-a^2}+\bar{z}_0}{\sqrt{z_0^2-a^2}+z_0}\;\frac{\sqrt{z_T^2-a^2}\sqrt{z_0^2-a^2}+z_Tz_0-a^2}{\sqrt{z_T^2-a^2}\sqrt{\bar{z}_0^2-a^2}+z_T\bar{z}_0-a^2}\right) \tag{10-94}$$

把式(10-94)代入(10-90)，便可求 $\overline{\boldsymbol{\Omega}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{h}(z)$，进而求出 $\boldsymbol{h}(z)$。

类似地可以讨论椭圆夹杂外部基体中的点热源时的电弹性场，因问题过于复杂，此处从略。

10.5　热释电体中的变分原理

10.5.1　热释电材料的广义热传导理论概述

工程中应用的热释电材料，通常应用其热电效应，体积内也不存在电流，不考虑电致伸缩效应，因而属于二级效应的 Maxwell 应力无需考虑，从而小变形时不需考虑体积的变化，也不需考虑虚位移引起的电势的变化；因此，介质不需和环境一起讨论，只需单独研究，变分原理得到很大的简化。由于存在温度场，使问题成为非保守的，存在能量耗散，不能由可逆热力学完全解决，需要用不可逆热力学理论来处理。本书 3.2 节中曾适当地讨论过一些不可逆过程的热静力学问题。采用 Fourier 热传导定律的普通热弹性和热电弹性理论，得不到温度的波动方程，或温度波的传播速度是无穷大。但热脉冲以及在微纳米尺度内讨论问题时，热波的传播

速度不再能看成是无穷大，而是有限速度传播，这就要求修改热弹性和热电弹性的基本理论。建立一个简单的有限传播速度的热传导方程，这可以有多种方法。

1) L-S 理论[165]

按式(3-22)和(3-23)，认为热流 q_i 和 $T_{,i}$ 存在黏性热传导定律。Lord(劳德)和 Shulman(苏曼)的 L-S 理论属于这一类理论，更早一些，Cattaneo[166]，Kaliski[167] 以及其他一些学者提出过类似的理论[168]。他们假设在温度变化范围不大时，除热传导方程改用下述 Maxwell-Cattaneo 方程(10-95)外，其余连续介质热力学的方程不变

$$q_i + \tau_{ij}\dot{q}_j = -\lambda_{ij}T_{,j} \tag{10-95}$$

式中 τ_{ij} 表示突加温度梯度达到隐态时的时间滞后，代表热惯性的影响，对各向同性体 $\tau_{ij}=\tau_0\delta_{ij}$。经过较繁的推导，略去许多精度难以确定的次要量后，最终对各向同性线弹性材料线性化后得

$$\lambda T_{,ii} = C(\dot{T} + \tau_0\ddot{T}) + (3\lambda + 2\mu)\alpha T_0(\dot{\varepsilon}_{jj} + \tau_0\ddot{\varepsilon}_{jj}) \tag{10-96}$$

式中 τ_0 是松弛时间常数，C 是单位体积的比热，$\tau_0\ddot{T}$，$\tau_0\ddot{\varepsilon}_{mm}$ 表示热传导的黏性引起的温度和变形的惯性项。在 L-S 理论中采用式(10-95)，同时又保留经典理论中的 $T\dot{s}=\dot{r}-q_{i,i}$，从而可以推出 $T\dot{s}+\tau_0T\ddot{s}=\lambda_{ij}T_{,ji}$(设 $\dot{r}=0$)，那么熵便具有黏性性质，很难认为是状态函数了。

2) G-L 理论[169]

Green(格林)和 Lindsay(林德塞)采用能量表达式(3-14)，但引入一个新的和温度类似的函数 $\phi=\phi(T,\dot{T},\cdots)$ 代替温度 T，修正了经典的熵不等式和自由能。他们讨论了有限变形和各向异性的一般情形。本处讨论各向同性材料和小变形，此时采用下列熵不等式和自由能的表达式代替经典的式(3-16)和(3-19)

$$\int_V \dot{s}\,\mathrm{d}V - \int_V (r/\phi)\,\mathrm{d}V + \int_a (q_i/\phi)n_i\,\mathrm{d}a \geqslant 0,\ \phi=\phi(T,\dot{T}),\ T=\phi(T,0)$$
$$g = u - \phi s,\ g = g(T,\dot{T},\varepsilon_{ij}) \tag{10-97}$$

由上式可推出

$$\phi\dot{s} - \dot{r} + q_{i,i} - q_i\phi_{,i}/\phi \geqslant 0,\quad -\dot{g} - s\dot{\phi} + \sigma:\dot{\varepsilon} - q_i\phi_{,i}/\phi \geqslant 0 \tag{10-98}$$

把 ϕ 和 g 展成自变量的 Taylor 级数，通过一些理论分析和推演，得到各向同性材料线性化后的 G-L 方程

$$\lambda T_{,ii} = C(\dot{T} + \tau_0\ddot{T}) + \beta T_0\dot{\varepsilon}_{jj},\quad \sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij} - \beta(\theta + \tau_1\dot{\theta}) \tag{10-99}$$

式中 β 是材料常数。上式是含双参数 τ_0，τ_1 的方程，但温度波方程仍只含一个参数。虽然一些学者提出种种可能的不可逆热力学理论，但和经典理论有较大差别，仍有待实验验证。

3) G-N 理论[170]

Green 和 Naghdi 提出没有能量耗散的温度波理论，他们引入热位移 u_T，使 $T=\dot{u}_T$，和热位移梯度 $\boldsymbol{\beta}=\partial u_T/\partial\boldsymbol{x}$，$\dot{\boldsymbol{\beta}}=\partial\dot{u}_T/\partial\boldsymbol{X}=\boldsymbol{F}\cdot\partial T/\partial\boldsymbol{x}$，进一步假设存在 Helmholtz 自由能 f，且是 θ，$\boldsymbol{\beta}$，$\boldsymbol{F}$ 的态函数

$$f = f(\theta, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{F}), \quad s = -\partial f/\partial\theta, \quad \boldsymbol{\sigma} = \partial f/\partial \boldsymbol{F}, \quad \boldsymbol{\eta} = -\partial f/\partial \boldsymbol{\beta} \tag{10-100}$$

由于自由能 f 是态函数，熵流由自由能求偏导得出，自然就不存在热耗散问题。问题是这种假设的前提和热传导伴随能量耗散的事实抵触。

He、Tian 和 Shen[171]采用 L－S 和 G－L 方程和数值方法研究了压电板的多种热冲击问题。采用变分原理研究热释电问题有很多文章，如文献[172～174]。本节我们利用惯性熵理论来构造变分理论，并得到温度波方程。

10.5.2 惯性熵或惯性热理论[175]

本小节采用一种最简单且物理意义明确的方法来建立广义热电弹性波理论。我们认为任何物理量随时间的非匀速变化，都需环境提供额外的能量，这应该是一条自然定律。温度随时间变化时将会影响热流，这便构成一个温度动力学问题。为此我们引入惯性熵，惯性熵和力学中的惯性力相似，是不是真实的熵，目前可以存疑。温度作加速度变化时要额外吸收热量，它等于温度和惯性熵 $s^{(a)}$ 的乘积。可以假设惯性熵的变化率正比于温度加速度，即 $\dot{s}^{(a)} = \rho_s \ddot{T}$，$\rho_s = C\rho_{s0}/T_0$，$s^{(a)} = \rho_s \dot{T}$，其中 $\rho_s \ddot{T}$ 是惯性熵率，ρ_s 是熵惯性系数，单位是$\mathrm{J \cdot s/m^3 \cdot K^2}$，而 ρ_{s0} 的单位是时间量纲 s。因而因温度加速度引起的惯性热增量是 $\rho_s T\delta\dot{T}$。这一方法的优点是不需要修改 Fourier 定律，不需要修改自由能等式和熵不等式，物体的总熵仍然由可逆部分和不可逆部分组成，而且只有热传导方程是不可逆的，比较容易处理。同时也不排除采用 Maxwell-Cattaneo 定律。采用电 Gibbs 函数时应改用补热 $\rho_s \dot{T}\delta T$。因此，在热传播动力学中，要修改能量方程式(3－13)，即取用

$$\int_V \rho_s T\delta\dot{T}\mathrm{d}V = \int_V \rho_{s0} C(T/T_0)\delta\dot{T}\mathrm{d}V = \int_V \delta r\mathrm{d}V - \int_{a_q} T\delta\dot{\boldsymbol{\eta}}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a - \delta Q_{\mathrm{in}}$$

或
$$\dot{Q}_{\mathrm{in}} + \int_V T\dot{s}^{(a)}\mathrm{d}V = \int_V \dot{r}\mathrm{d}V - \int_{a_q} T\dot{\boldsymbol{\eta}}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}a, \ \dot{\boldsymbol{\eta}} = \frac{\boldsymbol{q}}{T}, \ \dot{s}^{(a)} = \rho_s\ddot{T} \tag{10-101}$$

上式表示环境提供的热流由两部分组成，一部分用来增加物体内部吸收的热量 δQ_{in}，一部分用来改变温度随时间的变化。热力学第一定律的局部形式(3－14)相应地修改为

$$\dot{u} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{D}} - \nabla\cdot\boldsymbol{q} + \dot{r} - T\dot{s}^{(a)} \tag{10-102}$$

相应地，经典的熵关系式(3－15)～(3－17)修改为

$$\dot{s}^{(r)} + \dot{s}^{(a)} = \frac{\dot{r}}{T} - \dot{\eta}_{i,i}, \quad T(\dot{s}^{(r)} + \dot{s}^{(a)}) = \dot{r} - T\dot{\eta}_{i,i} = \dot{r} - q_{i,i} + \dot{\eta}_i T_{,i}$$

$$\dot{s}^{(i)} = \dot{s} - \dot{s}^{(r)} = \dot{s} + \dot{s}^{(a)} - \frac{\dot{r}}{T} + \dot{\eta}_{i,i}, \quad T\dot{s}^{(i)} = T\dot{s} + T\dot{s}^{(a)} - \dot{r} + q_{i,i} - \dot{\eta}_i T_{,i} \geqslant 0$$

$$T\dot{s} + T\dot{s}^{(a)} = \dot{r} - q_{i,i} = \dot{r} - (T\dot{\eta}_i)_{,i}, \quad \dot{h}_u = T\dot{s}^{(i)} = -T_{,i}\dot{\eta}_i \tag{10-103}$$

把式(10－103)中的 $\dot{r} - T\dot{s}^{(a)}$ 代入(10－102)，便得

$$\dot{u} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{E}\cdot\dot{\boldsymbol{D}} + T\dot{s}, \quad \dot{h}_u = T\dot{s}^{(i)} = -T_{,i}\dot{\eta}_i \tag{10-104}$$

上式中的第一式和式(3－18b)相同，正好表明当力学过程和电学过程都是可逆时，内能和熵都是状态函数，h_u 代表不可逆过程在介质内部产生的耗散能。相应地对电 Gibbs 函数有

$$g = u - Ts - \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D}, \quad \dot{g} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{D} \cdot \dot{\boldsymbol{E}} - s\dot{T}, \quad \dot{h}_g = \dot{h} - (-Ts^{(i)})^{\cdot} = \eta_i \dot{T}_{,i} \tag{10-105}$$

式中 h_g 代表不可逆过程在介质内部产生的补耗散能。

10.5.3 内能和电 Gibbs 函数

介质作刚体旋转时 u, h_u 和 g, h_g 应是不变量，所以内能和电 Gibbs 函数取下列形式

$$u(\varepsilon_{kl}, D_k, s) = \frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{ji}\varepsilon_{lk} - h_{kij}D_k\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}\beta_{ij}D_iD_j - \hat{\alpha}_{ij}\varepsilon_{ji}s - \hat{\tau}_iD_is + \frac{T_0}{2}\hat{C}s^2$$

$$\delta h_u = \hat{\lambda}_{ij}T\dot{\eta}_j\delta\eta_i (= T\delta s^{(i)}) \tag{10-106}$$

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}, \quad h_{kij} = h_{kji}, \quad \beta_{kl} = \beta_{lk}, \quad \hat{\alpha}_{ij} = \hat{\alpha}_{ji}, \quad \hat{\lambda}_{ij} = \hat{\lambda}_{ji}$$

$$g(\varepsilon_{kl}, E_k, \vartheta) = \frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{ji}\varepsilon_{lk} - e_{kij}E_k\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}\epsilon_{ij}E_iE_j - \alpha_{ij}\varepsilon_{ij}\vartheta - \tau_iE_i\vartheta - \frac{1}{2T_0}C\vartheta^2$$

$$\delta h_g = \eta_j\delta\vartheta_{,j} = -\left(\int_0^t \lambda_{ij}\frac{1}{T}\vartheta_{,i}\mathrm{d}\tau\right)\delta\vartheta_{,j}$$

$$C_{ijkl} = C_{jikl} = C_{ijlk} = C_{klij}, \quad e_{kij} = e_{kji}, \quad \epsilon_{kl} = \epsilon_{lk}, \quad \alpha_{ij} = \alpha_{ji}, \quad \lambda_{ij} = \lambda_{ji} \tag{10-107}$$

式中 $\vartheta = T - T_0$，T_0 是环境的温度。应当注意，在式(10－106)中，没有广义位移时，$T = 0$ 时 $s = 0$，$T = T_0$ 时 $s = s_0$；而在式(10－107)中，设 $T = T_0$ 时 $s = 0$。在后面的讨论中均遵守这一原则。和式(10－106)对应的本构方程为

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= \frac{\partial u}{\partial\varepsilon_{ij}} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - h_{kij}D_k - \hat{\alpha}_{ij}s \\
E_i &= \frac{\partial u}{\partial D_i} = \beta_{ij}D_j - h_{kij}\varepsilon_{kl} - \hat{\tau}_is \\
T &= \frac{\partial u}{\partial s} = -\hat{\alpha}_{ij}\varepsilon_{ji} - \hat{\tau}_iD_i + T_0\hat{C}s
\end{aligned} \tag{10-108}$$

$$T_{,i} = -\partial h_u/\partial\eta_i = -\hat{\lambda}_{ij}T\dot{\eta}_j = -\hat{\lambda}_{ij}q_j, \quad \int_0^t T_{,i}\mathrm{d}\tau = -T\int_0^t \hat{\lambda}_{ij}\dot{\eta}_j\mathrm{d}\tau$$

和式(10－107))对应的本构方程为

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= \frac{\partial g}{\partial\varepsilon_{ij}} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - e_{kij}E_k - \alpha_{ij}\vartheta \\
D_i &= -\frac{\partial g}{\partial E_i} = \epsilon_{ij}E_j + e_{kij}\varepsilon_{kl} + \tau_i\vartheta \\
s &= -\frac{\partial g}{\partial T} = \alpha_{ij}\varepsilon_{ij} + \tau_iE_i + C\vartheta/T_0
\end{aligned} \tag{10-109}$$

$$\eta_i = -\frac{\partial h_g}{\partial\vartheta_{,i}} = -\int_0^t \lambda_{ij}\frac{1}{T}\vartheta_{,j}\mathrm{d}\tau, \quad T\dot{\eta}_i = q_i = -\lambda_{ij}\vartheta_{,j}$$

显然有 $T_{,j} = \vartheta_{,j}$，$\dot{T} = \dot{\vartheta}$。由式(10－103)和(10－109)，可得到热传导(能量)方程

$$q_{i,i}=-T\dot{s}+\dot{r}-T\dot{s}^{(a)},\quad \lambda_{ij}T_{,ji}=T\left(\alpha_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}+\tau_i\dot{E}_i+\frac{C}{T_0}\dot{\vartheta}+\frac{C}{T_0}\rho_{s0}\ddot{\vartheta}\right)-\dot{r}\tag{10-110a}$$

或近似地有

$$\lambda_{ij}T_{,ji}=T_0\alpha_{ij}\dot{\epsilon}_{ij}+T_0\tau_i\dot{E}_i+C\dot{\vartheta}+C\rho_{s0}\ddot{\vartheta}-\dot{r}\tag{10-110b}$$

上式是一个具有有限速度传播的衰减温度波方程。在热弹性问题中，上式和线性化后的 L－S 理论式(10－96)只相差一项含 $\ddot{\varepsilon}_{kk}$ 的项，这一项属于阻尼项。在单纯热传导问题中，上式和 L－S 理论一致。式(10－110a)可用于任何温度范围。

10.5.4 电 Gibbs 函数变分原理

假设位移、电势和温度在边界 a_u，a_φ 和 a_T 上分别满足边界条件：$u_i=u_i^*$，$\varphi=\varphi^*$，$T=T^*$，同时在介质内有 $\varepsilon_{ij}=(u_{i,j}+u_{j,i})/2$，$E_i=-\varphi_i$ 和本构方程，则考虑热惯性时，热释电体中的电 Gibbs 函数变分原理可表为

$$\begin{aligned}
\delta\Pi'&=\int_V\delta(g+h_g)\mathrm{d}V-\delta Q^*-\delta\overline{W}^*=0\\
\delta Q^*&=-\int_0^t\int_V\left(\frac{\dot{r}}{T}\right)\delta\vartheta\,\mathrm{d}V\mathrm{d}\tau+\int_0^t\int_{a_q}\eta^*\delta\vartheta\,\mathrm{d}a\mathrm{d}\tau-\int_0^t\int_V\dot{s}^{(i)}\delta\vartheta\,\mathrm{d}V\mathrm{d}\tau+\\
&\quad\int_0^t\int_V\rho_s\ddot{T}\delta\vartheta\,\mathrm{d}V\mathrm{d}\tau\\
\delta W^*&=\int_V(f_k-\rho\ddot{u}_k)\delta u_k\mathrm{d}V-\int_V\rho_e\delta\varphi\mathrm{d}V+\int_{a_\sigma}T_k^*\delta u_k\mathrm{d}a-\int_{a_D}\sigma^*\delta\varphi\mathrm{d}a
\end{aligned}\tag{10-111}$$

式中 g，h_g 仍由式(10－107)表示。有

$$\begin{aligned}
\delta\int_V g\,\mathrm{d}V&=\int_V(C_{ijkl}\varepsilon_{kl}+e_{kij}\varphi_{,k}-\alpha_{ij}\vartheta)\delta u_{i,j}\mathrm{d}V+\int_V(e_{kij}\varepsilon_{ij}+\epsilon_{ik}E_i+\tau_k\vartheta)\delta\varphi_{,k}\mathrm{d}V-\\
&\quad\int_V(\alpha_{ij}\varepsilon_{ij}+\tau_iE_i+C\vartheta/T_0)\delta\vartheta\mathrm{d}V=\\
&\quad\int_a\sigma_{ij}n_j\delta u_i\mathrm{d}a-\int_V\sigma_{ij,j}\delta u_i\mathrm{d}V+\int_a D_kn_k\delta\varphi\mathrm{d}a-\int_V D_{k,k}\delta\varphi\mathrm{d}V-\int_V s\delta\vartheta\mathrm{d}V\\
\int_V\delta h_g\mathrm{d}V&=-\int_a\left(\int_0^t\lambda_{ij}\frac{1}{T}\vartheta_{,i}n_j\mathrm{d}\tau\right)\delta\vartheta\mathrm{d}a+\int_V\left[\int_0^t\left(\lambda_{ij}\frac{1}{T}\vartheta_{,i}\right)_{,j}\right]\delta\vartheta\mathrm{d}\tau\mathrm{d}V
\end{aligned}\tag{10-112}$$

完成式(10－111)的变分后，可得

$$\begin{aligned}
\delta\Pi'&=\int_{a_\sigma}(\sigma_{ij}n_j-T_i^*)\delta u_i\mathrm{d}a-\int_V(\sigma_{ij,j}+f_i-\rho\ddot{u}_i)\delta u_i\mathrm{d}V+\\
&\quad\int_{a_D}(\sigma^*+D_kn_k)\delta\varphi\mathrm{d}a-\int_V(D_{k,k}-\rho_e)\delta\varphi\mathrm{d}V-\int_{a_q}\left(\int_0^t\frac{1}{T}\lambda_{ij}\vartheta_{,i}n_j\mathrm{d}\tau+\eta^*\right)\delta\vartheta\mathrm{d}a-\\
&\quad\int_V\left\{s+\int_0^t\left[-\frac{\dot{r}}{T}-\left(\lambda_{ij}\frac{1}{T}\vartheta_{,i}\right)_{,j}-\dot{s}^{(i)}\right]\mathrm{d}\tau\right\}\delta\vartheta\mathrm{d}V-\int_0^t\int_V\rho_s\ddot{\vartheta}\mathrm{d}V\mathrm{d}\tau\delta\vartheta\mathrm{d}V=0
\end{aligned}\tag{10-113}$$

由于 δu_i，$\delta\varphi$ 和 δT 的任意性，由上式得

$$\sigma_{kl,l}+f_k=\rho\ddot{u}_k,\quad D_{k,k}=\rho_e$$

$$s+\frac{C}{T_0}\rho_{s0}\,\dot{\vartheta}=\int_0^t\left[\frac{\dot{r}}{T}+\left(\lambda_{ij}\,\frac{1}{T}\vartheta_{,i}\right)_{,j}+\dot{s}^{(i)}\right]\mathrm{d}\tau,\quad 或\dot{s}+\frac{C}{T_0}\rho_{s0}\,\ddot{\vartheta}=\frac{\dot{r}}{T}-\frac{q_{i,i}}{T}(介质内)$$

$$\sigma_{kl}n_l=T_k^*(在\ a_\sigma\ 上),\quad D_kn_k=-\sigma^*(在\ a_D\ 上)\tag{10-114}$$

$$\int_0^t\lambda_{ij}\,\frac{1}{T}\vartheta_{,i}n_j\mathrm{d}\tau=-\eta^*,\quad 或\dot{\eta}_in_i=\dot{\eta}^*,\quad 或\ q_in_i=q^*(在\ a_q\ 上)$$

式中 $\dot{\eta}^*=\dot{\eta}_i^*n_i$，等价于 $q_i^*n_i=q^*$。

同时根据变分的先决条件，还要加上

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*(在\ a_u\ 上);\quad \varphi=\varphi^*(在\ a_\varphi\ 上);\quad T=T^*(在\ a_T\ 上)\tag{10-115}$$

若所有的边界上都给定温度，介质和环境没有热量交换，则在式(10-114)中没有热流的边界条件。由式(10-114)可以直接得到热传导能量方程或温度波传播方程式(10-110)。

如 $\vartheta\ll T_0$，则瞬时温度 T 可用 T_0 代替。如采用式(10-111)中的 $\delta h_g=\eta_j\delta\vartheta_{,j}$，则式(10-111)化为

$$\begin{aligned}
\delta\Pi'&=\int_V(\delta g+\eta_j\delta\vartheta_{,j})\mathrm{d}V-\delta Q^*-\delta W^*=0\\
\delta Q^*&=-\frac{1}{T_0}\int_V r\delta\vartheta\mathrm{d}V+\int_{a_q}\eta_0^*\,\delta\vartheta\mathrm{d}a-\int_V s^{(i)}\delta\vartheta\mathrm{d}V+\int_V\rho_s\,\dot{\vartheta}\delta\vartheta\mathrm{d}V\\
\delta W^*&=\int_V(f_k-\rho\ddot{u}_k)\delta u_k\mathrm{d}V-\int_V\rho_e\,\delta\varphi\mathrm{d}V+\int_{a_\sigma}T_k^*\,\delta u_k\mathrm{d}a-\int_{a_D}\sigma^*\,\delta\varphi\mathrm{d}a
\end{aligned}\tag{10-116}$$

式中 $\eta_0^*=(1/T_0)\int_0^t q^*\,\mathrm{d}t$。上式中不包含任何时间积分的项。

10.5.5 内能变分原理

设位移、电位移和熵位移在边界 a_u，a_D 和 a_η 上分别满足边界条件 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}^*$，$\boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{n}=-\sigma^*$ 和 $\boldsymbol{\eta}\cdot\boldsymbol{n}=\eta^*$；同时注意到在介质内有 $\varepsilon_{ij}=(u_{i,j}+u_{j,i})/2$，$\rho_e=D_{i,i}$ 和本构方程，由物理变分原理可得热释电体中的势能变分原理为

$$\begin{aligned}
\delta\Pi&=\int_V\delta(u-h_u)\mathrm{d}V-\delta Q-\delta W=0\\
\delta Q&=\int_V\delta r\mathrm{d}V-\int_{a_T}T^*\,\delta\eta\mathrm{d}a+\int_V T_{,i}\delta\eta_i\mathrm{d}V-\int_V T\delta s^{(a)}\,\mathrm{d}V\\
\delta W&=\int_V(f_k-\rho\ddot{u}_k)\delta u_k\mathrm{d}V+\int_V\varphi\,\delta\rho_e\mathrm{d}V+\int_{a_\sigma}T_k^*\,\delta u_k\mathrm{d}a+\int_{a_\varphi}\varphi^*\,\delta\sigma\mathrm{d}a
\end{aligned}\tag{10-117}$$

式中 $\delta\eta=n_i\delta\eta_i$，$\delta Q$ 是环境供给电介质内部的热量和热传导过程产生的热量之和，$T^*\delta\eta=q^*\delta t=\delta q^*$，$\delta W$ 是环境对电介质做的功。式(10-106)中的项 $\int_V\delta h_u\mathrm{d}V$ 是耗散能增量，$-\int_V T_{,i}\delta\eta_i\mathrm{d}V$ 是热传导过程产生的内部热量增量，变分泛函中有了这两项，便保证了 Fourier 热传导定律和温度边界条件。注意到温度 T 可以用 s 表示，所以独立变量是 $\boldsymbol{u}$，$\boldsymbol{D}$ 和 $\boldsymbol{\eta}$。注意到

$$\delta\int_V u\mathrm{d}V=\int_V(C_{ijkl}\varepsilon_{kl}-h_{kij}D_k-\hat{\alpha}_{ij}s)\delta u_{i,j}\mathrm{d}V+\int_V(-h_{kij}\varepsilon_{ij}+\beta_{kl}D_l-\hat{\tau}_ks)\delta D_k\mathrm{d}V-$$

$$\int_V (\hat{\alpha}_{ij}\varepsilon_{ji} + \hat{\tau}_i D_i - T_0 \hat{C}s)\delta s \mathrm{d}V =$$

$$\int_a \sigma_{ij} n_j \delta u_i \mathrm{d}a - \int_V \sigma_{ij,j}\delta u_i \mathrm{d}V + \int_V E_k \delta D_k \mathrm{d}V + \int_V T\delta s \mathrm{d}V$$

$$\delta\int_V h_u \mathrm{d}V = \int_V \hat{\lambda}_{ij} T \dot{\eta}_j \delta\eta_i \mathrm{d}V \tag{10-118}$$

把式(10－118)代入(10－117)，便得

$$\begin{aligned}\delta\Pi = & \int_a \sigma_{ij} n_j \delta u_i \mathrm{d}a - \int_V \sigma_{ij,j}\delta u_i \mathrm{d}V + \int_V E_k \delta D_k \mathrm{d}V + \int_V T\delta s \mathrm{d}V - \\ & \int_V \hat{\lambda}_{ij} T \dot{\eta}_j \delta\eta_i \mathrm{d}V - \int_V \delta r \mathrm{d}V + \int_{a_T} T^* \delta\eta \mathrm{d}a - \int_a T n_i \delta\eta_i \mathrm{d}a + \int_V T\delta\eta_{i,i}\mathrm{d}V + \int_V T\delta s^{(a)} \mathrm{d}V - \\ & \int_V (f_k - \rho\ddot{u}_k)\delta u_k \mathrm{d}V - \int_a \varphi n_i \delta D_i \mathrm{d}V + \int_V \varphi_{,i}\delta D_i \mathrm{d}V - \int_{a_\sigma} T_k^* \delta u_k \mathrm{d}a - \int_{a_\varphi} \varphi^* \delta\sigma \mathrm{d}a = \\ & \int_{a_\sigma} (\sigma_{ij} n_j - T_i^*)\delta u_i \mathrm{d}a - \int_V (\sigma_{ij,j} + f_k - \rho\ddot{u}_k)\delta u_i \mathrm{d}V + \int_V (E_k + \varphi_{,k})\delta D_k \mathrm{d}V + \\ & \int_{a_\varphi} (\varphi - \varphi^*)\delta\sigma \mathrm{d}a - \int_{a_T} (T - T^*)\delta\eta \mathrm{d}a + \int_V (T\delta s + T\delta s^{(a)} - \\ & T\hat{\lambda}_{ij}\dot{\eta}_j\delta\eta_i + T\delta\eta_{i,i} - \delta r)\mathrm{d}V = 0\end{aligned} \tag{10-119}$$

利用关系 $-T\hat{\lambda}_{ij}\dot{\eta}_j\delta\eta_i + T\delta\eta_{i,i} = T_{,i}\delta\eta_i + T\delta\eta_{i,i} = (T\delta\eta_i)_{,i} = (T\dot{\eta}_i\delta t)_{,i} = (q_i\delta t)_{,i}$ 以及 δu_i，δD_k 和 $\delta\eta_i$ 的任意性，便得

$$\begin{gathered}\sigma_{ij,j} + f_i - \rho\ddot{u}_i = 0, \quad E_i = -\varphi_{,i}\ (\text{介质内}) \\ T\delta s + T\delta s^{(a)} + \int_0^t q_{i,i}\mathrm{d}t_i - \delta r = 0\end{gathered} \tag{10-120a}$$

或

$$\dot{s} + \dot{s}^{(a)} = \frac{\dot{r}}{T} - \frac{q_{i,i}}{T}(\text{介质内}) \tag{10-120b}$$

$$\sigma_{ij}n_j = T_i^*(\text{在 } a_\sigma \text{ 上}), \quad \varphi = \varphi^*(\text{在 } a_\varphi \text{ 上}), \quad T = T^*(\text{在 } a_T \text{ 上}) \tag{10-120c}$$

如预设 $T\dot{s} + T\dot{s}^{(a)} = \dot{r} - q_{i,i}$，则式(9－119)中的最后一项化为

$$\int_V (T\delta s + T\delta s^{(a)} - T\hat{\lambda}_{ij}\dot{\eta}_j\delta\eta_i + T\delta\eta_{i,i} - \delta r)\mathrm{d}V = \int_V (-T_{,i} - T\hat{\lambda}_{ij}\dot{\eta}_j)\delta\eta_i \mathrm{d}V$$

所以得到 $T_{,i} = -T\hat{\lambda}_{ij}\dot{\eta}_j$。

同时根据变分的先决条件，还要加上

$$\boldsymbol{u} = \bar{\boldsymbol{u}}(\text{在 } a_u \text{ 上}), \quad D_i n_i = -\sigma^*(\text{在 } a_D \text{ 上}), \quad \eta_i n_i = \eta^*(\text{或 } q_i n_i = q^*)(\text{在 } a_\eta \text{ 上}) \tag{10-121}$$

由于 s 和 η 的关系复杂，所以内能变分原理不如电 Gibbs 函数变分原理更适合工程应用。热释电体的内能变分原理在以往的文献中非常少见。

10.5.6 Gibbs 函数变分原理

Gibbs 函数定义为

$$G = u - \sigma_{ij}\varepsilon_{ij} - Ts - E_i D_i, \quad \delta G = -(\varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij} + D_i\delta E_i + s\delta\vartheta) \tag{10-122}$$

设σ_{ij}，φ，ϑ在a_σ，a_φ，a_T上满足边界条件$\sigma_{ij}n_j = T_i^*$，$\varphi = \varphi^*$，$\vartheta = \vartheta^*$（亦可等于0），介质内满足$\sigma_{ij,j} = -(f_i - \rho \ddot{u}_i)$，$E_i = -\varphi_{,i}$和$T\dot{\eta}_i = q_i = -\lambda_{ij}\vartheta_{,j}$，同时假设本构方程可由$G$导出

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}}, \quad D_i = -\frac{\partial G}{\partial E_i}, \quad s = -\frac{\partial G}{\partial \vartheta} \tag{10-123}$$

并设G是σ_{ij}的对称函数，所以ε_{ij}是对称张量，则Gibbs函数变分原理可表示为

$$\begin{aligned}
&\delta \Pi'' = \int_V \delta(G + h_g)\mathrm{d}V - \delta Q^* - \delta w^{**} = 0 \\
&\delta Q^* = -\int_0^t\int_V \left(\frac{\dot{r}}{T}\right)\delta\vartheta \mathrm{d}V\mathrm{d}\tau + \int_0^t\int_{a_q} \dot{\eta}^* \delta\vartheta \mathrm{d}a\mathrm{d}\tau - \int_0^t\int_V \dot{s}^{(i)}\delta\vartheta \mathrm{d}V\mathrm{d}\tau + \\
&\qquad \int_0^t\int_V \rho_s \ddot{\vartheta}\delta\vartheta \mathrm{d}V\mathrm{d}\tau \\
&\delta W^{**} = -\int_V u_k \delta(f_k - \rho\ddot{u}_k)\mathrm{d}V - \int_V \rho_e \delta\varphi \mathrm{d}V - \int_{a_u} u_k^* \delta T_k \mathrm{d}a - \int_{a_D} \sigma^* \delta\varphi \mathrm{d}a
\end{aligned} \tag{10-124}$$

利用

$$\begin{aligned}
&\delta\int_V G\mathrm{d}V = -\int_V \varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}V + \int_a D_k n_k \delta\varphi \mathrm{d}a - \int_V D_{k,k}\delta\varphi \mathrm{d}V - \int_V s\delta\vartheta \mathrm{d}V \\
&\int_V \delta h_g \mathrm{d}V = -\int_a \left(\int_0^t \lambda_{ij}\frac{1}{T}\vartheta_{,i}n_j \mathrm{d}\tau\right)\delta\vartheta \mathrm{d}a + \int_V \left[\int_0^t \left(\lambda_{ij}\frac{1}{T}\vartheta_{,i}\right)_{,j}\right]\delta\vartheta \mathrm{d}\tau \mathrm{d}V \\
&\int_V u_k \delta(f_k - \rho\ddot{u}_k)\mathrm{d}V = -\int_V u_k \delta\sigma_{kj,j}\mathrm{d}V = -\int_a u_k \delta T_k \mathrm{d}a + \int_V u_{k,j}\delta\sigma_{kj}\mathrm{d}V
\end{aligned} \tag{10-125}$$

则式(10－124)化为

$$\begin{aligned}
\delta\Pi'' = &\int_{a_u}(u_k^* - u_k)\delta T_k \mathrm{d}a + \int_V (u_{i,j} - \varepsilon_{ij})\delta\sigma_{ij}\mathrm{d}V + \int_{a_D}(D_k n_k + \sigma^*)\delta\varphi \mathrm{d}a + \\
&\int_V (\rho_e - D_{k,k})\delta\varphi \mathrm{d}V - \int_0^t\int_{a_q}\left(\dot{\eta}^* + \lambda_{ij}\frac{1}{T}\vartheta_{,i}n_j \mathrm{d}\tau\right)\delta\vartheta \mathrm{d}a\mathrm{d}\tau - \\
&\int_V s\delta\vartheta \mathrm{d}V + \int_V \left\{\int_0^t \left[\left(\lambda_{ij}\frac{1}{T}\vartheta_{,i}\right)_{,j} + \frac{\dot{r}}{T} + \dot{s}^{(i)} - \rho_s\ddot{\vartheta}\right]\mathrm{d}\tau\right\}\delta\vartheta \mathrm{d}V
\end{aligned} \tag{10-126}$$

由于$\delta\sigma_{ij}$，$\delta\varphi$和δT变分的任意性，由上式可得

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}), \quad D_{k,k} = \rho_e \\
&s + \rho_s\dot{\vartheta} = \int_0^t \left[\frac{\dot{r}}{T} + \left(\lambda_{ij}\frac{1}{T}\vartheta_{,i}\right)_{,j} + \dot{s}^{(i)}\right]\mathrm{d}\tau, \quad \text{或}\dot{s} + \rho_s\ddot{\vartheta} = \frac{\dot{r}}{T} - \frac{q_{i,i}}{T}\text{（介质内）} \\
&u_k = u_k^*\text{（在}a_u\text{上）}, \quad D_k n_k = -\sigma^*\text{（在}a_D\text{上）} \\
&\int_0^t \lambda_{ij}\frac{1}{T}\vartheta_{,i}n_j \mathrm{d}\tau = -\eta^*, \quad \text{或}\dot{\eta}_i = \dot{\eta}_i^*, \quad \text{或}q_i = q_i^*\text{（在}a_q\text{上）}
\end{aligned} \tag{10-127}$$

式中已利用了应变的对称性质。如用G代替$-G$，则可得到更简单的变分公式。

10.5.7 单纯热传导的简单例子

对于温度范围变化不大的各向同性体的单纯热传导问题，式(9－110b)化为

$$\lambda\vartheta_{,ii} = C(\dot{\vartheta} + \rho_{s0}\ddot{\vartheta}) - \dot{r} \tag{10-128a}$$

对于 $r = 0$ 沿 x_1 方向传播的问题，则有

$$\lambda\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x_1^2} = C\left(\frac{\partial\vartheta}{\partial t} + \rho_{s0}\frac{\partial^2\vartheta}{\partial t^2}\right),\quad 或\frac{\partial^2\vartheta}{\partial x^2} = \frac{\partial\vartheta}{\partial\tau} + \frac{\partial^2\vartheta}{\partial\tau^2}$$

$$x = x_1\sqrt{\frac{C}{\lambda\rho_{s0}}} = \frac{x_1}{c\rho_{s0}},\quad \tau = \frac{t}{\rho_{s0}},\quad c = \sqrt{\frac{\lambda}{\rho_{s0}C}} \tag{10-128}$$

式中 x 为量纲一坐标，τ 为量纲一时间，c 为波的相速度。设

边界条件：　　$\vartheta(0, t) = \vartheta_0\mathrm{H}(t)$，　$\vartheta(\infty, t) = 0$，$t > 0$

初始条件：　　$\vartheta(x, 0) = 0$，　$\dot{\vartheta}(x, 0) = 0$，$x > 0$　　(10-129)

式中 $\mathrm{H}(t)$为 Heaviside 单位阶跃函数，ϑ_0 为常数。上式的解为

$$\vartheta(x, t) = \vartheta_0\mathrm{H}(x-t)\left[\mathrm{e}^{-x/2} + x\int_x^\tau \mathrm{e}^{-\varsigma/2}\frac{\mathrm{I}_1(\sqrt{\varsigma^2 - x^2}/2)}{2(\varsigma^2 - x^2)}\mathrm{d}\varsigma\right] \tag{10-130}$$

式中 $\mathrm{I}_1(\cdot)$为修正的第一类一阶的 Bessel 函数。上式表明，ϑ 是衰减的前进波，在波前 $x = \tau$ 或 $x_1 = ct$ 处，ϑ 存在大小为 $\mathrm{e}^{-x/2} = \mathrm{e}^{-x_1/2c\rho_{s0}}$ 的间断，且这一间断随 $x_1 = ct$ 的增加而减小。

对于没有初始条件的问题，可设

$$\vartheta = \Theta\exp(kx - \omega t)$$

式中 Θ 是常数振幅。把上式代入(9-128)的第一式，便得

$$k^2 = C\lambda^{-1}\omega^2(\mathrm{i}\omega^{-1} + \rho_{s0})$$

$$k = \pm(C\lambda^{-1}\rho_{s0})^{\frac{1}{2}}\omega\left[\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + \omega^{-2}\rho_{s0}^{-2}})} + \mathrm{i}\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + \omega^{-2}\rho_{s0}^{-2}})}\right]$$

从而得

$$\vartheta = \Theta\exp[\mathrm{i}(kx - \omega t)] = \Theta\exp(\mathrm{i}k_1x - k_2x - \omega t) = \Theta\exp(-k_2x)\exp(\mathrm{i}k_1x - \omega t)$$

$$k_1 = \pm(C\lambda^{-1}\rho_{s0})^{\frac{1}{2}}\omega\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + \omega^{-2}\rho_{s0}^{-2}})},\quad k_2 = (C\lambda^{-1}\rho_{s0})^{\frac{1}{2}}\omega\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \sqrt{1 + \omega^{-2}\rho_{s0}^{-2}})}$$

$$c = \frac{\omega}{k_1} = \sqrt{\frac{\lambda}{C\rho_{s0}}}\bigg/\sqrt{\frac{1}{2}(1 + \sqrt{1 + \omega^{-2}\rho_{s0}^{-2}})}$$

上式表明没有初始条件问题的温度波是衰减的弥散波。当 $\rho_{s0} \to 0$ 时，$c \to \sqrt{2\omega\lambda/C}$，这正是经典热传导理论中的结果。这表明当 ρ_{s0} 较小时，没有初始条件的问题可以不考虑惯性的影响。

10.5.8　其他形式的变分原理

在热释电材料中有 8 个特性函数，所以可以有 8 种基本的变分原理，其中独立变量最少的是电 Gibbs 函数变分原理，它只有 $\boldsymbol{u}$，φ，T 5 个独立变量。如果解除某些约束，则可以有更多的变分原理，读者可自行讨论。

10.5.9 经典热电弹性理论中的变分原理

如果在式(10－111)和(10－117)等式中略去含惯性熵的项,便得到经典热电弹性理论中的变分方程,此时温度方程不再是波动方程。

10.6 热释电体中的均匀热-电-弹性平面波

10.6.1 控制方程

热弹性介质中波的传播理论已有许多文献研究过[176],但热释电体中的热-电-弹性波传播的研究相对较少[177],它和压电体中的电弹性波的主要差别在于需要考虑温度的影响。热的传播总是伴随着能量耗散,因而平面波的波矢量是复数矢量,波矢量的虚数部分代表振幅的衰减,实数部分和波的传播速度矢量相关。振幅的衰减矢量方向(垂直等振幅平面)和波的传播方向(垂直等相位平面)不一定相同,衰减矢量方向和波的传播方向不一致的传播波称为非均匀波;衰减矢量方向和波的传播方向一致的传播波称为均匀波,文献[178]详细讨论了无限热释电体中的均匀热-电-弹性波。

本构方程为式(10－109),热传导时的熵方程为式(10－103),不考虑热源 $(r=0)$ 时则有

$$\begin{gathered}\sigma_{ij}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl}-e_{kij}E_k-\alpha_{ij}\vartheta,\quad D_i=\epsilon_{ij}E_j+e_{ikl}\varepsilon_{kl}+\tau_i\vartheta\\ s=\alpha_{ij}\varepsilon_{ij}+\tau_iE_i+C\vartheta/T_0,\quad T\dot{s}+T\dot{s}^{(a)}=-q_{i,i}\end{gathered}\tag{10－131}$$

在惯性熵理论中, $\dot{s}^{(a)}=\rho_s\ddot{T}=C\rho_{s0}\ddot{T}/T_0$;但在 L－S 理论中,$\dot{s}^{(a)}=0$, 热传导方程取

$$q_i+\tau_0\dot{q}_i=-\lambda_{ij}T_{,j}\tag{10－132}$$

10.6.2 取用 $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\vartheta}$, $\boldsymbol{q}$ 为自变量

把上列诸方程代入无体积力的运动方程和无自由电荷的 Gauss 电学方程,不考虑内热源 $(r=0)$, 对于 L－S 理论,可得到

$$\begin{gathered}C_{ijkl}u_{k,lj}+e_{kij}\varphi_{,kj}-\alpha_{ji}\vartheta_{,j}=\rho\ddot{u}_i,\quad e_{ikl}u_{k,li}-\epsilon_{ij}\varphi_{,ji}+\tau_j\vartheta_{,j}=0\\ q_{i,i}+T_0\alpha_{ij}\dot{u}_{i,j}-T_0\tau_i\dot{\varphi}_{,i}+C\dot{\vartheta}=0,\quad q_i+\tau_0\dot{q}_i=-\lambda_{ij}\vartheta_{,j}\end{gathered}\tag{10－133}$$

对于惯性熵理论,得到

$$\begin{gathered}C_{ijkl}u_{k,lj}+e_{kij}\varphi_{,kj}-\alpha_{ji}\vartheta_{,j}=\rho\ddot{u}_i,\quad e_{ikl}u_{k,li}-\epsilon_{ij}\varphi_{,ji}+\tau_j\vartheta_{,j}=0\\ q_{i,i}+T_0\alpha_{ij}\dot{u}_{i,j}-T_0\tau_i\dot{\varphi}_{,i}+C\dot{\vartheta}+C\rho_{s0}\ddot{\vartheta}=0,\quad q_i=-\lambda_{ij}\vartheta_{,j}\end{gathered}\tag{10－134}$$

对于无限空间传播的热电弹性均匀平面波,可设

$$u_k=U_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kn_mx_m-\omega t)},\quad \varphi=\Phi\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kn_mx_m-\omega t)},\quad \vartheta=\Theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kn_mx_m-\omega t)},\quad q_j=Q_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kn_mx_m-\omega t)}\tag{10－135}$$

式中 U_k, Φ, Θ, Q_j 分别为位移、电势、温度和热流的待定振幅,k 为波数,n_i 为波的传播方向

矢量,ω 为圆频率,t 为时间。一般情况下波数为复数,即

$$k = \alpha + \mathrm{i}\beta,\quad \mathrm{e}^{\mathrm{i}(kn_m x_m - \omega t)} = \mathrm{e}^{-\beta n_m x_m}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\alpha n_m x_m - \omega t)},\quad c_i = (\omega/\alpha) n_i \tag{10-136}$$

式中 c 为相速度矢量,β 为衰减系数。把式(10-135)代入(10-133),得(L-S 理论)

$$\begin{aligned}
&(C_{ijkl} n_l n_j k^2 - \rho\omega^2 \delta_{ik}) U_k + e_{kij} n_k n_j k^2 \Phi + \mathrm{i}\alpha_{ij} n_j k\Theta = 0\\
&e_{jkl} n_l n_j k^2 U_k - \epsilon_{jk} n_k n_j k^2 \Phi - \mathrm{i}\tau_j n_j k\Theta = 0\\
&T_0 \alpha_{kj} n_j k\omega U_k - T_0 \tau_k n_k k\omega\Phi - \mathrm{i}C\omega\Theta + \mathrm{i}kn_j Q_j = 0\\
&\lambda_{ji} n_i k\Theta - (\tau_0\omega + \mathrm{i}) Q_j = 0
\end{aligned} \tag{10-137}$$

式(10-137)是含 8 个未知量 U_k, Φ, Θ, Q_j 的 8 个方程。引入符号

$$\begin{aligned}
&\Gamma_{ik} = C_{ijkl} n_j n_l,\quad e_i^* = e_{kij} n_k n_j,\quad \alpha_i^* = \alpha_{ij} n_j\\
&\tau^* = \tau_j n_j,\quad \epsilon^* = \epsilon_{jk} n_k n_j,\quad \lambda_j^* = \lambda_{ij} n_i,\quad \lambda^* = \lambda_j^* n_j
\end{aligned} \tag{10-138}$$

则式(10-137)可简记为

$$\begin{aligned}
&(\Gamma_{ik} k^2 - \rho\omega^2 \delta_{ik}) U_k + e_i^* k^2 \Phi + \mathrm{i}\alpha_i^* k\Theta = 0\\
&e_k^* k^2 U_k - \epsilon^* k^2 \Phi - \mathrm{i}\tau^* k\Theta = 0\\
&T_0 \alpha_k^* k\omega U_k - T_0 \tau^* k\omega\Phi - \mathrm{i}C\omega\Theta + \mathrm{i}kn_j Q_j = 0\\
&\lambda_j^* k\Theta - (\tau_0\omega + \mathrm{i}) Q_j = 0
\end{aligned} \tag{10-139}$$

上式称为 Christoffel 方程,也可写成矩阵形式

$$\boldsymbol{A}'(k,\ \omega,\ \boldsymbol{n})\boldsymbol{U}' = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{U}' = [U_1,\ U_2,\ U_3,\ \Phi,\ \Theta,\ Q_1,\ Q_2,\ Q_3]^{\mathrm{T}} \tag{10-140}$$

式中

$$|\boldsymbol{A}'(k,\ \omega,\ \boldsymbol{n})| = \begin{vmatrix}
\Gamma_{11}k^2 - \rho\omega^2 & \Gamma_{12}k^2 & \Gamma_{13}k^2 & e_1^* k^2 & \mathrm{i}\alpha_1^* k & 0 & 0 & 0\\
\Gamma_{21}k^2 & \Gamma_{22}k^2 - \rho\omega^2 & \Gamma_{23}k^2 & e_2^* k^2 & \mathrm{i}\alpha_2^* k & 0 & 0 & 0\\
\Gamma_{31}k^2 & \Gamma_{32}k^2 & \Gamma_{33}k^2 - \rho\omega^2 & e_3^* k^2 & \mathrm{i}\alpha_3^* k & 0 & 0 & 0\\
e_1^* k^2 & e_2^* k^2 & e_3^* k^2 & -\epsilon^* k^2 & -\mathrm{i}\tau^* k & 0 & 0 & 0\\
T_0\alpha_1^* k\omega & T_0\alpha_2^* k\omega & T_0\alpha_3^* k\omega & -T_0\tau^* k\omega & -\mathrm{i}C\omega & \mathrm{i}kn_1 & \mathrm{i}kn_2 & \mathrm{i}kn_3\\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1^* k & -(\tau_0\omega + \mathrm{i}) & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2^* k & 0 & -(\tau_0\omega + \mathrm{i}) & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3^* k & 0 & 0 & -(\tau_0\omega + \mathrm{i})
\end{vmatrix} \tag{10-141}$$

要 $\boldsymbol{U}'$ 有解,必须 $\det\boldsymbol{A}'(k,\ \omega,\ \boldsymbol{n})=0$,这导致下述特征方程

$$[F_8(\omega,\ \boldsymbol{n})k^8 + F_6(\omega,\ \boldsymbol{n})k^6 + F_4(\omega,\ \boldsymbol{n})k^4 + F_2(\omega,\ \boldsymbol{n})k^2 + F_0(\omega,\ \boldsymbol{n})]k^2 = 0 \tag{10-142}$$

给定$(\omega,\ \boldsymbol{n})$,由上式便可解出 k^2,得到 $k_{4+i} = -k_i$, $i = 1 \sim 4$。由于讨论的是准静态电磁场,所以没有电磁波,或电磁波具有无穷大的波速,这对应于 $k^2=0$ 的两个根。k^2 对应的两个根,具

有相同的波速，但沿相反的方向传播，因而对应一个确定的方向，k 只有 4 个根，这对应于 4 个波速，即在热释电体中存在 4 个不同速度的波，和压电体相比，增加了一个温度波。惯性熵理论可作类似讨论，此处从略。

10.6.3 取用 $\boldsymbol{u}$, φ, ϑ 为自变量

如果从式(10－133)中消去 $\boldsymbol{q}$，便得到用 $\boldsymbol{u}$, φ, ϑ 表示的 L－S 理论

$$\begin{gathered} C_{ijkl}u_{k,lj}+e_{kij}\varphi_{,kj}-\alpha_{ji}\vartheta_{,j}=\rho\ddot{u}_i,\quad e_{ikl}u_{k,li}-\epsilon_{ij}\varphi_{,ji}+\tau_j\vartheta_{,j}=0 \\ -\lambda_{ij}\vartheta_{,ji}+T_0\alpha_{ij}(\dot{u}_{i,j}+\tau_0\ddot{u}_{i,j})-T_0\tau_i(\dot{\varphi}_{,i}+\tau_0\ddot{\varphi}_{,i})+C(\dot{\vartheta}+\tau_0\ddot{\vartheta})=0 \end{gathered} \tag{10-143}$$

如果从式(10－134)中消去 $\boldsymbol{q}$，便得到惯性熵理论

$$\begin{gathered} C_{ijkl}u_{k,lj}+e_{kij}\varphi_{,kj}-\alpha_{ji}\vartheta_{,j}=\rho\ddot{u}_i,\quad e_{ikl}u_{k,li}-\epsilon_{ij}\varphi_{,ji}+\tau_j\vartheta_{,j}=0 \\ -\lambda_{ij}\vartheta_{,j}+T_0\alpha_{ij}\dot{u}_{i,j}-T_0\tau_i\dot{\varphi}_{,i}+C(\dot{\vartheta}+\rho_{s0}\ddot{\vartheta})=0 \end{gathered} \tag{10-144}$$

对比式(10－143)和(10－144)可知，式(10－143)中的第三个方程比(10－144)增加了弹性和电学阻尼项，但式(10－144)中的系数 ρ_{s0} 代表熵惯性，而式(10－143)中的 τ_0 代表阻尼系数。这两个理论可以统一写成下列方程

$$\begin{gathered} C_{ijkl}u_{k,lj}+e_{kij}\varphi_{,kj}-\alpha_{ji}\vartheta_{,j}=\rho\ddot{u}_i,\quad e_{ikl}u_{k,li}-\epsilon_{ij}\varphi_{,ji}+\tau_j\vartheta_{,j}=0 \\ T_0\alpha_{ij}(\dot{\varepsilon}_{ij}+\tau_1\ddot{\varepsilon}_{ij})+T_0\tau_i(\dot{E}_i+\tau_2\ddot{E}_i)+\rho C(\dot{\vartheta}+\tau_0\ddot{\vartheta})=\lambda_{ij}\vartheta_{,ji} \end{gathered} \tag{10-145}$$

当 $\tau_1=\tau_2=\tau_0$ 时，上式代表 L－S 理论；当 $\tau_1=\tau_2=0$，$\tau_0=\rho_{s0}$ 时，上式代表惯性熵理论。

对于平面波，设

$$u_k=U_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kn_mx_m-\omega t)},\quad \varphi=\Phi\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kn_mx_m-\omega t)},\quad \vartheta=\Theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kn_mx_m-\omega t)} \tag{10-146}$$

把式(10－146)代入(10－145)后，便得 Christoffel 方程

$$\begin{gathered} (\Gamma_{ik}k^2-\rho\omega^2\delta_{ik})U_k+e_i^*k^2\Phi+\mathrm{i}\alpha_i^*k\Theta=0 \\ e_k^*k^2U_k-\epsilon^*k^2\Phi-\mathrm{i}\tau^*k\Theta=0 \\ T_0\alpha_k^*k\omega(1-\mathrm{i}\tau_1\omega)U_k-T_0\tau^*k\omega(1-\mathrm{i}\tau_2\omega)\Phi+(\lambda^*k^2-C\tau_0\omega^2-\mathrm{i}C\omega)\Theta=0 \end{gathered} \tag{10-147}$$

其矩阵形式为

$$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{k},\omega)\boldsymbol{U}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{U}=[U_1,U_2,U_3,\Phi,\Theta]^{\mathrm{T}} \tag{10-148}$$

式中

$$\begin{gathered} \boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{k},\omega)=\begin{bmatrix} \Gamma_{11}k^2-\rho\omega^2 & \Gamma_{12}k^2 & \Gamma_{13}k^2 & e_1^*k^2 & \mathrm{i}\alpha_1^*k \\ \Gamma_{21}k^2 & \Gamma_{22}k^2-\rho\omega^2 & \Gamma_{23}k^2 & e_2^*k^2 & \mathrm{i}\alpha_2^*k \\ \Gamma_{31}k^2 & \Gamma_{32}k^2 & \Gamma_{33}k^2-\rho\omega^2 & e_3^*k^2 & \mathrm{i}\alpha_3^*k \\ e_1^*k^2 & e_2^*k^2 & e_3^*k^2 & -\epsilon^*k^2 & -\mathrm{i}\tau^*k \\ T_0\alpha_1^*k\omega\eta_1 & T_0\alpha_2^*k\omega\eta_1 & T_0\alpha_3^*k\omega\eta_1 & -T_0\tau^*k\omega\eta_2 & \lambda^*k^2-C\eta_3 \end{bmatrix} \\ \eta_1=1-\mathrm{i}\tau_1\omega,\ \eta_2=1-\mathrm{i}\tau_2\omega,\ \eta_3=\tau_0\omega^2+\mathrm{i}\omega \end{gathered} \tag{10-149}$$

要 $\boldsymbol{U}$ 有解，必须 $\det\boldsymbol{\Lambda}(k,\ \omega,\ \boldsymbol{n})=0$。

10.6.4 取用 $\boldsymbol{u}$，ϑ 为自变量

从式(10-145)中再消去 Φ 便得用 $\boldsymbol{u}$，ϑ 表示的统一形式的方程，因其太复杂，所以仍分开写。对于 L-S 理论，得下述 Christoffel 方程

$$
\begin{aligned}
&(\Gamma'_{ik}k^2-\rho\omega^2\delta_{ik})U_k+\mathrm{i}k\alpha'^*_i\Theta=0\\
&T_0\omega k\,\alpha'^*_k U_k-\mathrm{i}\left(T_0\omega C'^*-\frac{\lambda^*}{\tau_0\omega+\mathrm{i}}k^2\right)\Theta=0
\end{aligned}
\tag{10-150}
$$

式中

$$
\begin{gathered}
\Gamma'_{ik}=C_{ijkl}n_jn_l+\frac{(e_{jkl}n_ln_j)(e_{piq}n_pn_q)}{\varepsilon_{mn}n_nn_m},\quad \alpha'^*_i=\alpha_{ij}n_j-\frac{e_{kij}\tau_pn_kn_jn_p}{\varepsilon_{mn}n_nn_m}\\
C'^*=\frac{C}{T_0}-\frac{(\tau_rn_r)^2}{\varepsilon_{mn}n_nn_m}
\end{gathered}
\tag{10-151}
$$

对于惯性熵理论，得下述 Christoffel 方程

$$
\begin{aligned}
&(\Gamma'_{ik}k^2-\rho\omega^2\delta_{ik})U_k+\mathrm{i}k\alpha'^*_i\Theta=0\\
&T_0\omega k\alpha'^*_i U_k-T_0C'^*\omega\Theta+[\lambda^*k^2-C\rho_{s0}\omega^2]\Theta=0
\end{aligned}
\tag{10-152}
$$

10.6.5 数值例题[178]

和压电体一样，热释电体中平面波的传播特性也常用波面、速度面和慢度面来刻画。现讨论 $BaTiO_3$ 在 $\omega=2\pi\times10^6\ \mathrm{s}^{-1}$ 下的特征面。通常材料手册给出的材料常数是以 x_3 轴为极化轴、用 Voigt 形式给出的二阶张量，它们和四阶材料弹性常数张量之间的转换关系为：$C_{ijkl}\leftrightarrow C_{V(ij)V(kl)}$，且 $V(ij)$ 按式(1-3)中应力的下标转换规则转换，如 $C_{3331}\leftrightarrow C_{V(33)V(31)}=C_{35}$；三阶压电常数张量的转换规则为：第一个下标和电场对应，是单下标，符号不变；后两个下标和应变对应，按式(1-3)中应力的下标转换规则转换，如压电常数 $e_{131}\leftrightarrow e_{15}$。如以 x_2 轴为极化轴，文献中给出的材料常数需要转换，在 Voigt 形式中，即把下标 3 和 2 互换，5 和 6 互换。本例题取用(x_1，x_3)坐标系，其中的 $BaTiO_3$ 的材料常数如下：

$C_{11}=150$，$C_{12}=66$，$C_{13}=66$，$C_{33}=146$，$C_{44}=44$，$C_{66}=43$ MPa；

$e_{13}=-4.35$，$e_{33}=17.5$，$e_{15}=11.4\ \mathrm{C/m^2}$；

$\epsilon_{11}=9.87$，$\epsilon_{33}=11.15\ \mathrm{C/V\cdot m}$；

$\alpha^{\varepsilon}_{11}=8.53\cdot10^{-6}$，$\alpha^{\varepsilon}_{33}=1.99\cdot10^{-6}/\mathrm{K}$；

$\tau=5.53\cdot10^{-3}\mathrm{C/m^2\cdot K}$；

$\lambda_{12}=1.1$，$\lambda_{33}=3.5\ \mathrm{J/m\cdot K\cdot s}$.

$\alpha^{\varepsilon}_{11}=\alpha^{\varepsilon}_{22}=(C_{11}+C_{12})\bar{\alpha}_{11}+(C_{13}+e_{31})\bar{\alpha}_{33}$，　$\alpha_{33}=2C_{13}\bar{\alpha}_{11}+(C_{33}+e_{33})\bar{\alpha}_{33}$

式中 $\alpha^{\varepsilon}_{11}$，$\alpha^{\varepsilon}_{33}$ 是通常的热膨胀系数。图 10-2(a)和(b)分别给出各向同性平面(x_1，x_2)切面上的弹性波和温度波的速度面；图 10-3(a)和(b)分别给出各向异性平面(x_1，x_3)切面上的弹性波和温度波的速度面；图 10-4(a)和(b)分别给出各向异性平面(x_1，x_3)切面上的弹性波和温度波的慢度面，图上的虚线表示纯弹性体的慢度面。

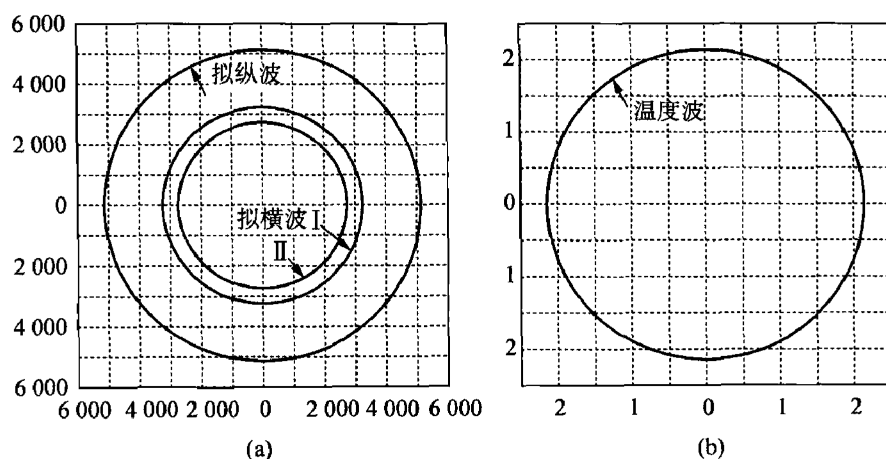


图 10-2 各向同性平面(x_1, x_2)内的速度面

(a) 弹性波；(b) 温度波

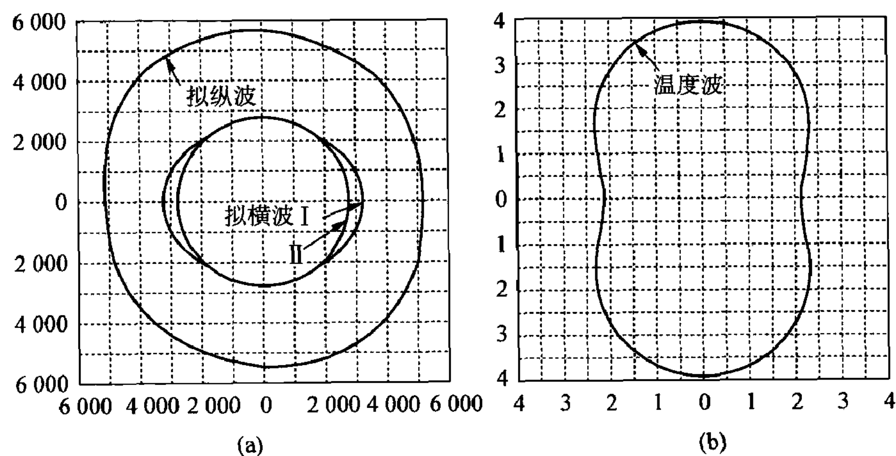


图 10-3 各向异性平面(x_1, x_3)内的速度面

(a) 弹性波；(b) 温度波

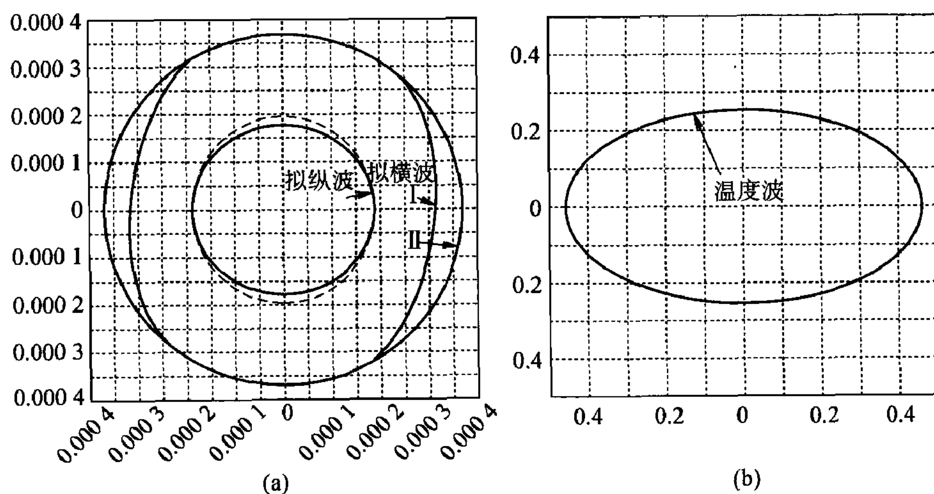


图 10-4 各向异性平面(x_1, x_3)内的慢度面

(a) 弹性波；(b) 温度波

由图可见，温度波的衰减很大，且相速度很小；而弹性波的衰减则很小。在原始文献[178]中，还在图 10-2～图 10-4 对应的图上用虚线画出没有压电效应和热释电效应时的情形，这样和热释电材料的实线比较，可以看出压电效应和热释电效应的影响都比较小。

为了考虑不同阻尼项的影响，暂设 τ_1，τ_2 和 τ_0 是 3 个相互独立的系数，对于一维情形有

$$
\begin{gathered}
(Yk^2-\rho\omega^2)U+ek^2\Phi+\mathrm{i}\alpha k\Theta=0\\
ekU_k-\epsilon k\Phi-\mathrm{i}\tau\Theta=0\\
T_0\alpha k\omega(1-\mathrm{i}\tau_1\omega)U-T_0\tau k\omega(1-\mathrm{i}\tau_2\omega)\Phi+(\lambda^* k^2-C\tau_0\omega^2-\mathrm{i}C\omega)\Theta=0
\end{gathered}
\tag{10-153}
$$

式中 Y 为弹性模量。分别令 $\tau_1=0$，$\tau_2=0$，研究 τ_0 的影响；分别令 $\tau_1=0$，$\tau_0=0$，研究 τ_2 的影响；分别令 $\tau_0=0$，$\tau_2=0$，研究 τ_1 的影响。取用的材料常数如下：

$\omega=2\pi\times10^6\ \mathrm{s^{-1}}$，$Y=150\,\mathrm{MPa}$，$\rho=5\,700\,\mathrm{kg/m^3}$，$T_0=293\,\mathrm{K}$，$\alpha=8.53\times10^{-6}\,1/\mathrm{K}$，$e=17.5\ \mathrm{C/m^2}$，$\epsilon=9.87\ \mathrm{C/V\cdot m}$，$\tau=5.53\times10^{3}\ \mathrm{C/m^2\cdot K}$，$\lambda=3.5\ \mathrm{J/m\cdot K\cdot s}$，$C=500\ \mathrm{J/K\cdot kg}$

数值计算表明，τ_1，τ_2 引起弹性波的衰减，τ_0 引起温度波的衰减，但引起弹性波的增强，若含 $C\tau_0$ 项的增强效果超过含 iC 项减弱的效果，则弹性波会加强，因此 τ_0 的取值范围受到限制。对于上面的例子，L-S 理论要求 $\tau_0<10^{-6}$，惯性熵理论要求 $\tau_0<10^{-14}$。这种差别是由于 L-S 理论中因修正的热传导定律中的黏性系数 τ_0 引起弹性阻尼 τ_1 和热释电阻尼 τ_2，而在惯性熵理论中，熵惯性系数 τ_0 或 ρ_{s0} 不会引起那些阻尼，弹性和电学过程是可逆的。压电体中高速弹性波的传播可能存在阻尼，即要考虑黏弹性的影响，这需要发展新的理论。

10.7 热释电体中的非均匀热-电-弹性平面波[179]

10.7.1 非均匀波的一般概念

当波矢量 k 为复数时，一般讲，波的传播矢量方向（等相位面的法线）和衰减矢量方向（等振幅面的法线）是不一致的，称这种波为非均匀波（图 10-5）。因此，对于任一平面波，其传播方程应当写成

$$
\begin{gathered}
f=f_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}=f_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_m x_m-\omega t)},\ \boldsymbol{k}=\boldsymbol{P}+\mathrm{i}\boldsymbol{A},\ \boldsymbol{P}=P\boldsymbol{n},\ \boldsymbol{A}=A\boldsymbol{m}\\
k_j=P_j+\mathrm{i}A_j=Pn_j+\mathrm{i}Am_j,\quad k^2=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}=P^2-A^2+2\mathrm{i}\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{A}
\end{gathered}
\tag{10-154}
$$

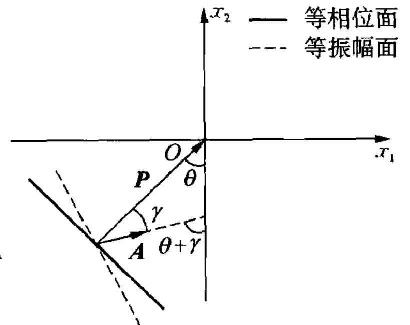


图 10-5　非均匀波中的矢量 $\boldsymbol{P}$ 和 $\boldsymbol{A}$

式中 $\boldsymbol{P}$ 为传播矢量，$\boldsymbol{n}$ 为传播方向单位矢量；$\boldsymbol{A}$ 为衰减矢量，$\boldsymbol{m}$ 为垂直等振幅面的单位矢量，在均匀波的情形有 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{m}$。今后设 $\boldsymbol{n}$ 和纵轴的夹角为 θ，即 $n_1=\sin\theta$，$n_2=\cos\theta$。$\boldsymbol{m}$ 和纵轴的夹角为 $\theta+\gamma$，$\boldsymbol{n}$ 和 $\boldsymbol{m}$ 的夹角为 γ，但如何确定 γ，尚无合适理论。利用式(10-154)，可推得

$$
\begin{gathered}
\boldsymbol{n}=[\sin\theta,\ \cos\theta]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{m}=[\sin(\theta+\gamma),\ \cos(\theta+\gamma)]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{m}=\cos\gamma\\
k_1=P_1+\mathrm{i}A_1=Pn_1+\mathrm{i}Am_1,\quad k_2=P_2+\mathrm{i}A_2=Pn_2+\mathrm{i}Am_2\\
P=\sqrt{P_1^2+P_2^2},\quad A=\sqrt{A_1^2+A_2^2}
\end{gathered}
\tag{10-155}
$$

对于均匀波，由于 $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{m}$，$\gamma=0$，有 $k_1=(P+\mathrm{i}A)\sin\theta$，$k_2=(P+\mathrm{i}A)\cos\theta$，所以只需用一个复数 $(P+\mathrm{i}A)$ 和一个入射角 θ 描写；但对于非均匀波，$\boldsymbol{n}\neq\boldsymbol{m}$，所以需要用 4 个参数 (P, A, θ, γ) 描写，即再增加一个参数 γ。非均匀波的理论在地球物理及地质力学中得到了充分研究[180~182]。下面的叙述主要根据文献[179]。

10.7.2 无限空间的非均匀波

下面以 $\boldsymbol{u}$，φ，ϑ 为自变量的统一形式的方程(10-145)～(10-149)为基础讨论问题。因为现在讨论非均匀波，Christoffel 方程式(10-148)和(10-149)改写为

$$\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{k},\omega)\boldsymbol{U}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{U}=[U_1, U_2, U_3, U_4, U_5]^{\mathrm{T}},\ U_4=\boldsymbol{\Phi},\ U_5=\boldsymbol{\Theta}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}=\begin{bmatrix}\Gamma_{11}(\boldsymbol{k})-\rho\omega^2 & \Gamma_{12}(\boldsymbol{k}) & \Gamma_{13}(\boldsymbol{k}) & e_1^*(\boldsymbol{k}) & \mathrm{i}\alpha_1^*(\boldsymbol{k})\\ \Gamma_{21}(\boldsymbol{k}) & \Gamma_{22}(\boldsymbol{k})-\rho\omega^2 & \Gamma_{23}(\boldsymbol{k}) & e_2^*(\boldsymbol{k}) & \mathrm{i}\alpha_2^*(\boldsymbol{k})\\ \Gamma_{31}(\boldsymbol{k}) & \Gamma_{32}(\boldsymbol{k}) & \Gamma_{33}(\boldsymbol{k})-\rho\omega^2 & e_3^*(\boldsymbol{k}) & \mathrm{i}\alpha_3^*(\boldsymbol{k})\\ e_1^*(\boldsymbol{k}) & e_2^*(\boldsymbol{k}) & e_3^*(\boldsymbol{k}) & -\epsilon^*(\boldsymbol{k}) & -\mathrm{i}\tau^*(\boldsymbol{k})\\ T_0\alpha_1^*(\boldsymbol{k})\xi_1 & T_0\alpha_2^*(\boldsymbol{k})\xi_1 & T_0\alpha_3^*(\boldsymbol{k})\xi_1 & -T_0\tau^*(\boldsymbol{k})\xi_2 & \lambda^*-\mathrm{i}C\xi\end{bmatrix} \tag{10-156}$$

式中

$$\begin{gathered}\Gamma_{ik}(\boldsymbol{k})=C_{ijkl}k_jk_l,\ e_i^*(\boldsymbol{k})=e_{kij}k_kk_j,\ \alpha_i^*(\boldsymbol{k})=\alpha_{ij}k_j\\ \tau^*(\boldsymbol{k})=\tau_jk_j,\ \epsilon^*(\boldsymbol{k})=\epsilon_{jk}k_kk_j,\ \lambda^*(\boldsymbol{k})=\lambda_{ij}k_ik_j\\ \xi_1=\omega-\mathrm{i}\omega^2\tau_1,\ \xi_2=\omega-\mathrm{i}\omega^2\tau_2,\ \xi=\omega-\mathrm{i}\omega^2\tau_0\end{gathered} \tag{10-157}$$

要 $\boldsymbol{U}$ 有非平凡解，必须

$$|\boldsymbol{\Lambda}|=0 \tag{10-158a}$$

代入 $k_j=Pn_j+\mathrm{i}Am_j$，并把 $|\boldsymbol{\Lambda}|=0$ 的实部与虚部分开，便得求解 (P, A, θ, γ) 的耦合的实方程

$$\mathrm{Re}\,|\boldsymbol{\Lambda}|=0,\quad \mathrm{Im}\,|\boldsymbol{\Lambda}|=0 \tag{10-158b}$$

对于非均匀波，需给定 (θ, γ)，并由上式给出足够的方程求解 (P, A)，从而可求得 (k_1, k_2)。因方程(10-158b)过于繁冗，故略去，但易于进行数值计算。为使 (P, A) 不取负值，要求 $-\pi/2<\gamma<\pi/2$[180, 182]。但目前还缺乏如何确定 γ 的理论。

和均匀波一样，式(10-156)只有 4 个独立的本征值：$\boldsymbol{k}_i=P_i\boldsymbol{n}+\mathrm{i}A_i\boldsymbol{m}$ $(i=1, 2, 3, 4)$，对应于 4 个相速度

$$c_i=\omega/P_i,\ P_i=\sqrt{(P_in_1)^2+(P_in_2)^2} \tag{10-159}$$

对应于每个复值的 $\boldsymbol{k}_i$，可由式(10-145)求出对应的振幅 $\boldsymbol{U}_i$(或本征矢量)，每个 $\boldsymbol{U}_i$ 中只有一个振幅分量是可以任意的，即比值 $U_{1i}:U_{2i}:U_{3i}:\Phi_i:\Theta_i$ 是确定的，亦即总体只有 5 个待定的振幅未知分量。波传播问题的一般解可以写成

$$\begin{gathered}u_k=\sum_{j=1}^4\beta_jU_{kj}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{jm}x_m-\omega t)},\quad \varphi=\sum_{j=1}^4\beta_j\Phi_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{jm}x_m-\omega t)},\quad \vartheta=\sum_{j=1}^4\beta_j\Theta_j\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{jm}x_m-\omega t)}\\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{jm}x_m-\omega t)}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}[(P_j\boldsymbol{n}+\mathrm{i}A_j\boldsymbol{m})\cdot\boldsymbol{x}-\omega t]}=\mathrm{e}^{-A_j\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(P_j\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{x}-\omega t)}\end{gathered} \tag{10-160}$$

式中 $\beta_j(i=1,2,3,4)$ 是待定系数,可以令 $\boldsymbol{U}_i$ 中的某个分量为 1 而完全确定 $\boldsymbol{U}_i$。

10.7.3 数值例题

作为例题,仍然讨论 $BaTiO_3$ 材料。图 10-6(a)和(b)分别给出不同入射角 θ 时衰减角 γ 对温度波的相速度 c_T 和衰减系数 A_T 影响,图 10-7(a)和(b)分别给出不同衰减角 γ 时各向异性平面(x_1, x_3)上的弹性波和温度波的速度面;图 10-8(a)和(b)分别给出不同 γ 时各向同性平面(x_1, x_2)上的弹性波和温度波的速度面。由图可见,γ 对弹性波的速度面影响甚小,但对温度波的速度面有一定影响,而对衰减系数都有影响。

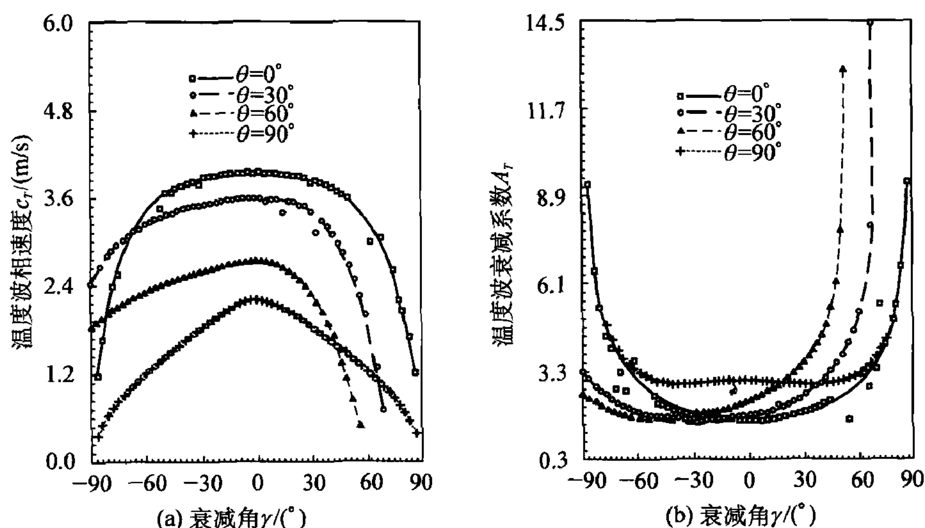


图 10-6 不同入射角时衰减角对温度波的影响

(a) 温度波相速度;(b) 温度波衰减系数

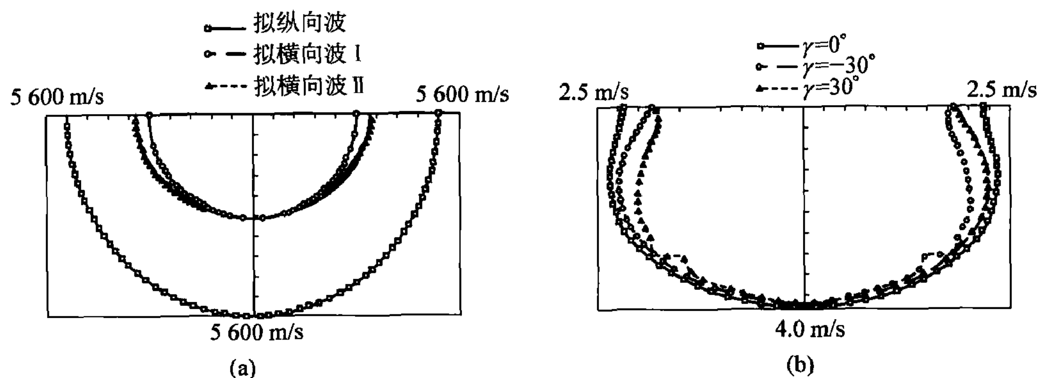


图 10-7 不同衰减角时各向异性平面(x_1, x_3)上的速度面

(a) 弹性波速度面;(b) 温度波速度面

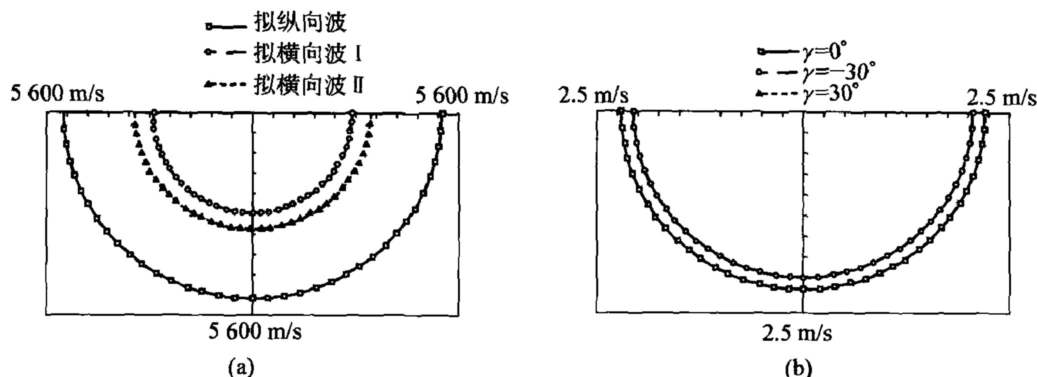


图 10-8 不同衰减角时各向同性平面(x_1, x_2)上的速度面

(a) 弹性波速度面；(b) 温度波速度面

10.7.4 非均匀波在界面的反射和透射[135]

现在讨论位于(x_1, x_2)平面的拟纵向弹性入射波从下半平面 $x_2 \leqslant 0$ 进入介质Ⅰ，在界面 $x_2 = 0$ 处反射回介质Ⅰ，和透射到上半平面 $x_2 \geqslant 0$ 介质Ⅱ的问题。应当注意的是，根据本构方程，伴随入射拟纵向弹性波时必有拟横向弹性入射波、电势波和温度波。图 10-9 表示入射角(和 x_2 轴的夹角)为 θ 的入射拟纵向弹性波($\boldsymbol{P}_1^{(0)}$, $\boldsymbol{A}_1^{(0)}$)，产生三个弹性反射波($\boldsymbol{P}_1^{(r)}$, $\boldsymbol{A}_1^{(r)}$; $\boldsymbol{P}_2^{(r)}$, $\boldsymbol{A}_2^{(r)}$; $\boldsymbol{P}_3^{(r)}$, $\boldsymbol{A}_3^{(r)}$)、一个温度反射波($\boldsymbol{P}_4^{(r)}$, $\boldsymbol{A}_4^{(r)}$)和一个表面波($\boldsymbol{P}_s^{(r)}$, $\boldsymbol{A}_s^{(r)}$)；以及三个弹性透射波($\boldsymbol{P}_1^{(t)}$, $\boldsymbol{A}_1^{(t)}$; $\boldsymbol{P}_2^{(t)}$, $\boldsymbol{A}_2^{(t)}$; $\boldsymbol{P}_3^{(t)}$, $\boldsymbol{A}_3^{(t)}$)、一个温度透射波($\boldsymbol{P}_4^{(t)}$, $\boldsymbol{A}_4^{(t)}$)和一个表面波($\boldsymbol{P}_s^{(t)}$, $\boldsymbol{A}_s^{(t)}$)。为清楚起见，图 10-9(a)画出均匀波的入射、反射、透射和表面波，而图 10-9(b)中只画出了拟纵向弹性波和表面波，其他的波没有画出。对惯性熵理论和 L-S 理论，要采用各自的弹性波速和衰减系数。界面 $x_2 = 0$ 上的连接条件是

$$
\begin{gathered}
u_i^{\mathrm{I}} = u_i^{\mathrm{II}}, \quad \varphi^{\mathrm{I}} = \varphi^{\mathrm{II}}, \quad \vartheta^{\mathrm{I}} = \vartheta^{\mathrm{II}} \\
\sigma_{ij}^{\mathrm{I}} n_i^{\mathrm{I}} + \sigma_{ij}^{\mathrm{II}} n_i^{\mathrm{II}} = 0, \quad D_i^{\mathrm{I}} n_i^{\mathrm{I}} + D_i^{\mathrm{II}} n_i^{\mathrm{II}} = 0, \quad \lambda_{ij}^{\mathrm{I}} \vartheta_{,j}^{\mathrm{I}} n_i^{\mathrm{I}} + \lambda_{ij}^{\mathrm{II}} \vartheta_{,j}^{\mathrm{II}} n_i^{\mathrm{II}} = 0
\end{gathered}
\tag{10-161}
$$

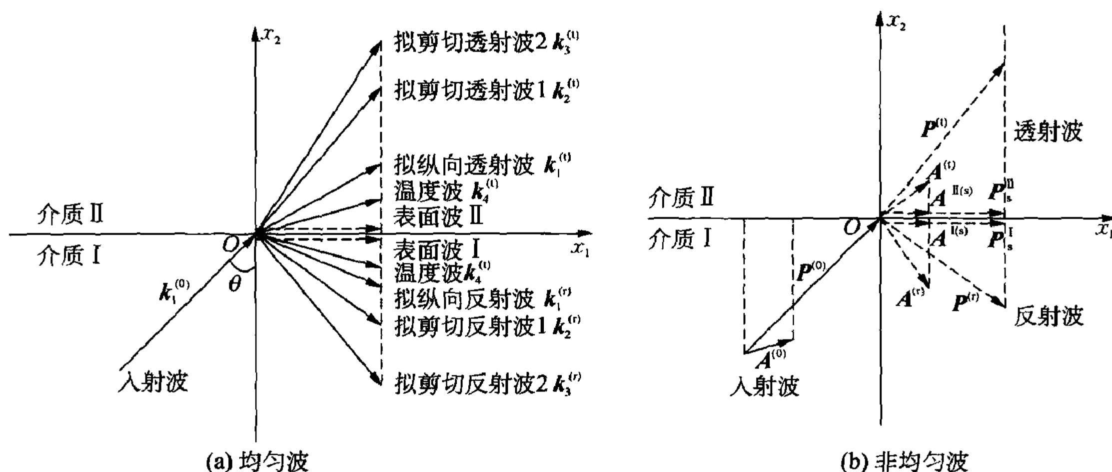


图 10-9 波在界面的反射和透射

式中$\lambda_{ij}^{\mathrm{I}}\vartheta_{,j}^{\mathrm{I}}$和$\lambda_{ij}^{\mathrm{II}}\vartheta_{,j}^{\mathrm{II}}$分别等价于$q_i^{\mathrm{I}}$ 和q_i^{II}，其中$n_i^{\mathrm{II}}=-n_i^{\mathrm{I}}$。

设波矢量为$\boldsymbol{k}^{(0)}$的入射波位于下半平面Ⅰ，$x_2\leqslant 0$，并可表示为

$$u_k^{(0)}=U_k^{(0)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_m^{(0)}x_m-\omega t)},\quad \varphi^{(0)}=\Phi^{(0)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_m^{(0)}x_m-\omega t)},\quad \vartheta^{(0)}=\Theta^{(0)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_m^{(0)}x_m-\omega t)},\ m=1,2 \tag{10-162}$$

式中$U_k^{(0)}$，$\Phi^{(0)}$，$\Theta^{(0)}$和$k_m^{(0)}$都是已知的，在半平面Ⅰ的反射波可表成

$$\begin{gathered}u_k^{(r)}=\sum_{j=1}^{N}\beta_j^{(r)}U_{kj}^{(r)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{jm}^{(r)}x_m-\omega t)},\quad \varphi^{(r)}=\sum_{j=1}^{N}\beta_j^{(r)}\Phi_j^{(r)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{jm}^{(r)}x_m-\omega t)}\\ \vartheta^{(r)}=\beta_j^{(r)}\sum_{j=1}^{N}\Theta_j^{(r)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{jm}^{(r)}x_m-\omega t)}\end{gathered} \tag{10-163}$$

在半平面Ⅱ的透射波可表成

$$\begin{gathered}u_k^{(t)}=\sum_{j=1}^{N}\beta_j^{(t)}U_{kj}^{(t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{jm}^{(t)}x_m-\omega t)},\quad \varphi^{(t)}=\sum_{j=1}^{N}\beta_j^{(t)}\Phi_j^{(t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{jm}^{(t)}x_m-\omega t)}\\ \vartheta^{(t)}=\sum_{j=1}^{N}\beta_j^{(t)}\Theta_j^{(t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{jm}^{(t)}x_m-\omega t)}\end{gathered} \tag{10-164}$$

式(10-163)和(10-164)中的N=5是包括独立的体波和表面波的总数，$\beta_j^{(r)}$是第j个波的振幅反射系数，$\beta_j^{(t)}$是第j个波的振幅透射系数。显然有

$$\begin{gathered}u_k^{\mathrm{I}}=u_k^{(0)}+u_k^{(r)},\quad u_k^{\mathrm{II}}=u_k^{(t)},\quad \varphi^{\mathrm{I}}=\varphi^{(0)}+\varphi^{(r)},\quad \varphi^{\mathrm{II}}=\varphi^{(t)},\quad \vartheta^{\mathrm{I}}=\vartheta^{(0)}+\vartheta^{(r)},\quad \vartheta^{\mathrm{II}}=\vartheta^{(t)}\\ \sigma_{ij}^{\mathrm{I}}=\sigma_{ij}^{(0)}+\sigma_{ij}^{(r)},\quad \sigma_{ij}^{\mathrm{II}}=\sigma_{ij}^{(t)},\quad D_i^{\mathrm{I}}=D_i^{(0)}+D_i^{(r)},\quad D_i^{\mathrm{II}}=D_i^{(t)}\end{gathered} \tag{10-165}$$

把式(10-162)～(10-165)代入(10-161)，便得

$$k_1^{(0)}=k_{j1}^{(r)}=k_{j1}^{(t)},\quad k_{j1}^{(\alpha)}=P_{j1}^{(\alpha)}+\mathrm{i}A_{j1}^{(\alpha)}=P_j^{(\alpha)}n_1+\mathrm{i}A_j^{(\alpha)}m_1 \tag{10-166a}$$

式中$\alpha=0$，r，t；$j=1\sim N$，且$\alpha=0$时j消失。把上式分成实部与虚部后，便可得到

$$\begin{gathered}P^{(0)}\sin\theta^{(0)}=P_j^{(r)}\sin\theta_j^{(r)}=P_j^{(t)}\sin\theta_j^{(t)},\ j=1\sim N\\ A^{(0)}\sin(\theta^{(0)}+\gamma^{(0)})=A_j^{(r)}\sin(\theta_j^{(r)}+\gamma_j^{(r)})=A_j^{(t)}\sin(\theta_j^{(t)}+\gamma_j^{(t)})\end{gathered} \tag{10-166b}$$

由上式可以推出广义Snell's定律

$$\begin{gathered}\sin\theta^{(0)}/c^{(0)}=\sin\theta_j^{(r)}/c_j^{(r)}=\sin\theta_j^{(t)}/c_j^{(t)}\\ c^{(0)}=\omega/P^{(0)},\quad c_j^{(r)}=\omega/P_j^{(r)},\quad c_j^{(t)}=\omega/P_j^{(t)},\ j=1\sim N\end{gathered} \tag{10-167}$$

应当注意，讨论波的反射和透射时，所有波的波矢量在x_1方向的分量都相同，即存在$k_{j1}^{(r)}=k_{j1}^{(t)}=k_1^{\mathrm{I}(s)}=k_1^{\mathrm{II}(s)}=k_1^{(0)}$，因而Christoffel方程式(10-158)要求的未知量是复常数$k_{j2}^{(r)}$和$k_{j2}^{(t)}$，此时由Christoffel方程可求出5种波，除4种在均匀空间内也存在的体波外，还出现了新的接近表面波的拟表面波。波的反射和透射问题和在均匀空间里传播的情形不同，在均匀空间里传播的波是给定θ和γ，寻找两个实常数(P, A)，进而求得(k_{j1}, k_{j2})，此时k_{j1}和k_{j2}虽是复数，但由两个实常数确定，k_{j1}和k_{j2}需同时确定。而在波的反射和透射问题中，k_{j1}和k_{j2}之间是不相关的，k_{j1}是给定的，k_{j2}是待定的复常数，波传播的特征方程是满秩的，这便导致拟表面波的出现。所以在式(10-166)中，含有体积反射和透射波的$\beta_j^{(r)}$和$\beta_j^{(t)}$$(j=1\sim4)$8个复未知量，

同时还含有拟表面波的两个未知量 $\beta_5^{(r)}=\beta_s^{(r)}$ 和 $\beta_5^{(t)}=\beta_s^{(t)}$，因而共有 10 个未知量，正好满足式(10－161)表示的界面上的 10 个复连接条件，所以问题可解。

文献[183]也讨论了热释电材料中的波的反射和透射。

10.7.5 二维非均匀波在真空/电介质界面的反射

如果介质Ⅱ是真空，那么入射波会从真空界面反射回来，没有透射现象。略去介质Ⅰ的上标(Ⅰ)，对于二维问题，对应于无限空间非均匀波的 Christoffel 方程(10－156)现在化为

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{k},\omega)\boldsymbol{U}=\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{U}=[U_1,U_2,U_4,U_5]^{\mathrm{T}},\ U_4=\Phi,\ U_5=\Theta$$

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\Gamma_{11}(\boldsymbol{k})-\rho\omega^2 & \Gamma_{12}(\boldsymbol{k}) & e_1^*(\boldsymbol{k}) & \mathrm{i}\alpha_1^*(\boldsymbol{k})\\ \Gamma_{21}(\boldsymbol{k}) & \Gamma_{22}(\boldsymbol{k})-\rho\omega^2 & e_2^*(\boldsymbol{k}) & \mathrm{i}\alpha_2^*(\boldsymbol{k})\\ e_1^*(\boldsymbol{k}) & e_2^*(\boldsymbol{k}) & -\epsilon^*(\boldsymbol{k}) & -\mathrm{i}\tau^*(\boldsymbol{k})\\ T_0\alpha_1^*(\boldsymbol{k})\xi_1 & T_0\alpha_2^*(\boldsymbol{k})\xi_1 & -T_0\tau^*(\boldsymbol{k})\xi_2 & \lambda^*-\mathrm{i}\rho C\xi\end{bmatrix}\tag{10-168}$$

式中 ξ_i 见式(10－157)。对于波矢量为 $\boldsymbol{k}^{(0)}$ 的入射波，式(10－168)中 $k_1^{(0)}=k_{j1}^{(r)}(j=1\sim4)$，边界条件简化为

$$\sigma_{2j}^{(0)}+\sigma_{2j}^{(r)}=0,\quad D_2^{(0)}+D_2^{(r)}=0,\quad \lambda_{2j}(\vartheta_{,j}^{(0)}+\vartheta_{,j}^{(r)})=0,\ j=1,2$$

确定未知量 $\beta_1^{(r)},\ \beta_2^{(r)},\ \beta_3^{(r)},\ \beta_4^{(r)}=\beta_s$ 的方程是

$$C_{i2kl}k_l^{(0)}U_k^{(0)}+e_{ki2}k_k^{(0)}\Phi^{(0)}+\mathrm{i}\alpha_{i2}\Theta^{(0)}+$$

$$\sum_{j=1}^{4}\beta_j^{(r)}(C_{i2kl}k_{jl}^{(r)}U_{kj}^{(r)}+e_{ki2}k_{jk}^{(r)}\Phi_j^{(r)}+\mathrm{i}\alpha_{j2}\Theta_j^{(r)})=0,\ i=1,2$$

$$e_{2kl}k_l^{(0)}U_k^{(0)}-\epsilon_{2j}k_j^{(0)}\Phi^{(0)}-\mathrm{i}\tau_2\Theta^{(0)}+\sum_{j=1}^{4}\beta_j^{(r)}(e_{2kl}k_{jl}^{(r)}U_{kj}^{(r)}-\epsilon_{2j}k_{jl}^{(r)}\Phi_l^{(r)}-\mathrm{i}\tau_2\Theta_j^{(r)})=0$$

$$\lambda_{2i}\Theta^{(0)}k_i^{(0)}+\sum_{j=1}^{4}\beta_j^{(r)}\lambda_{i2}\Theta_j^{(r)}k_{ji}^{(r)}=0\tag{10-169}$$

式(10－169)是有 4 个未知量 $\beta_1^{(r)},\ \beta_2^{(r)},\ \beta_3^{(r)},\ \beta_4^{(r)}$ 的 4 个方程，故可解，以下省去 $\beta_i^{(r)}$ 中的上标(r)。

作为例题，讨论真空/$BiTiO_3$ 材料的二维情形，材料常数和 10.6.5 节的例题相同，现在以 x_2 轴为极化轴，故那里的 x_3 轴改为 x_2 轴，从而材料常数的下标 3、5 改为下标 2、6，热机械耦合系数 α_{ij} 按下式计算

$$\alpha_{11}=(C_{11}+C_{12})\bar{\alpha}_{11}+(C_{12}+e_{21})\bar{\alpha}_{22},\quad \alpha_{22}=2C_{12}\bar{\alpha}_{11}+(C_{22}+e_{22})\bar{\alpha}_{22}$$

对于 $\theta=20°,\ \gamma=0°$ 的情形，体积波的波矢量、相速度和振幅比是

$$\boldsymbol{k}_1=(390.37,\ 1\,072.537\mathrm{i}),\qquad c_1=5\,504.97$$

$$\boldsymbol{k}_2=(774.57+1.14\times10^{-7}\mathrm{i},\ 2\,128.11+3.12\times10^{-7}\mathrm{i}),\qquad c_2=2\,774.42$$

$$\boldsymbol{k}_3=(570\,019.87+569\,661.83\mathrm{i},\ 1.57\times10^6+1.57\times10^6\mathrm{i}),\qquad c_3=3.77$$

$$U_{11}:U_{21}:\Theta_1:\Phi_1=(2.11\times10^{-10}-2.51\times10^{-19}\mathrm{i}):(6.28\times10^{-10}-6.14\times10^{-19}\mathrm{i}):$$
$$(-1.27\times10^{-11}-0.000\,054\mathrm{i}):(1.0)$$

$$U_{12}:U_{22}:\Theta_2:\Phi_2=(-3.25\times10^{-9}-2.18\times10^{-17}\mathrm{i}):(1.09\times10^{-9}+6.63\times10^{-18}\mathrm{i}):$$
$$(2.70\times10^{-10}+0.000\,29\mathrm{i}):(1.0)$$

$$U_{13}:U_{23}:\Theta_3:\Phi_3=(1.81\times10^{-10}-1.53\times10^{-16}\mathrm{i}):(2.22\times10^{-11}+3.03\times10^{-17}\mathrm{i}):$$
$$(-32.75+32.77\mathrm{i}):(1.0)$$

上式中的任一种波都可以作为入射波。现讨论拟纵向入射波。设入射波为

$$u_1^{(0)} = U_{11}^{(0)} e^{i(k_m^{(0)} x_m - \omega t)}, \quad u_2^{(0)} = U_{21}^{(0)} e^{i(k_m^{(0)} x_m - \omega t)}, \quad \theta^{(0)} = \Theta_1^{(0)} e^{i(k_m^{(0)} x_m - \omega t)}, \quad \varphi^{(0)} = \Phi_1^{(0)} e^{i(k_m^{(0)} x_m - \omega t)}$$

$$U_{11}^{(0)} : U_{21}^{(0)} : \Theta_1^{(0)} : \Phi_1^{(0)} = (2.11 \times 10^{-10} - 2.51 \times 10^{-19} i) : (6.28 \times 10^{-10} - 6.14 \times 10^{-19} i) : (-1.27 \times 10^{-11} - 0.000\,054 i) : (1.0)$$

由 Christoffel 方程得到的反射波的波矢量和相速度为

$$\boldsymbol{k}_1^{(r)} = (390.37, -1\,072.53 - 4.04 \times 10^{-8} i), \quad c_1 = 5\,504.97$$

$$\boldsymbol{k}_2^{(r)} = (390.37, -2\,229.26 - 9.56 \times 10^{-8} i), \quad c_2 = 2\,776.26$$

$$\boldsymbol{k}_3^{(r)} = (390.37, -1\,597\,811.46 - 1\,596\,807.85 i), \quad c_3 = 3.93$$

$$\boldsymbol{k}_4^{(r)} = (390.37, 8.68 \times 10^{-9} - 368.07 i), \quad c_s = 16\,095.46$$

式中 $\boldsymbol{k}_4^{(r)} = \boldsymbol{k}^{(s)}$，$c_s = c_4$，是表面波的波矢量和波速。$\theta = 20°$，$\gamma = 0°$ 时的波的振幅比是

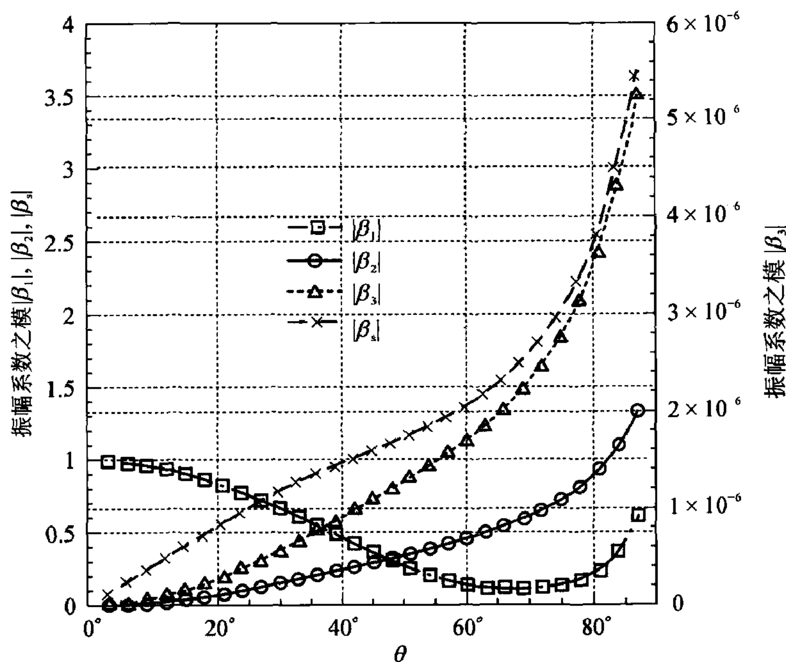


图 10-10　对 $\gamma = 0$ 的拟纵向入射波，反射和表面波的振幅系数之模 $|\beta_i|$ 随入射角 θ 的变化

$$U_{11}^{(r)} : U_{12}^{(r)} : \Theta_1^{(r)} : \Phi_1^{(r)} = (-2.11 \times 10^{-10} + 1.50 \times 10^{-19} i) : (6.28 \times 10^{-10} - 3.24 \times 10^{-19} i) : (1.27 \times 10^{-11} + 5.39 \times 10^{-5} i) : (1.0)$$

$$U_{21}^{(r)} : U_{22}^{(r)} : \Theta_2^{(r)} : \Phi_2^{(r)} = (6.78 \times 10^{-9} + 5.07 \times 10^{-17} i) : (1.11 \times 10^{-9} + 7.61 \times 10^{-18} i) : (-2.97 \times 10^{-10} - 3.05 \times 10^{-4} i) : (1.0)$$

$$U_{31}^{(r)} : U_{32}^{(r)} : \Theta_3^{(r)} : \Phi_3^{(r)} = (-6.32 \times 10^{-14} + 6.32 \times 10^{-14} i) : (5.80 \times 10^{-11} - 4.54 \times 10^{-18} i) : (29.27 - 29.29 i) : (1.0)$$

$$U_{41}^{(r)} : U_{42}^{(r)} : \Theta_4^{(r)} : \Phi_4^{(r)} = (-1.18 \times 10^{-21} - 4.57 \times 10^{-12} i) : (-2.92 \times 10^{-12} + 3.92 \times 10^{-22} i) : (0.000\,021 + 3.55 \times 10^{-13} i) : (1.0)$$

对于不同的(θ, γ)，上列诸式中的数值是不同的，每种情形的具体数值要由数值计算确定。图 10-10 表示 $\gamma = 0$ 时反射波的振幅系数$(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$和表面波的振幅系数 β_s 随入射角 θ 的变

化。$\gamma=0$ 和 $\gamma\neq 0$ 的结果相差甚微。由图可见：①入射波能激发出表面波。由广义 Snell 定律和计算表明，表面波的相速度强烈依赖于入射波的入射角，$\theta\to\pi/2$ 时，$C_s\to C_1$（入射波速）；$\theta\to 0$ 时，$C_s\to\infty$，但振幅系数 $\beta_s\to 0$。②当入射波是弹性波时，计算表明，从界面 $x_2=0$ 反射的沿 x_2 方向的能量流，主要由弹性波模式引起，表面波和温度波模式引起的非常小，这说明此两种模式具有表面传播的性质。③ $\theta=0$ 的拟纵向入射，只有拟纵向反射波。④当入射波是弹性波时，衰减角 γ 的作用极小。

10.7.6 弹性波和电波的耦合问题

在所有上面的讨论中，只考虑了似稳电场，但这是不完全的。如果完整地考虑变形电介质中的热电弹性波，那么，除了前面讨论过的弹性波和温度波有自己的独立波速外，电磁波也有自己独立的波速。按式(2-32)，当介质内没有自由电荷和电流时，Maxwell 方程为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}=0,\quad \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t},\quad \nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\quad \nabla\times\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\tag{10-170}$$

在电介质中，一般压磁和热释磁现象较小，所以本构方程式(10-135)修改为

$$\begin{gathered}\sigma_{ij}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl}-e_{kij}E_k-\alpha_{ij}\vartheta,\quad s=\alpha_{ij}\epsilon_{ij}+\tau_iE_i+C\vartheta/T_0\\ D_i=\epsilon_{ij}E_j+e_{ikl}\epsilon_{kl}+\tau_i\vartheta,\quad B_i=\mu_{ij}H_j\end{gathered}\tag{10-171}$$

由式(10-170)和(10-171)，可推出

$$\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dot{\boldsymbol{B}}=-\boldsymbol{\mu}\dot{\boldsymbol{H}},\quad \dot{\boldsymbol{H}}=-\boldsymbol{\mu}^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E},\quad \dot{\boldsymbol{D}}=\nabla\times\boldsymbol{H}$$

由上式和式(10-170)，立即推出

$$\ddot{\boldsymbol{D}}=\nabla\times\dot{\boldsymbol{H}}=-\nabla\times(\boldsymbol{\mu}^{-1}\nabla\times\boldsymbol{E}),\quad \nabla\cdot\boldsymbol{D}=0$$

或

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\epsilon_{ij}E_j+e_{ikl}\epsilon_{kl}+\tau_i\vartheta)=-\mu_{nj}^{-1}E_{k,lp}\,\hat{\varepsilon}_{lkj}\,\hat{\varepsilon}_{pni}\tag{10-172a}$$

$$(\epsilon_{ij}E_j+e_{ikl}\epsilon_{kl}+\tau_i\vartheta)_{,i}=\epsilon_{ij}E_{j,i}+e_{ikl}u_{k,li}+\tau_i\vartheta_{,i}=0$$

式中$\hat{\varepsilon}_{ijk}$是三指标排列符号，当下标 ijk 按 123 顺序偶置换时它取 1，奇置换时取 -1，其余排列取 0。上式便是热释电介质中的电磁学波动方程。特别是当介质具有各向同性磁性性质 $\mu_{ij}=\mu\delta_{ij}$ 时，利用矢量恒等式$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E}$，上式中的第一式可化为

$$\ddot{\boldsymbol{D}}=-\boldsymbol{\mu}^{-1}\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})+\boldsymbol{\mu}^{-1}\nabla^2\boldsymbol{E},\quad \frac{\partial^2}{\partial t^2}(\epsilon_{ij}E_j+e_{ikl}\epsilon_{kl}+\tau_i\vartheta)=\mu^{-1}(E_{j,mm}-E_{m,mj})\tag{10-172b}$$

由于现在不存在 $E_i=-\varphi_{,i}$ 的关系，所以运动方程应写为

$$C_{ijkl}u_{k,lj}-e_{kij}E_{k,j}-\alpha_{ji}\vartheta_{,j}=\rho\ddot{u}_i,\quad -\lambda_{ij}\vartheta_{,ji}+T_0\alpha_{ij}\dot{u}_{i,j}+T_0\tau_i\dot{E}_i+C\dot{\vartheta}=0\tag{10-173}$$

式(10-172)和(10-173)便是同时考虑电磁波和弹性波与温度波的基本方程。对于平面波，可设

$$u_k=U_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kn_mx_m-\omega t)},\quad \vartheta=\Theta\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kn_mx_m-\omega t)},\quad E_i=E_{0i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(kn_mx_m-\omega t)}\tag{10-174}$$

把式(10-174)代入(10-172)和(10-173)，便得一个复杂的七阶的矩阵方程。但研究表明，

电磁波在电介质中以光速传播，远远大于弹性波和温度波的波速。由于两者波速相差非常大，形成两组波，相互之间影响较小，因此讨论无限介质中的弹性波和温度波时，可以不考虑电波的影响。在讨论波在界面的反射和透射时，出现了表面弹性波，也不需要考虑电磁波。但是表面波的形成，是否和这种电磁波激励相关，还需深入研究。由于电磁波速度非常高，如认为是在绝热和不变形的情况下进行，本构方程可写成 $D_i=\epsilon_{ij}E_j$，这样便使电场波和弹性波、温度波之间不耦合，成为不相关的独立方程，可以各自独立求解，使问题大大简化。在各向异性介质中，电磁波有两个独立的波速。Kyame[184] 曾讨论过变形电介质中 Maxwell 电磁波和弹性波同时存在的个别特殊情况的理论，没有做上述简化。

10.7.7 弹性波在压电介质界面上的反射和透射

在热释电材料中，令和热相关的系数为零，即令 α_{ij}，τ_i，λ_{ij}，G，τ_0 等均为零，便得到压电介质中波在界面上的反射和透射理论。由于热释电材料波动问题的波数本来就是复数，所以讨论波的反射和透射问题时，可以采用原来的无限空间非均匀波的 Christoffel 方程，不过，和无限空间的非均匀波比较，反射和透射问题自动增加了一个表面波。但对于均匀压电介质中的体积波是没有衰减的，波数是实数，而压电介质中波在界面上的反射和透射，为了满足边界条件，必然存在表面波，因此需用复波数统一讨论，从而需用复波数的 Christoffel 方程讨论，不能再用实波数的 Christoffel 方程讨论，这就凸显出表面波的作用。

10.8 热释电体中的热扩散理论

10.8.1 含化学反应的经典不可逆热力学的基本概念

文献[185]讨论了热流和质量扩散流互不耦合的情况，[186]讨论了热弹塑性体中的扩散理论。本节是按照 Kuang 的论文[187]写成的。

含化学反应的经典不可逆热力学的基本理论是假设下述 Gibbs 方程成立

$$\begin{gathered}\mathrm{d}u=T\mathrm{d}s+\boldsymbol{\sigma}:\mathrm{d}\varepsilon+\mu\mathrm{d}c,\quad \dot{u}=\boldsymbol{\sigma}:\dot{\varepsilon}-q_{i,i}+\dot{r}+\mu\dot{c}\\ T\dot{s}=\dot{r}-q_{i,i}+\mu d_{i,i},\quad T\dot{s}+\mu\dot{c}=\dot{r}-q_{i,i},\ d_{i,i}=-\dot{c}\end{gathered}\tag{10-175}$$

式中 μ 是化学势，$\boldsymbol{d}$ 是扩散质量流矢量，c 是浓度。式(10－175)表明，熵的增量不仅和外加热流的散度相关，而且和浓度和化学势的乘积相关。利用关系

$$T^{-1}q_{i,i}=(T^{-1}q_i)_{,i}+T^{-2}q_iT_{,i},\quad T^{-1}\mu d_{i,i}=(T^{-1}\mu d_i)_{,i}-d_i(T^{-1}\mu)_{,i}\tag{10-176}$$

从式(10－175)和(10－176)，可得[4,24,25]

$$\dot{s}-T^{-1}\dot{r}+(T^{-1}q_i-T^{-1}\mu d_i)_{,i}=-T^{-2}q_iT_{,i}-d_i(T^{-1}\mu)_{,i}=\dot{s}^{(i)}$$

或

$$\dot{s}=\dot{s}^{(r)}+\dot{s}^{(i)},\ \dot{s}^{(r)}=\dot{r}/T-\nabla\cdot\boldsymbol{J}_s,\ \boldsymbol{J}_s=(\boldsymbol{q}/T-\mu\boldsymbol{d}/T)\tag{10-177}$$

总熵 s 由可逆部分 $s^{(r)}$ 和不可逆部分 $s^{(i)}$ 组成，$\dot{s}^{(i)}$ 是熵增率。由式(10－177)，得

$$T\dot{s}^{(r)} = \dot{r} - T(\dot{\eta}_i - \mu' d_i)_{,i},\ \mu' = \mu/T$$
$$T\dot{s}^{(i)} = h_u = -T_{,i}\dot{\eta}_i - \mu'_{,i}\dot{\xi}'_i = \boldsymbol{X}_T\cdot\dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{X}'_\mu\cdot\dot{\boldsymbol{\xi}}' \geqslant 0 \tag{10-178}$$
$$\boldsymbol{X}_T = -\nabla T,\ \boldsymbol{X}'_\mu = -\nabla\mu',\ \dot{\boldsymbol{\eta}} = \boldsymbol{q}/T,\ \boldsymbol{\eta} = \int_0^t \boldsymbol{q}\mathrm{d}\tau/T,\ \dot{\boldsymbol{\xi}}' = T\boldsymbol{d},\ \boldsymbol{\xi}' = \int_0^t T\boldsymbol{d}\,\mathrm{d}\tau$$

式中 $\boldsymbol{\eta}$ 是熵位移矢量，$\dot{\boldsymbol{\eta}}$是熵流矢量。按线性不可逆热力学理论，不可逆力和不可逆流成比例，因此可得下列演化方程

$$T\dot{\eta}_i = -\lambda_{ij}(T)T_{,i} - L_{ij}(T)T\mu'_{,i},\quad T^{-1}\dot{\xi}'_i = -D_{ij}(T)T\mu'_{,i} - L_{ij}(T)T_{,i}$$

或 $$T_{,i} = -\hat{\lambda}_{ij}(T)T\dot{\eta}_i - \hat{L}_{ij}(T)T^{-1}\dot{\xi}'_i,\quad \mu'_{,i} = -\hat{D}_{ij}(T)T^{-1}\dot{\xi}'_i - \hat{L}_{ij}(T)T\dot{\eta}_i \tag{10-179a}$$

式中 D_{ij} 是扩散系数，L_{ij} 为扩散和热传导之间的耦合系数。或等价地有

$$q_i = -\lambda_{ij}(T)T_{,i} - L_{ij}(T)T\mu'_{,i},\quad d_i = -D_{ij}(T)T\mu'_{,i} - L_{ij}(T)T_{,i}$$

或 $$T_{,i} = -\hat{\lambda}_{ij}(T)q_i - \hat{L}_{ij}(T)d_i,\quad T\mu'_{,i} = -\hat{D}_{ij}(T)d_i - \hat{L}_{ij}(T)q_i \tag{10-179b}$$

线性不可逆热力学理论只能给出演化方程的一般形式，其精确形式应由实验确定。考虑到实验事实和变分公式具有简单形式的要求，当 T 变化范围不是太大时，式(10－179a)可近似为

$$T\dot{s}^{(i)} \approx \boldsymbol{X}_T\cdot\dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{X}_\mu\cdot\dot{\boldsymbol{\xi}} = -T_{,i}\dot{\eta}_i - \mu_{,i}\dot{\xi}_i \geqslant 0,\ \boldsymbol{X}_\mu = -\nabla\mu,\ \dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{d}$$
$$T\dot{\eta}_i = -\lambda_{ij}(T)T_{,i} - L_{ij}(T)\mu_{,i},\quad \dot{\xi}_i = -D_{ij}(T)\mu_{,i} - L_{ij}(T)T_{,i} \tag{10-179c}$$

或 $$T_{,i} = -\hat{\lambda}_{ij}(T)T\dot{\eta}_i - \hat{L}_{ij}(T)\dot{\xi}_i,\quad \mu_{,i} = -\hat{D}_{ij}(T)\dot{\xi}_i - \hat{L}_{ij}(T)T\dot{\eta}_i$$

特别是式(10－179c)中的系数 λ_{ij}，L_{ij}，D_{ij} 可以认为是常数，下面将采用这一假设。式(10－179)是 Fourier 定律和 Fick 定律的推广。

式(10－175)同样可认为是$\dot{r}-q_{i,i}$产生 $T\dot{s}$ 和 $\mu\dot{c}$。所以类似于文献[175]中的惯性熵理论，可引入广义惯性熵理论，式(10－101)修正为

$$\dot{Q}_{\mathrm{in}} = \int_V(\dot{r} - T_0\dot{s}^{(a)} - \mu_0\dot{c}^{(a)})\mathrm{d}V - \int_a T\dot{\boldsymbol{\eta}}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}a,\ T_0\dot{s}^{(a)} = \rho_s\ddot{T},\ \mu_0\dot{c}^{(a)} = \rho_\mu\ddot{\mu} \tag{10-180}$$

式中 ρ_s 和 ρ_μ 是常系数，T_0 是参考温度，μ_0 是参考化学势。式(10－180)指出环境提供的热用来平衡物体吸收的热增量和介质中温度和浓度的改变，从而在广义惯性熵理论中，式(10－175)和(10－178)分别化为

$$T(\dot{s}+\dot{s}^{(a)}) + \mu\dot{c}^{(a)} = \dot{r} - q_{i,i} + \mu d_{i,i},\quad T(\dot{s}+\dot{s}^{(a)}) + \mu(\dot{c}+\dot{c}^{(a)}) = \dot{r} - q_{i,i} \tag{10-181a}$$

$$(\dot{s}+\dot{s}^{(a)}) + \frac{\mu\dot{c}^{(a)}}{T} = \frac{\dot{r}}{T} - \frac{q_{i,i}}{T} + \frac{\mu d_{i,i}}{T} = \frac{\dot{r}}{T} - \left(\frac{q_i}{T}\right)_{,i} - \frac{q_iT_{,i}}{T^2} + \left(\frac{\mu d_i}{T}\right)_{,i} - \left(\frac{\mu}{T}\right)_{,j}d_i$$
$$T\dot{s} = T\dot{s}^{(r)} + T\dot{s}^{(i)},\quad T(\dot{s}^{(r)} + \dot{s}^{(a)}) + \mu\dot{c}^{(a)} = \dot{r} + T(\dot{\eta}_i - \mu' d_i)_{,i} \tag{10-181b}$$
$$T\dot{s}^{(i)} = T(\dot{s}+\dot{s}^{(a)}) + \mu\dot{c}^{(a)} - T(\dot{s}^{(r)}+\dot{s}^{(a)}) - \mu\dot{c}^{(a)} = -T_{,i}\dot{\eta}_i - \mu'_{,i}\dot{\xi}'_i \approx -T_{,i}\dot{\eta}_i - \mu_{,i}\dot{\xi}_i \geqslant 0$$

式(10－181)中 $s = s^{(r)} + s^{(i)}$ 是介质中的真实熵。由式(10－181)看出，在广义惯性熵理论中，环境和内热源产生的热增率 $\dot{r} - q_{i,i} + \mu d_{i,i}$ 为存储在介质内的可逆的热增率 $T\dot{s}^{(r)}$，不可逆热

增率 $T\dot{s}^{(i)}$ 以及惯性热增率 $T\dot{s}^{(a)}$ 和惯性浓度增率 $\mu\dot{c}^{(a)}$ 所平衡。

由于机械和电过程假设是可逆的，内能和熵是应变 ε，电位移 $\boldsymbol{D}$，熵 s 和浓度 c 的状态函数，故有

$$du = \boldsymbol{\sigma} : d\varepsilon + \boldsymbol{E} \cdot d\boldsymbol{D} + Tds + \mu dc, \quad \dot{u} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\varepsilon} + \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D} + T\dot{s} + \mu\dot{c} \quad (10-182)$$

10.8.2 电-化学 GIBBS 函数

利用 Legendre 变换，可以得到电-化学 Gibbs 函数 g_c 为

$$g_c = g_c(\varepsilon, \boldsymbol{D}, T, \mu) = u - Ts - \mu c - \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{D}, \quad \dot{g}_c = \sigma : \dot{\varepsilon} - \boldsymbol{D} \cdot \dot{\boldsymbol{E}} - s\dot{\vartheta} - c\dot{\mu} \quad (10-183)$$

类似地，补耗散能为

$$\begin{aligned} \dot{h}_{gc} &= -s^{(i)}\dot{T} = T\dot{s}^{(i)} - (Ts^{(i)})^{\cdot} = \boldsymbol{X}_T \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{X}_\mu \cdot \dot{\boldsymbol{\xi}} - (\boldsymbol{X}_T \cdot \boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{X}_\mu \cdot \boldsymbol{\xi})^{\cdot} \\ &= -\boldsymbol{\eta} \cdot \dot{\boldsymbol{X}}_T - \boldsymbol{\xi} \cdot \dot{\boldsymbol{X}}_\mu = \eta_i \dot{T}_{,i} + \xi_i \dot{\mu}_{,i}, \quad s^{(i)}\dot{T} + \xi_i \dot{\mu}_{,i} = -\eta_i \dot{T}_{,i} \end{aligned} \quad (10-184)$$

可设

$$\begin{aligned} g_c(\varepsilon_{kl}, E_k, \vartheta, \mu) &= \frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{ji}\varepsilon_{lk} - e_{kij}E_k\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}\in_{ij}E_iE_j - \alpha_{ij}\varepsilon_{ij}\vartheta - \tau_iE_i\vartheta - \\ &\quad \frac{1}{2T_0}C^{\mathrm{T}}\vartheta^2 - \frac{1}{2}b\mu^2 - b_{ij}\varepsilon_{ij}\mu - b_iE_i\mu - \alpha\mu\vartheta \\ \delta h_{gc} &= -s^{(i)}\delta\vartheta = -\delta\vartheta_{,j}\int_0^t(\lambda_{ij}T^{-1}\vartheta_{,i} + L_{ij}T^{-1}\mu_{,i})d\tau - \delta\mu_{,j}\int_0^t(L_{ij}\vartheta_{,i} + D_{ij}\mu_{,i})d\tau = \\ &\quad \eta_j\delta\vartheta_{,j} + \xi_j\delta\mu_{,j} \\ e_{kij} &= e_{kji}, \in_{kl} = \in_{lk}, \alpha_{ij} = \alpha_{ji}, b_{ij} = b_{ji}, \lambda_{ij} = \lambda_{ji}, D_{ij} = D_{ji}, L_{ij} = L_{ji} \end{aligned} \quad (10-185)$$

式中 $C, C_{ijkl}, e_{kij}, \in_{ij}, \alpha_{ij}, \tau_i, b, b_{ij}, b_i, \alpha$ 是材料常数。

由式(10-185)推出的本构方程和演化方程分别为

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= \frac{\partial g_c}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl}\varepsilon_{kl} - e_{kij}E_k - \alpha_{ij}\vartheta - b_{ij}\mu, \quad D_i = -\frac{\partial g_c}{\partial E_i} = \in_{ij}E_j + e_{kij}\varepsilon_{kl} + \tau_i\vartheta + b_i\mu \\ s &= -\frac{\partial g_c}{\partial \vartheta} = \alpha_{ij}\varepsilon_{ij} + \tau_iE_i + C^{\mathrm{T}}\vartheta/T_0 + a\mu, \quad c = -\frac{\partial g_c}{\partial \mu} = b\mu + b_{ij}\varepsilon_{ij} + b_iE_i + a\vartheta \end{aligned} \quad (10-186a)$$

$$\eta_i = \partial h_g/\partial\vartheta_{,i} = -\int_0^t(\lambda_{ij}T^{-1}\vartheta_{,j} + L_{ij}T^{-1}\mu_{,j})d\tau, \quad \xi_i = \partial h_g/\partial\mu_{,i} = -\int_0^t(L_{ij}\vartheta_{,i} + D_{ij}\mu_{,j})d\tau \quad (10-186b)$$

10.8.3 电-化学 GIBBS 函数变分原理

设机械位移 u_i，电势 φ，温度 T 和化学势 μ 满足各自的边界条件，即在 a_u，a_φ，a_T 和 a_μ 上分别满足 $u_i = u_i^*$，$\varphi = \varphi^*$，$\vartheta = \vartheta^*$ 和 $\mu = \mu^*$。由物理变分原理，可得广义惯性熵理论中对热-电-扩散-弹性问题的电-化学 Gibbs 函数变分原理为

$$\delta \Pi_{gc} = \int_V \delta(g_c + h_{gc})\mathrm{d}V - \delta Q_1^* - \delta Q_2^* - \delta W^* = 0$$

$$-\delta Q_1^* = \int_V \left(\int_0^t T^{-1}\dot{r}\mathrm{d}\tau\right)\delta\vartheta\mathrm{d}V - \int_V s^{(a)}\delta\vartheta\mathrm{d}V - \int_V c^{(a)}\delta\mu\mathrm{d}V - \int_{a_q}\eta^*\delta\vartheta\mathrm{d}a - \int_{a_d}\xi^*\delta\mu\mathrm{d}a$$

$$-\delta W^* = -\int_V (f_k - \rho\ddot{u}_k)\delta u_k\mathrm{d}V + \int_V \rho_e\delta\varphi\mathrm{d}V - \int_{a_\sigma} T_k^*\delta u_k\mathrm{d}a + \int_{a_D}\sigma^*\delta\varphi\mathrm{d}a$$

$$s^{(a)} = \int_0^t \dot{s}^{(a)}\mathrm{d}\tau,\ \dot{s}^{(a)} = \rho_s\ddot{T},\ c^{(a)} = \int_0^t \dot{c}^{(a)}\mathrm{d}\tau,\ \dot{c}^{(a)} = \rho_\mu\ddot{\mu} \tag{10-187}$$

式中

$$\delta\int_V g_c\mathrm{d}V = \int_a \sigma_{ij}n_j\delta u_i\mathrm{d}a - \int_V \sigma_{ij,j}\delta u_i\mathrm{d}V + \int_a D_k n_k\delta\varphi\mathrm{d}a - \int_V D_{k,k}\delta\varphi\mathrm{d}V - \int_V s\delta\vartheta\mathrm{d}V - \int_V c\delta\mu\mathrm{d}V$$

$$\delta\int_V h_{gc}\mathrm{d}V = -\int_V\left[\delta\vartheta_{,i}\int_0^t(\lambda_{ij}T^{-1}\vartheta_{,i} + L_{ij}T^{-1}\mu_{,i})\mathrm{d}\tau + \delta\mu_{,i}\int_0^t(L_{ij}\vartheta_{,i} + D_{ij}\mu_{,i})\mathrm{d}\tau\right]\mathrm{d}V$$

$$\left(= \int_V(\eta_j\delta\vartheta_{,j} + \xi_j\delta\mu_{,j})\mathrm{d}V\right) \tag{10-188}$$

式中 σ_{ij}，D_k，s，c 由式(10－186a)表示。式(10－187)和(10－188)中的 f_k，T_k^*，ρ_e，σ^*，$\dot{\eta}^* = \dot{\eta}_i^* n_i$ 和 $\dot{\xi}^* = \dot{\xi}_i^* n_i$ 是给定的广义外载荷。结合式(10－187)和(10－188)，可得

$$\delta\Pi_{gc} = \int_V \delta(g_c + h_{gc})\mathrm{d}V - \delta W^* - \delta Q_1^* - \delta Q_2^* = \delta\Pi_{gc1} + \delta\Pi_{gc2} = 0$$

$$\delta\Pi_{gc1} = \int_{a_\sigma}(\sigma_{ij}n_j - T_i^*)\delta u_i\mathrm{d}a - \int_V(\sigma_{ij,j} + f_i - \rho\ddot{u}_i)\delta u_i\mathrm{d}V + \int_{a_D}(\sigma^* + D_k n_k)\delta\varphi\mathrm{d}a - \int_V(D_{k,k} - \rho_e)\delta\varphi\mathrm{d}V = 0$$

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{gc2} = & -\int_V[\delta\vartheta n_j\int_0^t(\lambda_{ij}T^{-1}\vartheta_{,i} + L_{ij}T^{-1}\mu_{,i})\mathrm{d}\tau + \delta\mu n_j\int_0^t(L_{ij}\vartheta_{,i} + D_{ij}\mu_{,i})\mathrm{d}\tau]\mathrm{d}V + \\ & \int_V[\delta\vartheta\int_0^t(\lambda_{ij}T^{-1}\vartheta_{,i} + L_{ij}T^{-1}\mu_{,i})_{,j}\mathrm{d}\tau + \delta\mu\int_0^t(L_{ij}\vartheta_{,i} + D_{ij}\mu_{,i})_{,j}\mathrm{d}\tau]\mathrm{d}V - \\ & \int^V s\delta\vartheta\mathrm{d}V - \int_V c\delta\mu\mathrm{d}V - \delta Q_1^* - \delta Q_2^* = \delta\Pi_{gc2s} + \delta\Pi_{gc2\mu} = 0\end{aligned} \tag{10-189}$$

把式(10－187)中的 δQ_1^* 代入(10－189)并利用(10－186b)，便得

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{gc2s} = & \int_{a_q}\int_0^t[-(\lambda_{ij}T^{-1}\vartheta_{,i} + L_{ij}T^{-1}\mu_{,i})n_j - \dot{\eta}^*]\mathrm{d}\tau\delta\vartheta\mathrm{d}a - \int_V s\delta\vartheta\mathrm{d}V + \\ & \int_V\int_0^t(T^{-1}\dot{r} - \rho_s\ddot{\vartheta})\mathrm{d}\tau\delta\vartheta\mathrm{d}V - \int_V\int_0^t(\lambda_{ij}T^{-1}\vartheta_{,i} + L_{ij}T^{-1}\mu_{,i})_{,j}\mathrm{d}\tau\delta\vartheta\mathrm{d}V - \delta Q_{2s}^*\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta\Pi_{gc2\mu} = & \int_{a_\mu}\int_0^t[-(L_{ij}\vartheta_{,i} + D_{ij}\mu_{,i})n_j - \dot{\xi}^*]\mathrm{d}\tau\delta\mu\mathrm{d}a - \int_V c\delta\mu\mathrm{d}V - \\ & \int_V\int_0^t\rho_\mu\ddot{\mu}\mathrm{d}\tau\delta\mu\mathrm{d}V - \int_V\int_0^t(L_{ij}\vartheta_{,i} + D_{ij}\mu_{,i})_{,j}\mathrm{d}\tau\delta\mu\mathrm{d}V - \delta Q_{2\mu}^*\end{aligned} \tag{10-190}$$

式中 $\delta Q_2^* = \delta Q_{2s}^* + \delta Q_{2\mu}^*$。由于 δu_i 和 $\delta\varphi$ 的任意性，由 $\delta\Pi_{gc1} = 0$，得

$$\begin{aligned}&\sigma_{kl,l} + f_k = \rho\ddot{u}_k,\quad D_{k,k} = \rho_e（介质中）\\ &\sigma_{kl}n_l = T_k^*（在\ a_\sigma\ 上），\quad D_k n_k = -\sigma^*（在\ a_D\ 上）\end{aligned} \tag{10-191}$$

给定 δQ_2^* 是一个难题。本处令

$$-\delta Q_2^* = -\delta Q_{2s}^* = -\int_V\int_0^t T^{-1}(\dot{\eta}_i\vartheta_{,i} - \dot{\xi}_{i,i}\mu)\mathrm{d}\tau\delta\vartheta\mathrm{d}V,\quad \delta Q_{2\mu}^* = 0 \qquad (10-192)$$

上式表示 δQ_2^* 由热流和质量扩散流产生。利用关系 $-\dot{\eta}_{j,j} - T^{-1}\dot{\eta}_i\vartheta_{,i} = -T^{-1}q_{j,j}$ 和 $\int_V s\delta\vartheta\mathrm{d}V = \int_V\int_0^t \dot{s}d\tau\delta\vartheta\mathrm{d}V$，完成 $\delta\Pi_{gc2}$ 的计算，便得

$$\delta\Pi_{gc2s} = \int_{a_q}\int_0^t(\dot{\eta}_jn_j - \dot{\eta}^*)\mathrm{d}\tau\delta\vartheta\mathrm{d}a - \int_V\int_0^t\left(\dot{s} + \rho_s\ddot{T} - T^{-1}\dot{r} + T^{-1}q_{j,j} - T^{-1}\mu\dot{\xi}_{i,i}\right)\mathrm{d}\tau\delta\vartheta\mathrm{d}V$$

$$\delta\Pi_{gc2\mu} = \int_{a_\mu}\int_0^t(\dot{\xi}_jn_j - \dot{\xi}^*)\mathrm{d}\tau\delta\mu\mathrm{d}a - \int_V\int_0^t(\dot{c} + \rho_\mu\ddot{u} + \dot{\xi}_{j,j})\mathrm{d}\tau\delta\mu\mathrm{d}V$$

$$(10-193)$$

由于 δT 和 $\delta\mu$ 的任意性，由 $\delta\Pi_{gc2s} = \delta\Pi_{gc2\mu} = 0$，便得

$$\begin{aligned}
&\int_V\int_0^t(\dot{s} + \rho_s\ddot{\vartheta})\mathrm{d}\tau\mathrm{d}V = \int_V\int_0^t(T^{-1}\dot{r} - T^{-1}q_{j,j} + T^{-1}\mu\dot{\xi}_{i,i})\mathrm{d}\tau\mathrm{d}V \\
&\int_V\int_0^t(\dot{c} + \rho_\mu\ddot{u})\mathrm{d}\tau\mathrm{d}V = -\int_V\int_0^t\dot{\xi}_{j,j}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}V\text{（介质内）} \\
&\dot{\eta}_jn_j = \dot{\eta}^*,\quad \text{或 } q_i = q_i^*\text{（在 } a_q \text{ 上）} \\
&\dot{\xi}_jn_j = \dot{\xi}^*,\quad \text{或 } d_i = d_i^*\text{（在 } a_d \text{ 上）}
\end{aligned} \qquad (10-194\text{a})$$

式(10-194a)的头两式可写成

$$\begin{aligned}
&\dot{s} + \rho_s\ddot{\vartheta} = T^{-1}\dot{r} - T^{-1}q_{j,j} + T^{-1}\mu\dot{\xi}_{i,i},\quad \dot{c} + \rho_\mu\ddot{u} = -\dot{\xi}_{j,j} \\
&T(\dot{s} + \rho_s\ddot{\vartheta}) + \mu(\dot{c} + \rho_\mu\ddot{u}) = \dot{r} - q_{j,j}\text{（介质内）}
\end{aligned} \qquad (10-194\text{b})$$

利用式(10-186)，由上式可得

$$\begin{aligned}
&T(\alpha_{ij}\dot{u}_{i,j} - \tau_i\dot{\varphi}_{,i} + C^{\mathrm{T}}\dot{\vartheta}/T_0 + a\dot{\mu} + C^{\mathrm{T}}\rho_{s0}\ddot{\vartheta}/T_0) = \\
&\quad(\lambda_{ji} + \mu L_{ji})\vartheta_{,ij} + (L_{ji} + \mu D_{ji})\mu_{,ij} + \dot{r} \\
&b\dot{\mu} + b_{ij}\dot{u}_{i,j} - b_i\dot{\varphi}_{,i} + a\dot{\vartheta} + \rho_\mu\ddot{u} = L_{ij}\vartheta_{,ij} + D_{ij}\mu_{,ij}\text{（介质内）}
\end{aligned} \qquad (10-195)$$

式(10-194b)中的第三式和式(10-181)中的第一式相同，这也说明式(10-194)是一个正确的选择。变分原理的先决条件要求

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^*\text{（在 } a_u \text{ 上）},\quad \varphi = \varphi^*\text{（在 } a_\varphi \text{ 上）},\quad T = T^*\text{（或 } \vartheta = \vartheta^*\text{）（在 } a_T \text{ 上）},\quad \mu = \mu^*\text{（在 } a_\mu \text{ 上）} \qquad (10-196)$$

式(10-191)、(10-194)、(10-195)和(10-196)组成热释电材料中的广义热扩散理论的控制方程。式(10-195)中的第一和第二式分别是温度波和化学势波的具有有限传播速度的波动方程，其中 ϑ 和 μ 是彼此高度耦合的。

由式(10-192)和(10-188)，还可得

$$-\delta Q_2^* + \int_V\delta h_{gc}\mathrm{d}V = -\int_V\int_0^t T^{-1}(\dot{\eta}_i\vartheta_{,i} - \dot{\xi}_{i,i}\mu)\mathrm{d}\tau\delta\vartheta\mathrm{d}V + \int_V\left(\int_0^t\dot{\eta}_i\mathrm{d}\tau\delta\vartheta_{,i} + \int_0^t\dot{\xi}_i\mathrm{d}\tau\delta\mu_{,i}\right)\mathrm{d}V =$$

$$\int_a\int_0^t \dot{\eta}_i n_i \mathrm{d}\tau\delta\vartheta\mathrm{d}a - \int_V\int_0^t (T^{-1}q_{j,j} - T^{-1}\dot{\xi}_{i,i}\mu)\mathrm{d}\tau\delta\vartheta\mathrm{d}V + \int_a\int_0^t \dot{\xi}_i n_i \mathrm{d}\tau\delta\mu\mathrm{d}a - \int_V\int_0^t \dot{\xi}_{i,i}\mathrm{d}\tau\delta\mu\mathrm{d}V = \delta Q_{2s}^* + \delta Q_{2\mu}^* \tag{10-197}$$

由式(10-187)可见，δQ_1^* 包含内部热源的可逆热增量 $\int_V(\int_0^t T^{-1}\dot{r}d\tau)\delta\vartheta\mathrm{d}V$，可逆惯性热 $\int_V(\int_0^t\rho_s\ddot{T}\mathrm{d}\tau)\delta\vartheta\mathrm{d}V$，$\int_V(\int_0^t\rho_\mu\ddot{u}\mathrm{d}\tau)\delta\mu\mathrm{d}V$ 和由可逆熵流与扩散质量流通过边界传入的热量。由式(10-197)可知，$\delta Q_2^* - \int_V\delta h_{gc}\mathrm{d}V$ 平衡由边界传入的可逆熵流 $\int_{a_q}\dot{\eta}^*\delta\vartheta\mathrm{d}a$ 和扩散质量流 $\int_{a_d}\dot{\xi}^*\delta\mu\mathrm{d}a$，以及介质内因不可逆过程产生的不可逆热。由式(10-175)还可看出，$T\dot{s}$ 依赖于 $\mu\dot{\xi}_{i,i}$，所以现在的变分原理是非线性的，本处的讨论做了一定的简化。

如在式(10-175)中略去二阶小量 $\mu d_{i,i}$，即采用 $T\dot{s} = \dot{r} - q_{i,i}$，则 $\delta Q_{2\mu}^* = 0$ 和 $-\delta Q_2^* = -\delta Q_{2s}^* = -\int_V\int_0^t T^{-1}\dot{\eta}_i\vartheta_{,i}\delta\vartheta\mathrm{d}\tau\mathrm{d}V$。此时得

$$\begin{aligned}
&\dot{s}+\rho_s\ddot{\vartheta} = \dot{r}/T - \dot{\eta}_{j,j} - T^{-1}\dot{\eta}_i\vartheta_{,i}, \quad \text{或}\ \dot{s}+\rho_s\ddot{\vartheta} = T^{-1}\dot{r} - T^{-1}q_{j,j}\\
&\dot{c}+\rho_\mu\ddot{u} = -\dot{\xi}_{j,j}\ (\text{介质内})\\
&\dot{\eta}_j n_j = \dot{\eta}^*, \quad \text{或}\ q_i = q_i^*\ (\text{在 } a_q \text{ 上})\\
&\dot{\xi}_j n_j = \dot{\xi}^*, \quad \text{或}\ d_i = d_i^*\ (\text{在 } a_d \text{ 和 } a_q \text{ 上})
\end{aligned} \tag{10-198}$$

如进一步假设 $T_{,i}$ 和 $\mu_{,j}$ 相互独立，即设 $\dot{\eta}_i = -\lambda_{ij}T^{-1}T_{,j}$，$\dot{\xi}_i = -D_{ij}\mu_{,j}$，则当 $\dot{r}=0$ 时，式(10-198)中的头两式化为

$$\begin{aligned}
&T(\alpha_{ij}\dot{u}_{i,j} - \tau_i\dot{\varphi}_{,i} + C\dot{\vartheta}/T_0 + a\dot{\mu} + C^{\mathrm{T}}\rho_{s0}\ddot{\vartheta}/T_0) = \lambda_{ij}\vartheta_{,ji}\\
&b\dot{\mu} + b_{ij}\dot{u}_{i,j} - b_i\dot{\varphi}_{,i} + a\dot{\vartheta} + \rho_\mu\ddot{u} = D_{ij}\mu_{,ji}\ (\text{介质内})
\end{aligned} \tag{10-199}$$

上式便和文献[185]相类似了。

10.8.4 电 GIBBS 函数变分原理

类似于电-化学 Gibbs 函数变分原理的讨论，有

$$\begin{aligned}
&g = g(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{D}, T, c) = u - Ts - \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{D}, \quad \dot{g} = \boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \boldsymbol{D}\cdot\dot{\boldsymbol{E}} - s\dot{T} + \mu\dot{c}\\
&\dot{h}_g = \boldsymbol{X}_T\cdot\dot{\boldsymbol{\eta}} + \boldsymbol{X}_\mu\cdot\dot{\boldsymbol{\xi}} - (\boldsymbol{X}_T\cdot\boldsymbol{\eta})^{\cdot} = \eta_j\dot{\vartheta}_{,j} - \mu_{,k}\dot{\xi}_k
\end{aligned} \tag{10-200}$$

取

$$g(\varepsilon_{kl}, E_k, \vartheta, c) = \frac{1}{2}C_{ijkl}\varepsilon_{ji}\varepsilon_{lk} - e_{kij}E_k\varepsilon_{ij} - \frac{1}{2}\epsilon_{ij}E_iE_j - \alpha_{ij}\varepsilon_{ij}\vartheta - \tau_iE_i\vartheta - \frac{1}{2T_0}C^{\mathrm{T}}\vartheta^2 + \frac{1}{2}\hat{b}c^2 - \hat{b}_{ij}\varepsilon_{ij}c - \hat{b}_iE_ic + \hat{a}c\vartheta \tag{10-201}$$

$$\delta h_g = \eta_j\delta\vartheta_{,j} - \mu_{,j}\delta\xi_j = -\delta\vartheta_{,j}\int_0^t(\lambda_{ij}T^{-1}\vartheta_{,i} + L_{ij}T^{-1}\mu_{,i})\mathrm{d}\tau + (\hat{D}_{ik}\dot{\xi}_i + \hat{L}_{ik}T\dot{\eta}_i)\delta\xi_k$$

本构方程和演化方程分别为

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial g_c}{\partial\varepsilon_{ij}}=C_{ijkl}\varepsilon_{kl}-e_{kij}E_k-\alpha_{ij}\vartheta-\hat{b}_{ij}c,\quad D_i=-\frac{\partial g_c}{\partial E_i}=\epsilon_{ij}E_j+e_{kij}\varepsilon_{kl}+\tau_i\vartheta+\hat{b}_ic$$

$$s=-\frac{\partial g_c}{\partial\vartheta}=\alpha_{ij}\varepsilon_{ij}+\tau_iE_i+C^{\mathrm{T}}\vartheta/T_0-\hat{a}c,\quad \mu=\frac{\partial g_c}{\partial c}=\hat{b}\,c-\hat{b}_{ij}\varepsilon_{ij}-\hat{b}_iE_i+\hat{a}\,\vartheta\delta\xi_k$$

$$\eta_i=\partial h_{gc}/\partial\vartheta_{,i}=-\int_0^t(\lambda_{ij}T^{-1}\vartheta_{,j}+L_{ij}T^{-1}\mu_{,j})\mathrm{d}\tau,\quad \mu_{,j}=-\partial h_g/\partial\xi_j=-\hat{L}_{ij}T\,\dot{\eta}_i-\hat{D}_{ij}\,\dot{\xi}_i$$

(10－202)

设机械位移 u_i，电势 φ，温度 T 和扩散质量流 $\xi=\xi^*$ 满足各自的边界条件，即在 a_u，a_φ，a_T 和 a_d 上分别满足 $u_i=u_i^*$，$\varphi=\varphi^*$，$T=T^*$（或 $\vartheta=\vartheta^*$）和 $c=c^*$。由物理变分原理，可得广义惯性熵理论中对热-电-扩散-弹性问题的电 Gibbs 函数变分原理为

$$\delta\Pi_g=\int_V\delta(g+h_g)\mathrm{d}V-\delta Q_1^{**}-\delta Q_2^{**}-\delta W^{**}=0$$

$$-\delta Q_1^{**}=\int_V\left(\int_0^tT^{-1}\dot{r}\mathrm{d}\tau\right)\delta\vartheta\mathrm{d}V-\int_Vs^{(a)}\delta\vartheta\mathrm{d}V+\int_V\mu_{,j}^{(a)}\delta\xi_j\mathrm{d}V-\int_{a_q}\eta^*\delta\vartheta\mathrm{d}a+\int_{a_\mu}\mu^*\delta\xi\mathrm{d}a$$

$$-\delta W^{**}=-\int_V(f_k-\rho\ddot{u}_k)\delta u_k\mathrm{d}V+\int_V\rho_e\delta\varphi\mathrm{d}V-\int_{a_\sigma}T_k^*\delta u_k\mathrm{d}a+\int_{a_D}\sigma^*\delta\varphi\mathrm{d}a$$

$$s^{(a)}=\int_0^t\dot{s}^{(a)}\mathrm{d}\tau,\ \dot{s}^{(a)}=\rho_s\ddot{T},\ \mu_{,i}^{(a)}=\rho_c\ddot{\xi}_i$$

(10－203)

式中

$$\delta\int_Vg\,\mathrm{d}V=\int_a\sigma_{ij}n_j\delta u_i\mathrm{d}a-\int_V\sigma_{ij,j}\delta u_i\mathrm{d}V+\int_aD_kn_k\delta\varphi\mathrm{d}a-\int_VD_{k,k}\delta\varphi\mathrm{d}V-\int_Vs\delta\vartheta\mathrm{d}V+\int_V\mu\delta c\mathrm{d}V$$

$$\delta\int_Vh_g\mathrm{d}V=\int_V\left[-\delta\vartheta_{,j}\int_0^t(\lambda_{ij}T^{-1}\vartheta_{,i}+L_{ij}T^{-1}\mu_{,i})\mathrm{d}\tau+(\hat{D}_{ik}\,\dot{\xi}_i+\hat{L}_{ik}T\,\dot{\eta}_i)\delta\xi_k\right]\mathrm{d}V$$

$$\left(=\int_V(\eta_j\delta\vartheta_{,j}-\mu_{,k}\delta\xi_k)\mathrm{d}V\right)$$

(10－204)

式中 σ_{ij}，D_k，s，μ 由式(10－202)表示，μ^* 为给定的化学势，ρ_s 和 ρ_c 是常数。由于自变量的不同，在式(10－203)中使用了 $\int_V\mu_{,j}^{(a)}\delta\xi_j\mathrm{d}V$ 取代式(10－187)中的 $\int_Vc^{(a)}\delta\mu\mathrm{d}V$。虽然惯性化学势的物理意义不如惯性浓度的物理意义明确，但在数学上可以得到所需要的方程。取

$$-\delta Q_2^{**}=-\delta Q_{2s}^{**}=-\int_V\int_0^tT^{-1}(\dot{\eta}_i\vartheta_{,i}-\dot{\xi}_{i,i}\mu)\mathrm{d}\tau\delta\vartheta\mathrm{d}V,\quad \delta Q_{2\mu}^{**}=0\qquad(10－205)$$

由式(10－203)～(10－205)，并注意到 $\delta c=-\delta\xi_{i,i}$，完成变分便可得到

$$\delta\Pi_g = \int_V \delta(g+h_g)\mathrm{d}V - \delta W^* - \delta Q_1^* - \delta Q_2^* = \delta\Pi_{g1} + \delta\Pi_{g2s} + \delta\Pi_{g2\mu} = 0$$

$$\delta\Pi_{g1} = \int_{a_\sigma}(\sigma_{ij}n_j - T_i^*)\delta u_i\mathrm{d}a - \int_V(\sigma_{ij,j} + f_i - \rho\ddot{u}_i)\delta u_i\mathrm{d}V + \int_{a_D}(\sigma^* + D_k n_k)\delta\varphi\mathrm{d}a - \int_V(D_{k,k} - \rho_e)\delta\varphi\mathrm{d}V = 0$$

$$\delta\Pi_{g2s} = \int_{a_q}(\eta_j n_j - \eta^*)\delta\vartheta\mathrm{d}a - \int_V\int_0^t(\dot{s} + \rho_s\ddot{T} - T^{-1}\dot{r} + T^{-1}q_{j,j} - T^{-1}\mu\dot{\xi}_{i,i})\mathrm{d}\tau\delta\vartheta\mathrm{d}V = 0$$

$$\delta\Pi_{g2\mu} = \int_{a_\mu}(\mu^* - \mu)n_j\delta\xi_j\mathrm{d}a + \int_V[(\mu_{,j} + \rho_c\ddot{\xi}_j) + (\hat{D}_{ij}V_i + \hat{L}_{ij}T\dot{\eta}_i)]\delta\xi_j\mathrm{d}V = 0$$

(10-206)

由变分 δu_i，$\delta\varphi$，$\delta\vartheta$，$\delta\xi_j$ 的任意性，可导出

$$\begin{aligned}&\sigma_{kl,l} + f_k = \rho\ddot{u}_k,\quad D_{k,k} = \rho_e(\text{介质内})\\&\sigma_{kl}n_l = T_k^*(\text{在 } a_\sigma \text{ 上}),\quad D_k n_k = -\sigma^*(\text{在 } a_D \text{ 上})\end{aligned} \tag{10-207}$$

$$\begin{aligned}&\dot{s} + \rho_s\ddot{\vartheta} = T^{-1}\dot{r} - T^{-1}q_{j,j} + T^{-1}\mu\dot{\xi}_{i,i}(\text{介质内})\\&\dot{\eta}_j n_j = \dot{\eta}^*,\quad \text{或 } q_i = q_i^*(\text{在 } a_q \text{ 上})\end{aligned} \tag{10-208}$$

$$\begin{aligned}&\mu_{,j} + \rho_c\ddot{\xi}_j + \hat{D}_{ij}\dot{\xi}_i + \hat{L}_{ij}T\dot{\eta}_i = 0(\text{介质内})\\&\mu = \mu^*(\text{在 } a_\mu \text{ 上})\end{aligned} \tag{10-209}$$

由式(10-209)，还可推出

$$\begin{aligned}&\mu_{,jj} + \rho_c\ddot{\xi}_{j,j} + \hat{D}_{ij}\dot{\xi}_{i,j} + \hat{L}_{ij}(T\dot{\eta}_i)_{,j} = 0\\&-\rho_c\ddot{\xi}_{j,j} - \hat{D}_{ij}\dot{\xi}_{i,j} - \hat{L}_{ij}T\dot{\eta}_{i,j} = (bc - b_{ik}\varepsilon_{ik} + b_i\varphi_{,i} + a\vartheta)_{,jj}(\text{介质内})\end{aligned} \tag{10-210}$$

如设 $\hat{D}_{ij} = \hat{D}\delta_{ij}$，$\lambda_{ij} = \lambda\delta_{ij}$，$\hat{L}_{ij} = 0$，则对 $\dot{r} = 0$ 的情形，式(10-210)化为

$$\rho_c\ddot{c} + \hat{D}\dot{c} = (bc - b_{ik}\varepsilon_{ik} + b_i\varphi_{,i} + a\vartheta)_{,jj}(\text{介质内}) \tag{10-211}$$

式(10-211)和文献[185，186]中有关公式相类似。

第11章

三维问题与某些结构元件分析

11.1 横观各向同性压电体三维分析的势函数法

11.1.1 基本方程

本章涉及的内容太多，难以详细研究，仅做简单讨论，有关详情请读者查阅相关文献。本节讨论横观各向同性压电体。在材料主坐标系中的本构方程（紧凑形式）见式(4-72)，为

$$\begin{aligned}
&\sigma_1 = C_{11}u_{1,1} + C_{12}u_{2,2} + C_{13}u_{3,3} + e_{31}\varphi_{,3}, \quad \sigma_2 = C_{12}u_{1,1} + C_{11}u_{2,2} + C_{13}u_{3,3} + e_{31}\varphi_{,3} \\
&\sigma_3 = C_{13}u_{1,1} + C_{13}u_{2,2} + C_{33}u_{3,3} + e_{33}\varphi_{,3}, \quad \sigma_4 = \sigma_{23} = C_{44}(u_{2,3} + u_{3,2}) + e_{15}\varphi_{,2} \\
&\sigma_5 = \sigma_{31} = C_{44}(u_{1,3} + u_{3,1}) + e_{15}\varphi_{,1}, \quad \sigma_6 = \sigma_{12} = C_{66}(u_{2,1} + u_{1,2}) \\
&D_1 = e_{15}(u_{1,3} + u_{3,1}) - \epsilon_{11}\varphi_{,1}, \quad D_2 = e_{24}(u_{2,3} + u_{3,2}) - \epsilon_{11}\varphi_{,1} \\
&D_3 = e_{31}u_{1,1} + e_{31}u_{2,2} + e_{33}u_{3,3} - \epsilon_{33}\varphi_{,3}, \quad C_{66} = (C_{11} - C_{12})/2
\end{aligned} \tag{11-1}$$

电介质的运动方程和电位移的 Gauss 方程为

$$\sigma_{1,1} + \sigma_{6,2} + \sigma_{5,3} = \rho\ddot{u}_1, \quad \sigma_{6,1} + \sigma_{2,2} + \sigma_{4,3} = \rho\ddot{u}_2, \quad \sigma_{5,1} + \sigma_{4,2} + \sigma_{3,3} = \rho\ddot{u}_3 \tag{11-2}$$

把式(11-1)代入(11-2)，便得用广义位移表示的横观各向同性压电体的广义运动方程

$$\begin{aligned}
&C_{11}u_{1,11} + C_{66}u_{1,22} + C_{44}u_{1,33} + (C_{12} + C_{66})u_{2,12} + (C_{13} + C_{44})u_{3,13} + (e_{15} + e_{31})\varphi_{,13} = \rho u_{1,tt} \\
&(C_{12} + C_{66})u_{1,12} + C_{66}u_{2,11} + C_{11}u_{2,22} + C_{44}u_{2,33} + (C_{13} + C_{44})u_{3,23} + (e_{15} + e_{31})\varphi_{,23} = \rho u_{2,tt} \\
&(C_{13} + C_{44})(u_{1,13} + u_{2,23}) + C_{44}\nabla^2 u_3 + C_{33}u_{3,33} + e_{15}\nabla^2\varphi + e_{33}\varphi_{,33} = \rho u_{3,tt} \\
&(e_{15} + e_{31})(u_{1,13} + u_{2,23}) + e_{15}\nabla^2 u_3 + e_{33}u_{3,33} - \epsilon_{11}\nabla^2\varphi + \epsilon_{33}\varphi_{,33} = 0
\end{aligned} \tag{11-3}$$

式中 $\nabla^2 u = u_{,11} + u_{,22}$，以后一直采用这一符号。

11.1.2 静态问题的通解

Wang 和 Zheng[188] 研究了式(11-3)的静态问题的通解。他们令

$$u_1 = \psi_{,1} - \chi_{,2}, \quad u_2 = \psi_{,2} + \chi_{,1}, \quad u_3 = k_1\psi_{,3}, \quad \varphi = k_2\psi_{,3} \tag{11-4}$$

式中 k_1 和 k_2 为待定常数，ψ 和 χ 为势函数。把式(11-4)代入(11-3)，便得

$$C_{66}\nabla^2\chi + C_{44}\chi_{,33} = 0 \tag{11-5}$$

$$
\begin{aligned}
&C_{11}\,\nabla^2\psi+[C_{44}+k_1(C_{13}+C_{44})+k_2(e_{15}+e_{31})]\psi_{,33}=0\\
&[(C_{13}+C_{44})+k_1C_{44}+k_2e_{15}]\nabla^2\psi+(k_1C_{33}+k_2e_{33})\psi_{,33}=0\\
&[(e_{15}+e_{31})+k_1e_{33}-k_2\epsilon_{11}]\nabla^2\psi+(k_1e_{33}-k_2\epsilon_{33})\psi_{,33}=0
\end{aligned}
\tag{11-6}
$$

要式(11-6)成立,必须三个方程相同,所以有

$$
\frac{C_{44}+k_1(C_{13}+C_{44})+k_2(e_{15}+e_{31})}{C_{11}}=\frac{k_1C_{33}+k_2e_{33}}{(C_{13}+C_{44})+k_1C_{44}+k_2e_{15}}=\frac{k_1e_{33}-k_2\epsilon_{33}}{(e_{15}+e_{31})+k_1e_{33}-k_2\epsilon_{11}}=\lambda
\tag{11-7}
$$

从上式消去 k_1, k_2,便得 λ 的三次代数方程

$$
\begin{aligned}
&A\lambda^3+B\lambda^2+C\lambda+D=0\\
&A=e_{15}^2+C_{44}\epsilon_{11},\quad D=-C_{11}^{-1}(e_{33}^2C_{44}+\epsilon_{33}C_{11}C_{33})\\
&B=C_{11}^{-1}[2e_{15}^2C_{13}-e_{31}^2C_{44}+2e_{15}(e_{31}C_{13}-e_{33}C_{11})+\epsilon_{11}(C_{13}^2+2C_{13}C_{44})-\\
&\qquad\epsilon_{11}C_{11}C_{33}-\epsilon_{33}C_{11}C_{44}]\\
&C=C_{11}^{-1}\{(e_{15}+e_{31})^2C_{33}-2e_{33}(e_{15}+e_{31})(C_{13}+C_{44})-(C_{13}+C_{44})^{-1}\cdot\\
&\qquad[(e_{15}+e_{31})C_{33}-(e_{15}+e_{11})C_{11}]C_{44}e_{15}+\epsilon_{11}C_{44}C_{33}+e_{33}^2C_{11}-\\
&\qquad\epsilon_{33}(C_{13}+C_{44})^2+\epsilon_{33}(C_{44}^2+C_{11}C_{33})\}
\end{aligned}
\tag{11-8}
$$

设 $\lambda_i(i=1,2,3)$ 是式(11-8)的三个根,并设 λ_1 是实数,λ_2, λ_3 是实数或是实部大于零的复数。对应每一个 λ_i,式(11-6)存在一个势函数 ψ_j,且满足方程

$$
\nabla^2\psi_j+\lambda_j\frac{\partial^2\psi_j}{\partial x_3^2}=\nabla^2\psi_j+\frac{\partial^2\psi_j}{\partial z_j^2}=0,\ z_j=s_jx_3,\ s_j^2=1/\lambda_j,\ j=1,2,3
\tag{11-9}
$$

式(11-5)也可写成

$$
\nabla^2\chi+\partial^2\chi/\partial z_0^2=0,\ z_0=s_0x_3,\ s_0^2=1/\lambda_0,\ \lambda_0=C_{44}/C_{66}
\tag{11-10}
$$

把 λ_j 代入式(11-7),便可求出 k_{1j} 和 k_{2j},从而用势函数表示的式(11-3)的通解为

$$
\begin{aligned}
&u_1=(\psi_1+\psi_2+\psi_3)_{,1}-\chi_{,2},\quad u_2=(\psi_1+\psi_2+\psi_3)_{,2}+\chi_{,1}\\
&u_3=k_{11}\psi_{1,3}+k_{12}\psi_{2,3}+k_{13}\psi_{3,3},\quad \varphi=k_{21}\psi_{1,3}+k_{22}\psi_{2,3}+k_{23}\psi_{3,3}
\end{aligned}
\tag{11-11}
$$

式中的势函数 ψ_j 和χ需分别满足式(11-9)和(11-10)。这样,便把求解三维电弹性问题简化为求解 4 个势函数 ψ_j 和χ了,使问题得到很大简化。由于式(11-8)非常复杂,很难得到 λ_j 的理论解,数值计算是可行的办法。如对 PZT-6B 材料,求得的 λ_j 为:$\lambda_1=3.92$, $\lambda_2=0.73+0.87\mathrm{i}$, $\lambda_3=0.73-0.87\mathrm{i}$。PZT-6B 的材料常数为

$$
\begin{aligned}
&C_{11}=168,\ C_{33}=163,\ C_{44}=27.1,\ C_{12}=60,\ C_{13}=60\ \mathrm{MPa}\\
&e_{31}=-0.9,\ e_{33}=7.1,\ e_{15}=4.6\ \mathrm{C/m^2}\\
&\epsilon_{11}=36\times10^{-10},\ \epsilon_{33}=34\times10^{-10}\ \mathrm{F/m}
\end{aligned}
$$

11.1.3 动态问题的通解

Ding, Chen 和 Liang[189]引入位移势(和上节用相同的符号,意义不一定相同,不要混淆):

$$u_1 = \psi_{,2} - \chi_{,1}, \quad u_2 = -\psi_{,1} - \chi_{,2} \tag{11-12}$$

把上式代入式(11-3)的头两式，得

$$\begin{aligned} &B_{,2} - A_{,1} = 0, \quad B_{,1} + A_{,2} = 0, \quad B = C_{66}\nabla^2\psi + C_{44}\psi_{,33} - \rho\psi_{,tt} \\ &A = C_{11}\nabla^2\chi + C_{44}\chi_{,33} - \rho\chi_{,tt} - (C_{13}+C_{44})u_{3,3} - (e_{15}+e_{31})\varphi_{,3} \end{aligned} \tag{11-13}$$

若令 $A = H_{,2}$，$B = H_{,1}$，则上式化为$\nabla^2 H = 0$，它的一个特解是 $H =$ 常数，$A = 0$，$B = 0$。把式(11-12)代入(11-3)的后两式，联合式(11-13)，最终式式(11-3)化为

$$C_{66}\nabla^2\psi + C_{44}\psi_{,33} - \rho\psi_{,tt} = 0 \tag{11-14}$$

$$\boldsymbol{\Omega G} = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{G} = [\chi,\ u_3,\ \varphi]^{\mathrm{T}}$$

$$\boldsymbol{\Omega} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11}\nabla^2 + C_{44}\dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \rho\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} & -(C_{13}+C_{44})\dfrac{\partial}{\partial x_3} & -(e_{15}+e_{31})\dfrac{\partial}{\partial x_3} \\ -(C_{13}+C_{44})\nabla^2\dfrac{\partial}{\partial x_3} & C_{44}\nabla^2 + C_{33}\dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \rho\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} & e_{15}\nabla^2 + e_{33}\dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2} \\ (e_{15}+e_{31})\nabla^2\dfrac{\partial}{\partial x_3} & -\left(e_{15}\nabla^2 + e_{33}\dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) & \epsilon_{11}\nabla^2 + \epsilon_{33}\dfrac{\partial^2}{\partial x_3^2} \end{bmatrix} \tag{11-15}$$

先计算上式中的 $|\boldsymbol{\Omega}|$，$|\boldsymbol{\Omega}|$ 为 $\boldsymbol{\Omega}$ 的行列式，再引入一个新函数 F。求 $|\boldsymbol{\Omega}|F = 0$ 的解，由式(11-15)可得

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{\Omega}|F = (&a\frac{\partial^6}{\partial x_3^6} + b\nabla^2\frac{\partial^4}{\partial x_3^4} + c\nabla^4\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + d\nabla^6 + g\nabla^2\frac{\partial^4}{\partial t^4} + h\nabla^4\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \\ &k\nabla^2\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + l\frac{\partial^4}{\partial x_3^4}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + m\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\frac{\partial^4}{\partial t^4})F = 0 \end{aligned} \tag{11-16}$$

式中

$$\begin{aligned} a &= C_{44}(e_{33}^2 + C_{33}\epsilon_{33}) \\ b &= C_{33}[C_{44}\epsilon_{11} + (e_{15}+e_{31})^2] + \epsilon_{33}[C_{11}C_{33} + C_{44}^2 - (C_{13}+C_{44})^2] + \\ &\quad e_{33}[2C_{44}e_{15} + C_{11}e_{33} - 2(C_{13}+C_{44})(e_{15}+e_{31})] \\ c &= C_{44}[C_{11}\epsilon_{33} + (e_{15}+e_{31})^2] + \epsilon_{11}[C_{11}C_{33} + C_{44}^2 - (C_{13}+C_{44})^2] + \\ &\quad e_{15}[2C_{11}e_{33} + C_{44}e_{15} - 2(C_{13}+C_{44})(e_{15}+e_{31})] \\ d &= C_{11}(e_{15}^2 + C_{44}\epsilon_{11}),\ g = \rho^2\epsilon_{11},\ h = -\rho[e_{15}^2 + (C_{11}+C_{44})\epsilon_{11}] \\ k &= -\rho[2e_{15}e_{33} + (C_{33}+C_{44})\epsilon_{11} + (C_{11}+C_{44})\epsilon_{33} + (e_{15}+e_{31})^2] \\ l &= -\rho[e_{33}^2 + (C_{33}+C_{44})\epsilon_{33}],\ m = \rho^2\epsilon_{33} \end{aligned} \tag{11-17}$$

求出 F 后，则下面的三组χ，u_3，φ 都是解，即

$$\chi = A_{i1}F, \quad u_3 = A_{i2}F, \quad \varphi = A_{i3}F,\ i = 1,\ 2,\ 3 \tag{11-18}$$

式(11-18)中的 A_{ij} 是$|\boldsymbol{\Omega}|$中元素 a_{ij} 的代数余子式，即有

$$A_{11} = \left(C_{44}\nabla^2 + C_{33}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\epsilon_{11}\nabla^2 + \epsilon_{33}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) + \left(e_{15}\nabla^2 + e_{33}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)^2$$

$$A_{12} = \left[\left(\epsilon_{11}\nabla^2 + \epsilon_{33}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)(C_{13}+C_{44}) + \left(e_{15}\nabla^2 + e_{33}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)(e_{15}+e_{31})\right]\nabla^2\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$A_{13}=\left[\left(e_{15}\nabla^2+e_{33}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)(C_{13}+C_{44})-\left(C_{44}\nabla^2+C_{33}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}-\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(e_{15}+e_{31})\right]\nabla^2\frac{\partial}{\partial x_3}$$

(11-19)

$$A_{21}=\left[\left(\epsilon_{11}\nabla^2+\epsilon_{33}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)(C_{13}+C_{44})+\left(e_{15}\nabla^2+e_{33}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)(e_{15}+e_{31})\right]\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$A_{22}=\left(C_{11}\nabla^2+C_{44}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}-\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\epsilon_{11}\nabla^2+\epsilon_{33}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)+(e_{15}+e_{31})^2\nabla^2\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

$$A_{23}=\left(C_{11}\nabla^2+C_{44}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}-\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\epsilon_{11}\nabla^2+\epsilon_{33}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)-(C_{13}+C_{44})(e_{15}+e_{31})\nabla^2\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

(11-20)

$$A_{31}=\left[\left(C_{44}\nabla^2+C_{33}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}-\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)(e_{15}+e_{31})-\left(e_{15}\nabla^2+e_{33}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)(C_{13}+C_{44})\right]\frac{\partial}{\partial x_3}$$

$$A_{32}=(e_{15}+e_{31})(C_{13}+C_{44})\nabla^2\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}-\left(C_{11}\nabla^2+C_{44}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}-\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(e_{15}\nabla^2+e_{33}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)$$

$$A_{33}=\left(C_{11}\nabla^2+C_{44}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}-\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(C_{44}\nabla^2+C_{33}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}-\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)-(C_{13}+C_{44})^2\nabla^2\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

(11-21)

把式(11-16)代回(11-12)，便得问题的通解

$$u_1=\psi_{,2}-A_{i1}F_{,1},\quad u_2=-\psi_{,1}-A_{i1}F_{,2},\quad u_3=A_{i2}F,\quad \varphi=A_{i3}F,\ i=1,2,3$$

(11-22)

这样，便把求解三维电弹性动力学问题简化为求解两个势函数 ψ 和 F 了。

对于轴对称问题，其通解可由式(11-12)中令 $\psi=0$ 和 F 与 θ 无关得到。对于无压电效应的电弹性体，有 $e_{15}=e_{31}=e_{33}=0$，则由式(11-7)可知，此时弹性问题和静电问题解耦，化为两组相互独立的方程组，可以各自独立求解。

11.1.4 静力学方程的通解

静力学问题和时间无关，其解可在上一节的结果中令所有的函数都和时间无关得到，这使问题大大简化[189]。由式(11-14)得到

$$(\nabla^2+\partial^2/\partial z_0^2)\psi_0=0,\ z_0^2=s_0^2x_3^2,\ s_0^2=C_{66}/C_{44}\qquad(11-23)$$

式(11-16)可以化为

$$\left(\nabla^2+\frac{\partial^2}{\partial z_1^2}\right)\left(\nabla^2+\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}\right)\left(\nabla^2+\frac{\partial^2}{\partial z_3^2}\right)F=0,\ z_i^2=s_i^2x_3^2,\ i=1,2,3\qquad(11-24)$$

式中 s_i^2 是下列方程的根

$$as^6-bs^4+cs^2-d=0\qquad(11-25)$$

事实上如果展开式(11-24)，可得

$$\left[s_1^2s_2^2s_3^2\nabla^6+(s_1^2s_2^2+s_2^2s_3^2+s_3^2s_1^2)\nabla^4\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}+(s_1^2+s_2^2+s_3^2)\nabla^2\frac{\partial^4}{\partial x_3^4}+\frac{\partial^6}{\partial x_3^6}\right]F=0$$

比较上式和式(11-16),可得

$$s_1^2 s_2^2 s_3^2 = d/a,\quad s_1^2 s_2^2 + s_2^2 s_3^2 + s_3^2 s_1^2 = c/a,\quad s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = b/a$$

所以 s_1^2, s_2^2, s_3^2 是式(11-25)的根,显然其中至少有一个是实数,今后取 $\mathrm{Re}(s_i) > 0$。显然,满足下述方程的 F_i 都是方程式(11-24)的解[189]

$$\left(\nabla^2 + \frac{\partial^2}{\partial z_i^2}\right)F_i = 0,\ z_i^2 = s_i^2 x_3^2,\ i = 1,\ 2,\ 3 \tag{11-26}$$

根据是否有重根,解又可分为以下三种形式(可适当参阅第 4 章 4.2.5 节):

(1) s_i^2 没有重根,解为 $\qquad F = F_1 + F_2 + F_3 \qquad$ (11-27)

(2) $s_1^2 \neq s_2^2 = s_3^2$,解为 $\qquad F = F_1 + F_2 + x_3 F_3 \qquad$ (11-28a)

(3) $s_1^2 = s_2^2 = s_3^2$,解为 $\qquad F = F_1 + x_3 F_2 + x_3^2 F_3 \qquad$ (11-28b)

因此,只需解出式(11-26)二阶方程中的 F_i,$i = 1,\ 2,\ 3$,代入式(11-27)或(11-28),再代入式(11-22),便可得原问题的三组通解。

形式上由式(11-26)可推出 $\nabla^2 = -\partial^2/\partial z_i^2$,$\partial/\partial x_3 = s_i\,\partial/\partial z_i$,以此代入 A_{ij},可使其简化。如对式(11-20),有

$$\begin{aligned}
A_{21} &= \left(\beta_1 \nabla^2 + \beta_2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\frac{\partial}{\partial x_3} = (\beta_2 s_i^2 - \beta_1) s_i \frac{\partial^3}{\partial z_i^3} \\
A_{22} &= C_{11}\epsilon_{11} \nabla^4 + \beta_3 \nabla^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + C_{44}\epsilon_{33} \frac{\partial^4}{\partial x_3^4} = (C_{44}\epsilon_{33} s_i^4 - \beta_3 s_i^2 + C_{11}\epsilon_{11}) \frac{\partial^4}{\partial z_i^4} \\
A_{23} &= C_{11} e_{15} \nabla^4 + \beta_4 \nabla^2 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + C_{44} e_{33} \frac{\partial^4}{\partial z_3^4} = (C_{44} e_{33} s_i^4 - \beta_4 s_i^2 + C_{11}\epsilon_{15}) \frac{\partial^4}{\partial z_i^4} \\
\beta_1 &= \epsilon_{11}(C_{13} + C_{44}) + e_{15}(e_{15} + e_{31}),\ \beta_2 = \epsilon_{33}(C_{13} + C_{44}) + e_{33}(e_{15} + e_{31}) \\
\beta_3 &= C_{11}\epsilon_{33} + C_{44}\epsilon_{11} + (e_{15} + e_{31})^2,\ \beta_4 = C_{11} e_{33} + C_{44} e_{15} - (C_{13} + C_{44})(e_{15} + e_{31})
\end{aligned} \tag{11-29}$$

所以这一组解可以写成

$$\begin{aligned}
u_1 &= \frac{\partial \psi}{\partial x_2} + \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i1} s_i \frac{\partial^4 F_i}{\partial x_1 \partial z_i^3},\quad u_2 = -\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i1} s_i \frac{\partial^4 F_i}{\partial x_2 \partial z_i^3} \\
u_3 &= \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i2} \frac{\partial^4 F_i}{\partial z_i^4},\quad \varphi = \sum_{i=1}^{3} \alpha_{i3} \frac{\partial^4 F_i}{\partial z_i^4} \\
\alpha_{i1} &= \beta_1 - \beta_2 s_i^2,\ \alpha_{i2} = C_{11}\epsilon_{11} - \beta_3 s_i^2 + C_{44}\epsilon_{33} s_i^4,\ \alpha_{i3} = C_{11} e_{15} - \beta_4 s_i^2 + C_{44} e_{33} s_i^4
\end{aligned} \tag{11-30}$$

若令 $\alpha_{1i} s_i \partial^3 F_i / \partial z_i^3 = \psi_i$,$\psi_0 = -\psi$,则上式又可写成

$$\begin{aligned}
u_1 &= -\frac{\partial \psi_0}{\partial x_2} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1},\quad u_2 = \frac{\partial \psi_0}{\partial x_1} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2},\quad u_3 = \sum_{i=1}^{3} k_{i1} \frac{\partial \psi_i}{\partial z_i} \\
\varphi &= \sum_{i=1}^{3} k_{i2} \frac{\partial \psi_i}{\partial z_i},\ k_{i1} = \alpha_{i2}/\alpha_{i1} s_i,\ k_{i2} = \alpha_{i3}/\alpha_{i1} s_i
\end{aligned} \tag{11-31}$$

式(11-31)和(11-11)形式上是一样的。

Fabrikant[190]用势论详细研究过弹性问题,得到过一些用势函数 F_i 表示解的有价值的公式及许多应用,并指出在许多情况下,F_i 可用一个函数表成 $F_i = C_i F(x_1,\ x_2,\ z_i)$。

11.2 三维硬币(薄片)形裂纹

11.2.1 绝缘硬币(薄片)形裂纹问题概述

讨论一横观各向同性压电体,在 $x_3=0$ 的平面上有一半径为 a 的绝缘薄片形裂纹,占据区域 S,其上作用沿 x_3 方向的机械压力 $-p(x_1, x_2)$ 和电荷 $q(x_1, x_2)$,同时采用直角坐标系 (x_1, x_2, x_3) 和圆柱坐标系 (r, θ, z),裂纹面为 $(r, \theta, 0)$(图 11-1)。这是个轴对称的混合边值问题,其边界条件为:无穷远处广义应力为零,以及

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{33}=-p(x_1, x_2), \quad D_3=q(x_1, x_2), \ (x_1, x_2)\in S \\
&w=u_3=\varphi=0, \ (x_1, x_2)\notin S \\
&\sigma_{31}=\sigma_{32}=0, \ -\infty<(x_1, x_2)<\infty
\end{aligned}
\tag{11-32}
$$

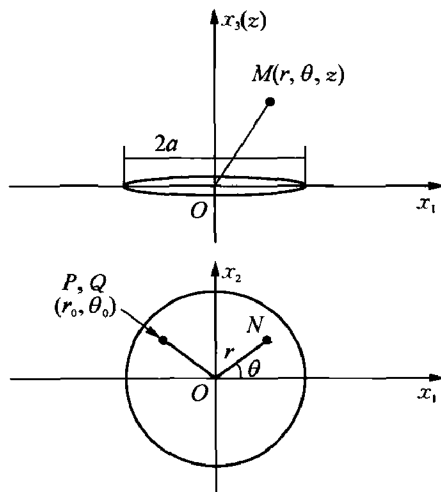


图 11-1 硬币形裂纹

Chen 和 Shioya[190]推广 Fabrikant[191]有关弹性问题的理论,比较简单地解决了这一问题。引入切向复位移 $U=u_1+\mathrm{i}u_2$ 和符号 $\Lambda=\partial/\partial x_1+\mathrm{i}\partial/\partial x_2$,并记 $w=u_3$,$z=x_3$,则用切向复位移表示的运动方程为

$$
\begin{aligned}
&(1/2)(C_{11}+C_{66})\nabla^2U+C_{44}U_{,33}+(1/2)(C_{11}-C_{66})\Lambda^2\overline{U}+ \\
&\qquad (C_{13}+C_{44})\Lambda w_{,3}+(e_{15}+e_{31})\Lambda\varphi_{,3}=0 \\
&(1/2)(C_{13}+C_{44})(\overline{\Lambda}U+\Lambda\overline{U})_{,3}+C_{44}\nabla^2w+C_{33}w_{,33}+e_{15}\nabla^2\varphi+e_{33}\varphi_{,33}=0 \\
&(1/2)(e_{15}+e_{31})(\overline{\Lambda}U+\Lambda\overline{U})_{,3}+e_{15}\nabla^2w+e_{33}w_{,33}-\epsilon_{11}\nabla^2\varphi-\epsilon_{33}\varphi_{,33}=0
\end{aligned}
\tag{11-33}
$$

式中$\overline{U}$和$\overline{\Lambda}$分别表示 U 和 Λ 的共轭值,其解由式(11-31)表示,按现在的符号应改写为

$$
U=\Lambda\left(\sum_{i=1}^{3}\psi_i+\mathrm{i}\psi_0\right), \quad w=\sum_{i=1}^{3}k_{i1}\frac{\partial\psi_i}{\partial z_i}, \quad \varphi=\sum_{i=1}^{3}k_{i2}\frac{\partial\psi_i}{\partial z_i}
\tag{11-34}
$$

广义应力为

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{11}+\sigma_{22}=2\nabla^2\sum_{i=1}^{3}(C_{11}-C_{66}-C_{13}s_ik_{i1}-e_{31}s_ik_{i2})\psi_i \\
&\sigma_{11}-\sigma_{22}+2\mathrm{i}\sigma_{12}=2C_{66}\Lambda^2(\psi_1+\psi_2+\psi_3+\mathrm{i}\psi_0) \\
&\sigma_{31}+\mathrm{i}\sigma_{32}=\Lambda\left\{\sum_{i=1}^{3}[C_{44}(k_{i1}+s_i)+e_{15}k_{i2}]\frac{\partial\psi_i}{\partial z_i}+\mathrm{i}s_4C_{44}\frac{\partial\psi_0}{\partial z_0}\right\} \\
&D_1+\mathrm{i}D_2=\Lambda\left\{\sum_{i=1}^{3}[e_{15}(k_{i1}+s_i)-\epsilon_{11}k_{i2}]\frac{\partial\psi_i}{\partial z_i}+\mathrm{i}s_4e_{15}\frac{\partial\psi_0}{\partial z_0}\right\} \\
&\sigma_{33}=-\nabla^2\sum_{i=1}^{3}\gamma_{1i}\psi_i, \quad D_3=-\nabla^2\sum_{i=1}^{3}\gamma_{2i}\psi_i, \quad (\nabla^2+\partial^2/\partial z_i^2)\psi_i=0
\end{aligned}
\tag{11-35}
$$

$$\gamma_{1i} = -C_{13} + C_{33}s_ik_{i1} + e_{33}s_ik_{i2}, \quad \gamma_{2i} = -e_{31} + e_{33}s_ik_{i1} - \epsilon_{33}s_ik_{i2}$$

11.2.2 一般形状薄片型裂纹问题的解

满足边界条件式(11-32)的解,可用两个调和函数 G, H 来表示

$$\psi_i(z_i) = c_iG(z_i) + d_iH(z_i),\ i = 1, 2, 3;\quad \psi_0(z_0) = 0 \tag{11-36}$$

式中 c_i, d_i 为待定常数。G 和 H 可用单层势表示为

$$G(r, \theta, z) = \int_S \frac{\hat{u}(N)}{\rho(M, N)}\mathrm{d}S,\quad H(r, \theta, z) = \int_S \frac{\hat{\varphi}(N)}{\rho(M, N)}\mathrm{d}S \tag{11-37}$$

式中 $\hat{u}(N) = w(x_1, x_2, 0)$ 和$\hat{\varphi}(N) = \varphi(x_1, x_2, 0)$ 分别是裂纹面 S 上待定的位移和电势,$N(r, \theta, 0)$是裂纹面上的点,其中(r, θ)是裂纹面上的极坐标,$M(r, \theta, z)$是压电体中的任一点,$\rho(M, N)$是 N 和 M 两点间的距离。根据单层势理论,式(11-37)表示的单层势自动满足式(11-32)中 $z = 0$ 平面上的裂纹外部 $w = \varphi = 0$ 的边界条件。同时,在裂纹的内部有

$$(\partial G/\partial z)_{z=0} = -2\pi\hat{u},\quad (\partial H/\partial z)_{z=0} = -2\pi\hat{\varphi} \tag{11-38}$$

由式(11-34)、(11-36)和(11-38),得

$$\sum_{i=1}^{3} c_ik_{i1} = -\frac{1}{2\pi},\quad \sum_{i=1}^{3} d_ik_{i1} = 0,\quad \sum_{i=1}^{3} c_ik_{i2} = 0,\quad \sum_{i=1}^{3} d_ik_{i2} = -\frac{1}{2\pi} \tag{11-39}$$

为满足式(11-32)中的有关 σ_{31}, σ_{32} 的边界条件,有

$$\sum_{i=1}^{3} c_i[C_{44}(k_{i1} + s_i) + e_{15}k_{i2}] = 0,\quad \sum_{i=1}^{3} d_i[C_{44}(k_{i1} + s_i) + e_{15}k_{i2}] = 0 \tag{11-40}$$

联立式(11-39)和(11-40),便得

$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi}\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ k_{11} & k_{21} & k_{31} \\ k_{12} & k_{22} & k_{32} \end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{Bmatrix},\quad \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2\pi}\begin{bmatrix} s_1 & s_2 & s_3 \\ k_{11} & k_{21} & k_{31} \\ k_{12} & k_{22} & k_{32} \end{bmatrix}^{-1}\begin{Bmatrix} e_{15}/C_{44} \\ 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \tag{11-41}$$

剩下的问题是利用裂纹面上的边界条件来确定待定函数$\hat{u}(N)$和$\hat{\varphi}(N)$。由式(11-32)中的裂纹面上的边界条件,得

$$\begin{aligned} p(N_0) &= -\eta_1\nabla^2\iint_S \frac{\hat{u}(N)}{\rho(N_0, N)}\mathrm{d}S - \eta_2\nabla^2\iint_S \frac{\hat{\varphi}(N)}{\rho(N_0, N)}\mathrm{d}S \\ q(N_0) &= -\eta_3\nabla^2\iint_S \frac{\hat{u}(N)}{\rho(N_0, N)}\mathrm{d}S - \eta_4\nabla^2\iint_S \frac{\hat{\varphi}(N)}{\rho(N_0, N)}\mathrm{d}S \\ \eta_1 &= -\sum_{i=1}^{3} c_i\gamma_{1i},\ \eta_2 = -\sum_{i=1}^{3} d_i\gamma_{1i},\ \eta_3 = \sum_{i=1}^{3} c_i\gamma_{2i},\ \eta_4 = \sum_{i=1}^{3} d_i\gamma_{2i} \end{aligned} \tag{11-42}$$

式中 $N_0(r_0, \theta_0)$, $N(r, \theta) \in S$,积分遍及裂纹面 S 上的所有点 N。由上式可解得

$$\begin{aligned} \eta_4p(N_0) - \eta_2q(N_0) &= -\frac{1}{4\pi^2A}\nabla^2\iint_S \frac{\hat{u}(N)}{\rho(N_0, N)}\mathrm{d}S \\ \eta_1q(N_0) - \eta_3p(N_0) &= -\frac{1}{4\pi^2A}\nabla^2\iint_S \frac{\hat{\varphi}(N)}{\rho(N_0, N)}\mathrm{d}S,\ A = \frac{1}{4\pi^2}(\eta_1\eta_4 - \eta_2\eta_3) \end{aligned} \tag{11-43}$$

上述公式对于任意形状的薄片形裂纹都适用，至少可采用数值解法。

11.2.3 圆片形裂纹问题的解

对于直径为 $2a$ 的圆片形裂纹，利用文献[190]的已有结果，式(11-43)的解为

$$
\begin{aligned}
\hat{u} &= \frac{2A}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{1}{\rho}\arctan\left(\frac{\xi}{\rho}\right)[\eta_4 p(r_0,\theta_0)-\eta_2 q(r_0,\theta_0)]r_0\mathrm{d}r_0\mathrm{d}\theta_0 \\
\hat{\varphi} &= \frac{2A}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{1}{\rho}\arctan\left(\frac{\xi}{\rho}\right)[\eta_1 q(r_0,\theta_0)-\eta_3 p(r_0,\theta_0)]r_0\mathrm{d}r_0\mathrm{d}\theta_0 \\
\rho &= \sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\theta-\theta_0)},\ \xi=\sqrt{(a^2-r^2)(a^2-r_0^2)}/a
\end{aligned}
\tag{11-44}
$$

式中 $\rho=\rho(N, N_0)$。把式(11-44)代入(11-37)，便得

$$
\begin{aligned}
G(r,\theta,z) &= \frac{2A}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^a K(r,\theta,z;r_0,\theta_0)[\eta_4 p(r_0,\theta_0)-\eta_2 q(r_0,\theta_0)]r_0\mathrm{d}r_0\mathrm{d}\theta_0 \\
H(r,\theta,z) &= \frac{2A}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^a K(r,\theta,z;r_0,\theta_0)[\eta_1 q(r_0,\theta_0)-\eta_3 p(r_0,\theta_0)]r_0\mathrm{d}r_0\mathrm{d}\theta_0
\end{aligned}
\tag{11-45}
$$

式中的核函数(Green 函数)K 为

$$
\begin{aligned}
K(M,N_0) &= \int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{1}{\rho(N,N_0)}\arctan\left[\frac{\sqrt{(a^2-r^2)(a^2-r_0^2)}}{a\rho(N,N_0)}\right]\frac{r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta}{\rho(M,N)} \\
&= K(r,\theta,z;r_0,\theta_0)
\end{aligned}
\tag{11-46}
$$

式(11-45)的导数为

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial z} &= -4A\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{1}{\rho(M,N_0)}\arctan\left[\frac{h}{\rho(M,N_0)}\right][\eta_4 p(r_0,\theta_0)-\eta_2 q(r_0,\theta_0)]r_0\mathrm{d}r_0\mathrm{d}\theta_0 \\
\frac{\partial H}{\partial z} &= -4A\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{1}{\rho(M,N_0)}\arctan\left[\frac{h}{\rho(M,N_0)}\right][\eta_1 q(r_0,\theta_0)-\eta_3 p(r_0,\theta_0)]r_0\mathrm{d}r_0\mathrm{d}\theta_0 \\
h &= \sqrt{(a^2-l^2)(a^2-r_0^2)}/a,\quad l=\left[\sqrt{(r+a)^2+z^2}-\sqrt{(r-a)^2+z^2}\right]/2
\end{aligned}
\tag{11-47}
$$

式中已利用了 $\partial K/\partial z=-[2\pi/\rho(M,N_0)]\arctan[h/\rho(M,N_0)]$[190]，从而所有电弹性场的变量都可以表成初等函数。

11.2.4 集中广义载荷作用下圆片形裂纹问题的解(Green 函数)

设在裂纹面上的点$(r_0,\theta_0,0^{\pm})$处作用广义集中载荷(P,Q)，P 沿 x_3 方向。利用上一小节的公式，把积分积出后，最终得到广义位移和广义法向应力

$$
\begin{aligned}
U &= 4A\sum_{i=1}^{3}[\tau_{i1}f_1(z_i)P+\tau_{i2}f_1(z_i)Q] \\
w &= -4A\sum_{i=1}^{3}k_{i1}[\tau_{i1}f_2(z_i)P+\tau_{i2}f_2(z_i)Q] \\
\varphi &= -4A\sum_{i=1}^{3}k_{i2}[\tau_{i1}f_2(z_i)P+\tau_{i2}f_2(z_i)Q]
\end{aligned}
\tag{11-48a}
$$

$$\sigma_{33}=4A\sum_{i=1}^{3}\gamma_{1i}[\tau_{i1}f_3(z_i)P+\tau_{i2}f_3(z_i)Q]$$

$$D_3=4A\sum_{i=1}^{3}\gamma_{2i}[\tau_{i1}f_3(z_i)P+\tau_{i2}f_3(z_i)Q]$$

其他的分量表达式此处略去。式中

$$f_1(z_i)=\frac{1}{t_0}\left[\frac{z_i}{R_0}\arctan\frac{h_0}{R_0}-\frac{\sqrt{a^2-r_0^2}}{\alpha_0}\arctan\left(\frac{\alpha_0}{\sqrt{m^2-a^2}}\right)\right],\ f_2(z_i)=\frac{1}{R_0}\arctan\frac{h_0}{R_0}$$

$$f_3(z_i)=\frac{1}{R_0}\arctan\frac{h_0}{R_0}-\frac{h_0}{z_i(R_0^2+h_0^2)}\left(\frac{r^2-l^2}{m^2-l^2}-\frac{z_j^2}{R_0^2}\right),\ \alpha_0=\sqrt{a^2-rr_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\theta-\theta_0)}}$$

$$R_0=\sqrt{r^2+r_0^2-2rr_0\cos(\theta-\theta_0)+z^2},\ m=\frac{1}{2}[\sqrt{(r+a)^2+z^2}+\sqrt{(r-a)^2+z^2}]$$

$$\tau_{i1}=c_i\eta_4-d_i\eta_3,\ \tau_{i2}=d_i\eta_1-c_i\eta_2,\ h_0=\sqrt{(a^2-l^2)(a^2-r_0^2)}/a,\ t_0=r\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}-r_0\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta_0} \tag{11-48b}$$

应力强度因子为

$$K_{\mathrm{I}}=\lim_{r\to a}(\sqrt{r-a}\,\sigma_{33}\,|_{z=0})=\frac{P}{\pi^2\sqrt{2a}}\frac{\sqrt{a^2-r_0^2}}{a^2+r_0^2-2ar_0\cos(\theta-\theta_0)}$$

$$K_{\mathrm{D}}=\lim_{r\to a}(\sqrt{r-a}\,D_3\,|_{z=0})=-\frac{Q}{\pi^2\sqrt{2a}}\frac{\sqrt{a^2-r_0^2}}{a^2+r_0^2-2ar_0\cos(\theta-\theta_0)} \tag{11-49}$$

对于任意分布的广义载荷$(-p,\ q)$,其广义应力强度因子为

$$K_{\mathrm{I}}=\frac{1}{\pi^2\sqrt{2a}}\int_0^{2\pi}\int_0^a\frac{p(r_0,\ \theta_0)\sqrt{a^2-r_0^2}}{a^2+r_0^2-2ar_0\cos(\theta-\theta_0)}r_0\mathrm{d}r_0\mathrm{d}\theta_0$$

$$K_{\mathrm{D}}=-\frac{1}{\pi^2\sqrt{2a}}\int_0^{2\pi}\int_0^a\frac{q(r_0,\ \theta_0)\sqrt{a^2-r_0^2}}{a^2+r_0^2-2ar_0\cos(\theta-\theta_0)}r_0\mathrm{d}r_0\mathrm{d}\theta_0 \tag{11-50}$$

当广义载荷为均匀载荷$(-p_0,\ D_0)$时,广义应力强度因子简化为

$$K_{\mathrm{I}}=\frac{p_0\sqrt{2a}}{\pi},\quad K_{\mathrm{D}}=\frac{D_0\sqrt{2a}}{\pi} \tag{11-51}$$

由上面的公式可见,和二维情形一样,机械载荷决定机械应力强度因子,电载荷决定电学强度因子,两者互不影响。

11.2.5 传导薄片形裂纹

Chen 和 Lim[192]讨论了传导硬币型裂纹问题。传导薄片形裂纹和绝缘裂纹的主要差别在于在裂纹面上需用 $\varphi=0$ 代替式(11-32)中的 $D_3=q(x_1,\ x_2)$,从而其边界条件为

$$\sigma_{33}=-p(x_1,\ x_2),\quad u_3=0,\ (x_1,\ x_2)\in S$$

$$\varphi=0,\quad \sigma_{31}=\sigma_{32}=0,\ -\infty<(x_1,\ x_2)<\infty \tag{11-52}$$

根据上述边界条件,式(11-36)和(11-37)中的 $H=0$。式(11-42)化为

$$p(N_0) = -\eta_1 \nabla^2 \iint_S \frac{\hat{u}(N)}{\rho(N_0, N)} \mathrm{d}S, \quad \eta_1 = -\sum_{i=1}^{3} c_i \gamma_{1i} \tag{11-53}$$

式(11-45)化为

$$G(r, \theta, z) = \frac{1}{2\pi^3 \eta_1} \int_0^{2\pi} \int_0^a K(r, \theta, z; r_0, \theta_0) p(r_0, \theta_0) r_0 \mathrm{d}r_0 \mathrm{d}\theta_0 \tag{11-54}$$

式中 $K(r, \theta, z; r_0, \theta_0)$ 仍由式(11-46)表示。圆片形裂纹在集中载荷作用下的位移和广义法向应力为

$$U = \frac{P}{\pi^2 \eta_1} \sum_{i=1}^{3} c_i f_1(z_i), \quad u_3 = -\frac{P}{\pi^2 \eta_1} \sum_{i=1}^{3} k_{1i} c_i f_2(z_i), \quad \varphi = -\frac{P}{\pi^2 \eta_1} \sum_{i=1}^{3} K_{2i} C_i f_2(z_i)$$

$$\sigma_{33} = \frac{P}{\pi^2 \eta_1} \sum_{i=1}^{3} \gamma_{1i} c_i f_3(z_i), \quad D_3 = \frac{P}{\pi^2 \eta_1} \sum_{i=1}^{3} \gamma_{2i} c_i f_3(z_i) \tag{11-55}$$

其中的函数仍由式(11-48b)表示。求得的广义应力强度因子为

$$K_{\mathrm{I}} = \frac{P}{\pi^2 \sqrt{2a}} \frac{\sqrt{a^2 - r_0^2}}{a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos(\theta - \theta_0)}, \quad K_{\mathrm{D}} = \frac{\beta}{\pi^2 \sqrt{2a}} \frac{\sqrt{a^2 - r_0^2}}{a^2 + r_0^2 - 2ar_0 \cos(\theta - \theta_0)} \tag{11-56}$$

式中 $\beta = -\sum_{i=1}^{3} \gamma_{i1} c_i / \eta_1$。由上式可知，应力强度因子和绝缘裂纹的相同，但电位移强势因子却大不相同，此时机械载荷产生电位移强度因子。上面的结果对应于式(11-27)中 s_i 没有重根的情形，文献[192]还讨论了有重根的情形。

11.3 三维压电体中的椭球夹质和夹杂

11.3.1 电弹性 Green 函数

1) 基本概念

三维压电体中的本征应变夹质(inclusion)问题，通常是指夹质和基体具有相同的电弹性性质，但在夹质中存在本征应变。本征应变是多种物理现象的抽象表述，如自由相变应变、自由热应变、塑性应变、自发极化引起的无电位移的电场等，在基体约束的情况下产生自平衡的应力体系。夹杂(inhomogeneity)指的是基体和夹杂具有不同的材料性质，引起物质错配，在外载荷作用下产生不均匀广义应力，这里的中文定义并未完全统一。夹质和夹杂理论在压电体理论中有许多重要应用，特别是对于材料的微观理论，研究文章非常多，如文献[193～198]。

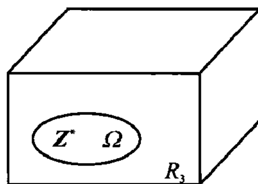


图 11-2 椭球夹质

为书写方便起见，本节采用第 4 章式(4-10b)的符号，同时遵守那里的规则，即式中小写字母下标取值 1，2，3；大写字母下标取值 1，2，3，4。图 11-2 表示三维 R_3 物体中有一椭球夹质，该夹质占据区

域 Ω，具有广义本征应变 $\boldsymbol{Z}^*$（$Z_{ij}=\varepsilon_{ij}^*$，$Z_{4j}=-E_j^*$，没有 Z_{44}）。存在广义本征应变时的本构方程为

$$\Sigma_{iJ}=E_{iJKl}(Z_{Kl}-Z_{Kl}^*);\quad Z_{Kl}^*(\boldsymbol{x})=Z_{Kl}^*,\ \boldsymbol{x}\in\Omega;\quad Z_{Kl}^*(\boldsymbol{x})=0,\ \boldsymbol{x}\notin\Omega \tag{11-57}$$

式中 $Z_{Kl}=U_{K,l}$，$\boldsymbol{U}=[u_k,\ \varphi]^{\mathrm{T}}$。广义平衡方程可写成

$$\Sigma_{iJ,i}=-f_J,\quad E_{iJKl}U_{K,li}=E_{iJKl}Z_{Kl,i}^*(\boldsymbol{x})-f_J \tag{11-58}$$

式中 f_1，f_2，f_3 为体积力，$f_4=-\rho_e$ 为自由体积电荷。$E_{iJKl}Z_{Kl,i}^*(\boldsymbol{x})$起着和 f_J 同样的作用。

无限压电体内的 Green 函数 $G_{KR}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$满足下述平衡方程

$$E_{iJKl}G_{KR,il}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')+\delta_{JR}\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')=\boldsymbol{0} \tag{11-59}$$

式中 δ_{JR}为广义的 Kronecker delta，$\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$ 为三维的 Dirac delta 函数，该函数除 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}'$ 外处处为零，且对任意函数 $f(\boldsymbol{x})$，服从下述关系

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(\boldsymbol{x}')\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\mathrm{d}\boldsymbol{x}'=f(\boldsymbol{x}) \tag{11-60}$$

显然由式(11-59)定义的 Green 函数，满足 $|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|\to\infty$ 时，$G_{IJ}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$ 和它的一阶导数均趋于零的边界条件。

电弹性 Green 函数 $G_{IJ}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$ 被广泛使用来研究压电介质中的夹质问题。无限压电体内的 Green 函数是源点 $\boldsymbol{x}'$和观察点 $\boldsymbol{x}$ 的相对位置（$\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'$）的函数。$G_{KR}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$ 表示作用在 $\boldsymbol{x}'$ 点沿 x_R 方向的单位广义集中力引起的在点 $\boldsymbol{x}$沿 x_M 方向的广义位移，但下标 4 代表电学量，没有方向，如 $G_{4j}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$ 表示在点 $\boldsymbol{x}'$ 沿 x_j 方向的单位广义集中力引起的在点 $\boldsymbol{x}$ 的电势。

研究本征应变问题有多种方法，关键是寻求 Green 函数，常用的有 Fourier 和 Radon(雷登)变换法。

2) **Fourier 变换方法**

首先设广义本征应变和广义位移可以分别表成 Fourier 级数

$$Z_{Kl}^*(\boldsymbol{x})=\overline{Z}_{Kl}^*(\boldsymbol{\xi})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}},\quad U_K(\boldsymbol{x})=\overline{U}_K(\boldsymbol{\xi})\mathrm{e}^{\mathrm{i}\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}} \tag{11-61}$$

把式(11-61)代入不计体力的平衡方程式(11-58)，类似于纯弹性情形[49]，可得

$$\begin{gathered}\Pi_{JK}(\xi)\overline{U}_K=\Xi_J(\xi),\quad \Pi_{JK}(\xi)=E_{iJKl}\xi_i\xi_l,\quad \Xi_J(\xi)=-\mathrm{i}E_{iJKl}\overline{Z}_{Kl}^*\xi_i\\ \overline{U}_K=\Xi_JN_{JK}/D,\quad N_{MJ}(\xi)=\frac{1}{2}\hat{\varepsilon}_{IKL}\hat{\varepsilon}_{JMN}\Pi_{KM}\Pi_{LN},\quad D=|\Pi_{KM}|\end{gathered} \tag{11-62}$$

式中$\hat{\varepsilon}_{JMN}$为三指标置换符号，N_{MJ}是矩阵$\boldsymbol{\Pi}$ 中元素 Π_{MJ} 的代数余子式，$|\Pi_{KM}|$表示 Π_{KM}的行列式。对于一般情形，可把广义本征应变和广义位移表示为 Fourier 积分的形式

$$\begin{gathered}Z_{Kl}^*(\boldsymbol{x})=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{Z}_{Kl}^*(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{d}\xi,\quad \overline{Z}_{Kl}^*(\xi)=\frac{1}{2\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty}Z_{Kl}^*(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\\ U_K(\boldsymbol{x})=\int_{-\infty}^{\infty}\overline{U}_K(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{d}\xi,\quad \overline{U}_K(\xi)=\frac{1}{2\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty}U_K(\boldsymbol{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\xi\cdot\boldsymbol{x}}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\end{gathered} \tag{11-63}$$

类似于纯弹性情形，把式(11-63)代入平衡方程式(11-58)，利用式(11-62)，可得

$$U_M(\boldsymbol{x}) = -\mathrm{i}\int_{-\infty}^{\infty} E_{iJKl}\,\overline{Z}^*_{Kl}\xi_i N_{MJ}(\xi)D^{-1}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot x}\mathrm{d}\xi$$

或

$$U_M(\boldsymbol{x}) = -\int_{-\infty}^{\infty} E_{iJKl}Z^*_{Kl}(\boldsymbol{x}')G_{MJ,i}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\mathrm{d}\boldsymbol{x}' \tag{11-64}$$

$$G_{MJ}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = \frac{1}{2\pi^3}\int_{-\infty}^{\infty} N_{MJ}(\xi)D^{-1}(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\xi\cdot(x-x')}\mathrm{d}\xi$$

式中 $G_{MJ,i}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = \partial G_{MJ}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')/\partial x_i = -\partial G_{MJ}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')/\partial x'_i$。

3) Radon 积分变换方法

Radon 积分变换方法在图形重建,医学中的 CT 分析等,得到广泛应用。Deeg[194]、Dunn[196]和 Dunn 和 Taya[197]指出,电弹性 Green 函数 $G_{IJ}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$同样可以通过对式(11-59)作 Radon 积分变换得到。$G_{IJ}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$的 Radon 积分变换是

$$\overline{G}_{IJ}(\boldsymbol{\xi},\ \omega-\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}') = \iint_{\xi\cdot x=\omega} G_{IJ}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\mathrm{d}a(\boldsymbol{x}) \tag{11-65a}$$

式中 $\boldsymbol{\xi}$, ω 是变换空间的变量,积分域是二维无限平面 $\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}=\omega$。Radon 积分反变换是

$$G_{IJ}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = \frac{1}{8\pi^2}\iint_{|\xi|=1}\left[\frac{\partial^2\overline{G}_{IJ}(\boldsymbol{\xi},\ \omega-\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}')}{\partial\omega^2}\right]_{\xi\cdot x=\omega}\mathrm{d}a(\boldsymbol{\xi}) \tag{11-65b}$$

式中积分域是单位球 $|\boldsymbol{\xi}|=1$ 的表面。对式(11-59)作 Radon 积分变换并做一些推演后,可得

$$K_{JM}(\boldsymbol{\xi})\frac{\partial^2}{\partial x_k\,\partial x_k}\overline{G}_{MR}(\boldsymbol{\xi},\ \omega-\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}') + \delta_{JR}\delta(\omega-\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{x}') = \boldsymbol{0} \tag{11-66}$$

式中 $K_{JM}(\boldsymbol{\xi}) = E_{iJMn}\xi_i\xi_n$。利用式(11-65b),反演上式并做一些推演后,便得

$$G_{MR}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = \frac{1}{8\pi^2\,|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\,|}\iint_{|\xi|=1} K^{-1}_{MR}(\boldsymbol{\xi})\delta(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{t})\mathrm{d}a(\boldsymbol{\xi}) \tag{11-67}$$

式中 $K_{JM}(\boldsymbol{\xi})K^{-1}_{MR}(\boldsymbol{\xi}) = \delta_{JR}$,$\boldsymbol{t}$ 是 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'$方向的单位矢量。在相互正交的坐标系 $\boldsymbol{t}-\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}$ 中,利用 Dirac delta 函数的性质,Deeg[194]把上式中的积分变换成下述围线积分

$$G_{MR}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = \frac{1}{8\pi^2\,|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\,|}\int_{|\xi|=1} K^{-1}_{MR}(\boldsymbol{\xi})\delta(\boldsymbol{\xi}\cdot\boldsymbol{t})\mathrm{d}a(\boldsymbol{\xi}) \tag{11-68}$$

式中 $|\boldsymbol{z}|=1$ 是垂直于 $\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'$ 的 $\boldsymbol{m}-\boldsymbol{n}$ 平面上的 $|\boldsymbol{\xi}|=1$ 的围线。和 Fourier 变换相比,上式是一个求 Green 函数的较为简便有效的方法。式(11-67)的二阶导数为

$$G_{MR,kl}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = \frac{1}{8\pi^2\,|\,\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\,|}\frac{\partial^2}{\partial x_n\,\partial x_n}\int_{|\xi|=1}\xi_k\xi_l K^{-1}_{MR}(\boldsymbol{\xi})\delta[\boldsymbol{\xi}\cdot(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')]\mathrm{d}a(\boldsymbol{\xi}) \tag{11-69}$$

11.3.2 单个椭球夹质

对于带有半轴长度为 a_1, a_2, a_3 的单个椭球夹质的电介质,可采用 Eshelby 的方法处理。为方便计,坐标轴取成和椭球主轴一致。首先把区域 Ω 中的夹质沿其边界切开,再移开,从而椭球夹质和基体均处在自由状态,在自由状态下便得到椭球夹质无应力时的本征应变 $\boldsymbol{Z}^*$。然

后在椭球夹质的边界上施加广义应力

$$T_J = -\Sigma_{iJ}^* \cdot n_i,\ \Sigma_{iJ}^* = E_{iJMl} Z_{Ml}^* \tag{11-70}$$

再把受力后的椭球夹质放入基体内焊好。这样一来，椭球夹质问题化为在 Ω 内没有本征应变，但在其边界上作用有面力 $-T_J = E_{iJMl} Z_{Ml}^*$ 的问题。

对于椭球夹质，如在 Ω 内 $\Sigma_{iJ}^* = E_{iJMl} Z_{Ml}^*$ 是均匀的，由式(11-64)可推得

$$U_{M,n}(\boldsymbol{x}) = -E_{iJKl} Z_{Kl}^* \iiint_{\Omega} G_{MJ,in}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\mathrm{d}V(\boldsymbol{x}') \tag{11-71}$$

Deeg[194]，Dunn 和 Taya[196]指出，利用式(11-69)，由上式可得

$$U_{M,n}(\boldsymbol{x}) = \frac{a_1 a_2 a_3}{4\pi} E_{iJKl} Z_{Kl}^* \int_{\xi=1} \frac{1}{\alpha^3} \xi_k \xi_l K_{MR}^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \mathrm{d}a(\boldsymbol{\xi}),\ \alpha = \sqrt{a_1^2\xi_1^2 + a_2^2\xi_2^2 + a_3^2\xi_3^2} \tag{11-72}$$

和弹性椭球夹质问题类似，由本征应变引起的椭圆内部点的广义应变是本征应变的线性函数，即

$$\begin{aligned} &Z_{Mn}(\boldsymbol{\xi}) = S_{MnKl} Z_{Kl}^* \\ &S_{MnKl} = \begin{cases} (1/8\pi) E_{iJKl}(I_{MJin} + I_{nJiM}),\ M = 1,\ 2,\ 3 \\ (1/4\pi) E_{iJKl} I_{4Jin},\ M = 4 \end{cases} \\ &I_{MJin} = a_1 a_2 a_3 \int_{|\xi|=1} \frac{1}{\alpha^3} G_{MJin}(\boldsymbol{\xi}) \mathrm{d}a(\boldsymbol{\xi}),\ G_{MJin}(\boldsymbol{\xi}) = \xi_i \xi_n K_{MJ}^{-1}(\boldsymbol{\xi}) \end{aligned} \tag{11-73}$$

式中 S_{MnKl} 称为电弹性 Eshelby 张量[193]，从而求解电弹性 Eshelby 张量 S_{MnKl} 的关键问题便是确定积分 $I_{MJin}(\xi)$。为此，把 $I_{MJin}(\boldsymbol{\xi})$ 变换为更便于计算的形式。引入变换

$$y_i = a_i \xi_i / \alpha,\ i = 1,\ 2,\ 3,\text{对 } i \text{ 不求和} \tag{11-74a}$$

显然 $y_i y_i = 1$。面元 $\mathrm{d}a(\boldsymbol{y})$ 和 $\mathrm{d}a(\boldsymbol{\xi})$ 之间的关系为

$$\mathrm{d}a(\boldsymbol{y}) = (a_1 a_2 a_3 / \alpha^3) \mathrm{d}a(\boldsymbol{\xi}) \tag{11-75}$$

采用上述变换后，式(11-73)变换为

$$S_{MnKl} = \begin{cases} \dfrac{a_1 a_2 a_3}{8\pi} E_{iJKl} \displaystyle\int_{-1}^{1}\int_0^{2\pi} [I_{mJin}(\boldsymbol{\xi}) + I_{nJim}(\boldsymbol{\xi})] \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\xi_3,\ M = 1,\ 2,\ 3 \\ \dfrac{a_1 a_2 a_3}{4\pi} E_{iJKl} \displaystyle\int_{1}^{1}\int_0^{2\pi} I_{4Jin}(\boldsymbol{\xi}) \mathrm{d}\vartheta \mathrm{d}\xi_3,\ M = 4 \end{cases} \tag{11-76}$$

在上式中，$I_{MJin}(\boldsymbol{\xi})$ 是零次齐次函数，所以变换式(11-74a)可改为

$$\xi_i = y_i / a_i,\ i = 1,\ 2,\ 3,\text{对 } i \text{ 不求和} \tag{11-74b}$$

从而 y_1，y_2 可用 y_3 和球坐标中的极角 Θ 表示为

$$y_1 = \sqrt{1-y_3^2}\cos\Theta,\quad y_2 = \sqrt{1-y_3^2}\sin\Theta,\quad y_3 = y_3 \tag{11-77}$$

式(11-76)和(11-77)是计算 Eshelby 张量的较为简单而有效的公式。

11.3.3 横观各向同性介质中单个本征应变椭球的 Eshelby 张量

利用式(4-72b)中的本构关系，和上面诸式，Mikata[198]算得式(11-72)和(11-73)中的 K_{MJ} 为

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{K}=[K_{MJ}]\\
&K_{11}=C_{11}y_1^2+C_{44}y_3^2+\frac{1}{2}(C_{11}-C_{12})y_2^2,\quad K_{12}=\frac{1}{2}(C_{11}+C_{12})y_1y_2\\
&K_{13}=(C_{13}+C_{44})y_3y_1,\quad K_{14}=(e_{15}+e_{31})y_3y_1\\
&K_{22}=\frac{1}{2}(C_{11}-C_{12})y_1^2+C_{11}y_2^2+C_{44}y_3^2,\quad K_{23}=(C_{13}+C_{44})y_2y_3\\
&K_{24}=(e_{15}+e_{31})y_2y_3,\quad K_{33}=C_{44}(y_1^2+y_3^2)+C_{33}y_2^2\\
&K_{34}=e_{15}(y_1^2+y_2^2)+e_{33}y_3^2,\quad K_{44}=-\epsilon_{11}(y_1^2+y_2^2)-\epsilon_{33}y_3^2
\end{aligned}
\tag{11-78}
$$

算出 K_{MJ} 后，I_{MJin} 易于算出。$I_{MJin}(\boldsymbol{\xi})$ 中不为零的只有 I_{1212}，I_{1313}，I_{1314}，I_{2323}，I_{2324} 和 I_{iiMM}(对 i，M 不求和)，对于垂直于 x_3 轴的片状裂纹，只有 I_{33MM}(对 M 不求和)和 I_{3334} 不为零，Eshelby 张量为

$$
\begin{aligned}
&S_{1313}=S_{1331}=S_{3113}=S_{3131}=S_{2323}=S_{2332}=S_{3223}=S_{3232}=1/2\\
&S_{1341}=S_{3141}=S_{2342}=S_{3242}=\frac{e_{15}}{2C_{44}},\quad S_{3311}=S_{3322}=\frac{C_{13}\epsilon_{33}+e_{31}e_{33}}{C_{33}\epsilon_{33}+e_{33}^2}\\
&S_{3333}=S_{4343}=1,\quad S_{4311}=S_{4322}=\frac{C_{13}e_{33}-C_{33}e_{31}}{C_{33}\epsilon_{33}+e_{33}^2},\quad \text{其余 } S_{MJin}=0
\end{aligned}
\tag{11-79}
$$

Mikata[198]还计算了其他一些情况。

11.3.4 椭球夹杂或椭球非均匀体

对于椭球夹杂，许多文献称之为椭球非均匀体(inhomogeneity)，夹杂的材料常数和基体的不同，与弹性夹杂问题类似，在广义外载荷作用下，其解可用等效夹质法处理。设基体中的材料常数为 $E_{iJKl}^{(M)}$，椭球夹杂中的材料常数为 $E_{iJKl}^{(in)}$，无穷远处作用有广义应力 $\Sigma_{Mn}^{(0)}$，显然，当没有椭球非均匀体时，电介质中的广义应力也是 $\Sigma_{Mn}^{(0)}$，对应的应变为 $Z_{Mn}^{(0)}=(E_{iJMn}^{(M)})^{-1}\Sigma_{Mn}^{(0)}$。设因夹杂区域 Ω 存在夹杂而引起的扰动应变为 Z_{Mn}，则基体和夹杂内的广义应力分别为

$$
\Sigma_{iJ}^{(M)}(\boldsymbol{x})=E_{iJMn}^{(M)}[Z_{Mn}^{(0)}+Z_{Mn}(\boldsymbol{x})],\quad \Sigma_{iJ}^{(in)}(\boldsymbol{x})=E_{iJMn}^{(in)}[Z_{Mn}^{(0)}+Z_{Mn}(\boldsymbol{x})]
\tag{11-80}
$$

等效夹质法的核心是令夹杂和基体的材料常数相同，但在夹杂内加入虚拟本征应变 Z_{Mn}^{*}，使

$$
\Sigma_{iJ}^{(in)}(\boldsymbol{x})=E_{iJMn}^{(in)}[Z_{Mn}^{(0)}+Z_{Mn}(\boldsymbol{x})]=E_{iJMn}^{(M)}[Z_{Mn}^{(0)}+Z_{Mn}(\boldsymbol{x})+Z_{Mn}^{*}]
\tag{11-81}
$$

由于在夹质内 $Z_{Mn}(\boldsymbol{x})=S_{MnKl}Z_{Kl}^{*}$，故由上式推出

$$
Z_{Kl}^{*}=[(E_{iJMn}^{(M)}-E_{iJMn}^{(in)})S_{MnKl}+E_{iJKl}^{(M)}]^{-1}(E_{iJMn}^{(in)}-E_{iJMn}^{(M)})Z_{Mn}^{(0)}
\tag{11-82}
$$

因此，只要求出 Z_{Kl}^{*}，便求得了问题的解。关于夹质和夹杂问题的详细研究，请查看有关文献。

11.4 层状压电板的弯曲与振动

11.4.1 基本概念与方程

早期压电调制器是利用上下表面带有压电薄层的层合梁来调控振动，压电薄层沿梁的厚度方向极化，在上下薄层之间施加电压。利用梁的弯曲变形引起压电薄层的变形，通过本构关系产生电压或电流变化，进而通过控制器对结构的工作状态进行调控。随后发展了层状压电板和壳等多种类型的压电器件，并对梁、板和壳等压电元件的振动进行了大量的分析研究[157, 199]，许多工程研究采用类似经典弹性板壳的简化理论，对于较厚的或多层层合梁、板和壳也采用较精确的高阶理论，对于一些很简单的情形，求其精确解，以便评价简单理论的结果。本章仅研究其中的一小部分，有兴趣的读者可阅读相关文献。设层合板由 N 层组成，每层厚 h_i，总厚度为 H，极化沿厚度方向的 x_3 轴，由正交各向异性压电体的本构方程式(4－72)知，Voigt 符号下的 9 个弹性常数为 C_{11}，C_{12}，C_{13}，C_{22}，C_{23}，C_{33}，C_{44}，C_{55}，C_{66}，5 个压电常数为 e_{15}，e_{24}，e_{31}，e_{32}，e_{33}，3 个介电常数为 ϵ_{11}，ϵ_{22}，ϵ_{33}。对于横观各向同性体，材料系数服从关系式(4－72c)。用广义位移表示的正交各向异性材料的广义平衡方程为

$$
\begin{aligned}
&C_{11}u_{1,11}+C_{66}u_{1,22}+C_{55}u_{1,33}+(C_{12}+C_{66})u_{2,12}+(C_{13}+C_{55})u_{3,13}+(e_{15}+e_{31})\varphi_{,13}=0\\
&(C_{12}+C_{66})u_{1,12}+C_{66}u_{2,11}+C_{22}u_{2,22}+C_{44}u_{2,33}+(C_{23}+C_{44})u_{3,23}+(e_{24}+e_{32})\varphi_{,23}=0\\
&(C_{13}+C_{55})u_{1,13}+(C_{23}+C_{44})u_{2,23}+C_{55}u_{3,11}+C_{44}u_{3,22}+C_{33}u_{3,33}+e_{24}\varphi_{,22}+e_{33}\varphi_{,33}=0\\
&(e_{31}+e_{15})u_{1,13}+(e_{32}+e_{24})u_{2,23}+e_{15}u_{3,11}+e_{24}u_{3,22}+e_{33}u_{3,33}-\\
&\quad\epsilon_{11}\varphi_{,11}-\epsilon_{22}\varphi_{,22}-\epsilon_{33}\varphi_{,33}=0
\end{aligned}
\tag{11-83}
$$

对于总体厚度为 H 的长 L，宽 L_2 的 N 层多层压电体，沿厚度方向极化，第 i 层厚 hi，并取厚度方向为整体坐标系的 x_3 轴，x_1，x_2 位于层板的平面内；除去一整体坐标系之外，每层还取一通过层的中面的局部坐标系(x_1，x_2，z_i)，通常假设层间是理想连接，对于从下往上编号的多层板，厚 h_i 的第 i 层和厚 h_{i+1} 的第 $i+1$ 层之间的连接条件是广义位移和广义应力连续(图 11－3)，即

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{U}^{(i)}(x_1,\ x_2,\ h_i/2)&=\boldsymbol{U}^{(i+1)}(x_1,\ x_2,\ -h_{i+1}/2)\\
\boldsymbol{\Sigma}^{(i)}(x_1,\ x_2,\ h_i/2)&=\boldsymbol{\Sigma}^{(i+1)}(x_1,\ x_2,\ -h_{i+1}/2)
\end{aligned}
\tag{11-84}
$$

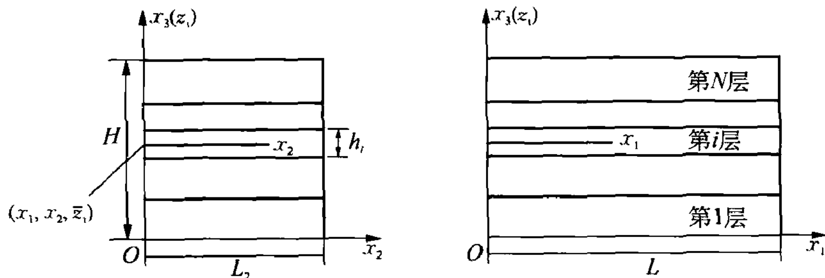


图 11－3 多层压电结构

式中 $i=1\sim(N-1)$。对应每一层均有 8 个连接条件，故对于 N 层的板共有 $8(N-1)$个连接

条件。在底层 1 的下表面（$x_3=-h_1/2$）和顶层 N 的上表面（$x_3=h_N/2$）处，分别给出 4 个外加边界条件，所以总体上给出 $8N$ 个条件，用以确定 $8N$ 个待定量。

11.4.2 正交各向异性多层矩形简支板的弯曲

设矩形板总板厚为 H，两边分别长 L 和 L_2，下表面没有广义载荷，上表面作用广义载荷

$$\begin{aligned}&q(x_1,x_2)=q_0\sin p_1x_1\sin p_2x_2,\quad \varphi(x_1,x_2)=\Phi_0\sin p_1x_1\sin p_2x_2\\&p_1=(n\pi/L),\ p_2=(m\pi/L_2),\ x_3=H\end{aligned}\tag{11-85}$$

对于简支矩形板，略去上标后，Heyliger[200] 取其每一层的解为

$$\begin{aligned}&u_1=u_{10}e^{sx_3}\cos p_1x_1\sin p_2x_2,\quad u_2=u_{20}e^{sx_3}\sin p_1x_1\cos p_2x_2\\&u_3=u_{30}e^{sx_3}\sin p_1x_1\sin p_2x_2,\quad \varphi=\varphi_0e^{sx_3}\sin p_1x_1\sin p_2x_2\end{aligned}\tag{11-86}$$

式中 u_{i0}，φ_0，s 是待定常数。把上式代入广义平衡方程(11-83)，便得

$$\boldsymbol{\Lambda U}=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{U}_0=[u_{10},u_{20},u_{30},\varphi_0]^{\mathrm T},\quad \boldsymbol{\Lambda}=$$

$$\begin{bmatrix}C_{11}p_1^2+C_{66}p_2^2-C_{55}s^2 & (C_{12}+C_{66})p_1p_2 & -(C_{13}+C_{55})p_1s & -(e_{15}+e_{31})p_1s\\(C_{12}+C_{66})p_1p_2 & C_{66}p_1^2+C_{22}p_2^2-C_{44}s^2 & -(C_{23}+C_{44})p_2s & (e_{24}+e_{32})p_2s\\(C_{13}+C_{55})p_1s & (C_{23}+C_{44})p_2s & C_{55}p_1^2+C_{44}p_2^2-C_{33}s^2 & e_{15}p_1^2+e_{24}p_2^2-e_{33}s^2\\(e_{15}+e_{31})p_1s & (e_{24}+e_{32})p_2s & e_{15}p_1^2+e_{24}p_2^2-e_{33}s^2 & -\epsilon_{11}p_1^2-\epsilon_{22}p_2^2+\epsilon_{33}s^2\end{bmatrix}\tag{11-87}$$

要上式有非平凡解，必须行列式 $|\boldsymbol{\Lambda}|=0$，由此可解出 s（本征值），s 有 8 个根，记为 s_j，$j=1\sim8$。对应于每个 s_j，均有一组本征矢量 $\boldsymbol{U}_{0j}$，而 u_{20j}，u_{30j}，φ_{0j} 均可用 u_{10j} 表示。因此每一层有 8 个待定量，它们正好由该层的上、下表面的 8 个连接条件确定；最终剩下的 8 个待定常数由层 1 和层 N 的外表面各自给定的 4 个边界条件确定。具体公式从略。

11.4.3 正交各向异性多层矩形简支板的圆柱弯曲振动

下面讨论正交各向异性多层矩形简支板在（x_2，x_3）平面内的圆柱弯曲振动，设 x_1 方向无限长，所有变量均和 x_1 无关（图 11-3）。令 $u_1=0$，从而按式(11-83)，此时的运动方程为

$$\begin{aligned}&C_{22}u_{2,22}+C_{44}u_{2,33}+(C_{23}+C_{44})u_{3,23}+(e_{24}+e_{32})\varphi_{,23}=\rho u_{2,tt}\\&(C_{23}+C_{44})u_{2,23}+C_{44}u_{3,22}+C_{33}u_{3,33}+e_{24}\varphi_{,22}+e_{33}\varphi_{,33}=\rho u_{3,tt}\\&(e_{32}+e_{24})u_{2,23}+e_{15}u_{3,11}+e_{24}u_{3,22}+e_{33}u_{3,33}-\epsilon_{22}\varphi_{,22}-\epsilon_{33}\varphi_{,33}=0\end{aligned}\tag{11-88}$$

界面连接条件仍是式(11-84)，对于自由振动，第一层的下表面和第 N 层的上表面的机械边界条件均为应力自由，即

$$\sigma_{33}(x_2,h_N/2)=\sigma_{33}(x_2,-h_1/2)=\sigma_{23}(x_2,h_N/2)=\sigma_{23}(x_2,-h_1/2)=0\tag{11-89}$$

电学边界条件存在两种情况：电势为零和法向电位移为零，它们分别是

$$\varphi(x_2,h_N/2)=\varphi(x_2,-h_1/2)=0,\quad 或\ D_3(x_2,h_N/2)=D_3(x_2,-h_1/2)=0\tag{11-90}$$

对于圆柱弯曲振动，其侧面的边界条件是

$$\sigma_{22}(0,\ x_3)=\sigma_{22}(L_2,\ x_3)=0,\quad u_3(0,\ x_3)=u_3(L_2,\ x_3)=0,\quad \varphi(0,\ x_3)=\varphi(L_2,\ x_3)=0 \tag{11-91}$$

由于已令 $u_1=0$，所以现在每一层只有 6 个待定量，且也只有 6 个连接条件，在上、下外表面总共也只有 6 个边界条件，所以问题是适定的，恒满足式(11-91)的解。Heyliger 和 Brooks[201] 取为

$$(u_2,\ u_3,\ \varphi)=(u_{20}\cos px_2,\ u_{30}\sin px_2,\ \varphi_0\sin px_2)e^{sx_3}e^{i\omega t} \tag{11-92}$$

式中 $p=n\pi/L_2$ (图 11-3)。把上式代入运动方程式(11-88)，便得

$$\begin{bmatrix} -C_{22}p^2+C_{44}s^2+\rho\omega^2 & (C_{23}+C_{44})ps & (e_{24}+e_{32})ps \\ -(C_{23}+C_{44})ps & -C_{44}p^2+C_{33}s^2+\rho\omega^2 & -e_{24}p^2+e_{33}s^2 \\ -(e_{32}+e_{24})ps & -e_{24}p^2+e_{33}s^2 & \epsilon_{22}p^2-\epsilon_{33}s^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_{20} \\ u_{30} \\ \varphi_0 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{11-93}$$

要上式有非平凡解，必须让其系数行列式为零，由此可解出 s(本征值)，s 有 6 个根，记为 s_j，$j=1\sim 6$。对应于每个 s_j，均有一组本征矢量 $\boldsymbol{U}_{0j}$，而 u_{20j}，u_{30j}，φ_{0j} 均可用 u_{10j} 表示。因此每一层有 6 个待定量，它们正好由该层的上、下表面的 6 个连接条件确定；因为层 1 和层 N 的外表面的边界条件都是零，所以最终剩下的 6 个待定常数需要满足 6 个齐次方程，其系数行列式为零的条件组成确定自振频率的方程。具体公式从略。

11.5 中等厚度板的高阶近似方程

11.5.1 中等厚度板弯曲的 Mindlin 型方程

本节讨论正交各向异性中等厚度板弯曲问题，假设(x_1，x_2)取在板的中面上，x_3 沿板中面的法线。由于是中等厚度板，特别是薄板，设沿厚度方向的应力 σ_{33} 可以忽略，因此只讨论 5 个应力分量，本构方程式(4-72)可以简化为

$$\begin{aligned} &\sigma_1=\sigma_{11}=\overline{C}_{11}u_{1,1}+\overline{C}_{12}u_{2,2}+\overline{e}_{31}\varphi_{,3},\quad \sigma_2=\sigma_{22}=\overline{C}_{12}u_{1,1}+\overline{C}_{22}u_{2,2}+\overline{e}_{32}\varphi_{,3} \\ &\sigma_4=\sigma_{23}=\overline{C}_{44}(u_{2,3}+u_{3,2})+\overline{e}_{24}\varphi_{,2},\quad \sigma_5=\sigma_{31}=\overline{C}_{55}(u_{1,3}+u_{3,1})+\overline{e}_{15}\varphi_{,1} \\ &\sigma_6=\sigma_{12}=\overline{C}_{66}(u_{2,1}+u_{1,2}),\quad D_1=\overline{e}_{15}(u_{1,3}+u_{3,1})-\overline{\epsilon}_{11}\varphi_{,1} \\ &D_2=\overline{e}_{24}(u_{2,3}+u_{3,2})-\overline{\epsilon}_{22}\varphi_{,1},\quad D_3=\overline{e}_{31}u_{1,1}+\overline{e}_{32}u_{2,2}-\overline{\epsilon}_{33}\varphi_{,3} \end{aligned} \tag{11-94}$$

式中带“－”的系数，是消去 $u_{3,3}$ 后的折算材料系数，它们是

$$\overline{C}_{ij}=C_{ij}-\frac{C_{i3}C_{j3}}{C_{33}},\quad \overline{e}_{ij}=e_{ij}-\frac{e_{33}C_{ji}}{C_{33}},\quad \overline{\epsilon}_{ij}=\epsilon_{ij}-\frac{e_{ij}e_{ij}}{C_{33}} \tag{11-95}$$

下面讨论多层板，我们希望通过等效的办法，把多层板等效为单层板研究。上式表示的折算材料系数只有 13 个。设变形后中面法线仍保持为直线，但不再垂直于中面，相对于 x_2 和 $-x_1$ 轴分别旋转了一个角度 ψ_1 和 ψ_2；设中面上点的位移为 $u_i^0(x_1,\ x_2)$，则变形后等效板中任一点的位移和应变可以写成

$$u_1 = u_1^0 + x_3\psi_1,\quad u_2 = u_2^0 + x_3\psi_2,\quad u_3 = u_3^0$$
$$\varepsilon_{11} = u_{1,1}^0 + x_3\psi_{1,1},\quad \varepsilon_{22} = u_{2,2}^0 + x_3\psi_{2,2},\quad \gamma_{23} = u_{3,2}^0 + \psi_2 \tag{11-96}$$
$$\gamma_{13} = u_{3,1}^0 + \psi_1,\quad \gamma_{12} = u_{1,2}^0 + u_{2,1}^0 + x_3(\psi_{1,2} + \psi_{2,1})$$

把式(11－96)代入(11－94)并沿厚度积分，便得等效压电板的合力和合力矩的本构方程

$$\begin{Bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_{12} \\ M_1 \\ M_2 \\ M_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & 0 & D_{11} & D_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 & D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1,1}^0 \\ u_{2,2}^0 \\ u_{1,2}^0 + u_{2,1}^0 \\ \psi_{1,1} \\ \psi_{2,2} \\ \psi_{1,2} + \psi_{2,1} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_{1e} \\ N_{2e} \\ N_{12e} \\ M_{1e} \\ M_{2e} \\ M_{12e} \end{Bmatrix} \tag{11-97}$$

$$\begin{Bmatrix} q_2 \\ q_1 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{44} & 0 \\ 0 & S_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} q_{2e} \\ q_{1e} \end{Bmatrix}$$

式中 N_1，N_2，N_{12} 为薄膜力，M_1，M_2，M_{12} 为中面力矩，q_1，q_2 为切力，广义刚度为

$$(A_{ij},\ B_{ij},\ D_{ij}) = \sum_{k=1}^{N} \int_{h_k} \overline{C}_{ij}^{(k)} (1,\ x_3,\ x_3^2) \mathrm{d}x_3,\quad S_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \int_{h_k} \Phi_{6-i}\Phi_{6-j}\, \overline{C}_{ij}^{(k)} \mathrm{d}x_3$$

$$\begin{Bmatrix} N_{1e} & M_{1e} \\ N_{2e} & M_{2e} \\ N_{12e} & M_{12e} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \int_{h_k} \begin{Bmatrix} \overline{e}_{31}^{(k)} \\ \overline{e}_{32}^{(k)} \\ 0 \end{Bmatrix} E_3^{(k)} (1,\ x_3) \mathrm{d}x_3,\quad \begin{Bmatrix} q_{1e} \\ q_{2e} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^{N} \int_{h_k} \begin{Bmatrix} \Phi_1^2\, \overline{e}_{24}^{(k)} E_1^{(k)} \\ \Phi_2^2\, \overline{e}_{15}^{(k)} E_2^{(k)} \end{Bmatrix} \mathrm{d}x_3 \tag{11-98}$$

式中 Φ_{6-i}，Φ_{6-j} 为剪切因子，N_{1e}，M_{1e}，N_{2e}，M_{2e}，N_{12e}，M_{12e}，q_{1e}，q_{2e} 为压电性质引起的量。

对于电学量，通常采用分层研究后叠加的方法，对每一层，通常考虑以下两种电学边界条件：

(1) 电学开路。给定每层上下边的面电荷密度 $\sigma^{(i)}$。通常认为电位移的面内分量 $D_1^{(i)}$ 和 $D_2^{(i)}$ 是次要量，可以略去，只保留分量 $D_3^{(i)}$，从而由 Gauss 定律 $D_{j,j}^{(i)}=0$ 推知 $D_{3,3}^{(i)}=0$，所以电位移分量 $D_3^{(i)}$ 沿厚度方向均匀分布

$$D_j^{(i)} n_j = D_3^{(i)} = -\sigma^{(i)},\quad E_3^{(i)} = -\sigma^{(i)} / \overline{\epsilon}_{33}^{(i)} \tag{11-99}$$

(2) 电学短路。给定各层上下边的电势 $V^{(i)}$，为使问题简化，假设电势在层内均匀分布，且进一步假设电场的面内分量 $E_1^{(i)}$ 和 $E_2^{(i)}$ 可以略去，只保留分量 $E_3^{(i)}$

$$E_3^{(i)} = V^{(i)}/h_i,\quad D_3^{(i)} = \overline{\epsilon}_{33}^{(i)} V^{(i)}/h_i \tag{11-100}$$

在这些近似计算中，应变对电场或电位移的影响已经略去。

等效单层板的 Mindlin 理论中的运动方程是

$$\rho_0\, \ddot{u}_1^0 + \rho_1\, \ddot{\psi}_1 = N_{1,1} + N_{12,2},\quad \rho_0\, \ddot{u}_2^0 + \rho_1\, \ddot{\psi}_2 = N_{2,2} + N_{12,1},\quad \rho_0\, \ddot{u}_3^0 = q_{1,1} + q_{2,2} + p$$
$$\rho_1\, \ddot{u}_1^0 + \rho_2\, \ddot{\psi}_1 = M_{1,1} + M_{12,2} - q_1,\quad \rho_1\, \ddot{u}_2^0 + \rho_2\, \ddot{\psi}_2 = M_{2,2} + M_{12,1} - q_2 \tag{11-101}$$

上式的前三式是动量方程，后两式是动量矩方程，p 是横向外载荷。式中

$$(\rho_0,\ \rho_1,\ \rho_2) = \sum_{k=1}^{N} \int_{h_k} \rho^{(k)} (1,\ x_3,\ x_3^2) \mathrm{d}x_3 \tag{11-102}$$

式(11-96)～(11-102)组成完整的微分方程组。对于由横观各向同性材料构成的对称配置的多层板，板的弯曲和拉伸变形是解耦的，此时存在关系式(4-72c)，从而有

$$\begin{aligned}&\overline{C}_{11}=\overline{C}_{22},\quad \overline{C}_{44}=\overline{C}_{55},\quad \overline{C}_{66}=\frac{1}{2}(\overline{C}_{11}-\overline{C}_{12});\quad \overline{e}_{31}=\overline{e}_{32},\quad \overline{e}_{15}=\overline{e}_{24};\quad \overline{\epsilon}_{11}=\epsilon_{22}\\&D_{11}=D_{22},\quad D_{66}=(D_{11}-D_{12})/2;\quad S_{44}=S_{55};\quad M_{1e}=M_{2e}\end{aligned}\tag{11-103}$$

若从式(11-97)和(11-101)中消去截面转动 ψ_1 和 ψ_2，对弯曲振动便得到 u_3^0 的四阶方程

$$\begin{aligned}&D_{11}\nabla^2\nabla^2u_3^0-[(D_{11}/S_{44})\rho_0+\rho_2]\nabla^2\ddot{u}_3^0+\rho_0\ddot{u}_3^0+(\rho_0\rho_2/S_{44})\ddot{\ddot{u}}_3^0=\\&\quad p-(D_{11}/S_{44})\nabla^2p+(\rho_2/S_{44})\ddot{p}-\nabla^2M_{1e}\end{aligned}\tag{11-104}$$

式中 $\nabla^2u_3^0=u_{3,11}^0+u_{3,22}^0$，$\ddot{\ddot{u}}_3^0=\partial^4u_3^0/\partial t^4$。当外加广义载荷为 $p=p_0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，$M_{1e}=M_{10e}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 时，以之代入式(11-104)，并令 $u_3^0=w^0\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$，消去公共因子 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}$ 后，便得弯曲振动方程

$$\begin{aligned}&D_{11}\nabla^2\nabla^2w^0+[(D_{11}/S_{44})\rho_0+\rho_2]\omega^2\nabla^2w^0-\rho_0\omega^2[1-(\rho_2/S_{44})\omega^2]w^0=\\&\quad p_0[1-(\rho_2/S_{44})\omega^2]-\nabla^2[(D_{11}/S_{44})p_0+M_{10e}]\end{aligned}\tag{11-105}$$

Krommer 和 Irschik[202] 讨论了更一般的热释电材料，并力图考虑应变对电场或电位移的影响。在他们的研究中，把电场和温度引起的应变称为本征应变，分开单独写，有兴趣的读者可参考该文进一步研究。

11.5.2 三阶剪切变形理论

以下讨论等温线性压电材料，故 Maxwell 应力和环境都不予考虑。第 3 章和第 10 章详细地讨论了各种变分理论，本节取由式(3-49)中 $\delta\Pi_{g1}$ 表示的变分原理。不计体积力和体电荷时，动力学的变分方程为

$$\delta\Pi_{g1}=\int_V\sigma_{ik}\delta u_{i,k}\mathrm{d}V+\int_VD_k\delta\varphi_{,k}\mathrm{d}V+\int_V\rho\ddot{u}_k\delta u_k\mathrm{d}V-\int_{a_\sigma}T_k^*\delta u_k\mathrm{d}a+\int_{a_p}\sigma^*\delta\varphi\mathrm{d}a=0\tag{11-106}$$

对正交各向异性中等厚度板，Mitchell 和 Reddy[203] 取等效单层板的近似位移为

$$\begin{aligned}&u_1=u_1^0(x_1,x_2,t)+\eta_1(x_3)\psi_1(x_1,x_2,t)-\eta_2(x_3)u_{3,1}^0(x_1,x_2,t)\\&u_2=u_2^0(x_1,x_2,t)+\eta_1(x_3)\psi_2(x_1,x_2,t)-\eta_2(x_3)u_{3,2}^0\\&u_3=u_3^0(x_1,x_2)\\&\eta_1(x_3)=x_3-cx_3^3,\ \eta_2(x_3)=cx_3^3,\ c=4/3H^2\end{aligned}\tag{11-107}$$

式中(u_1^0, u_2^0, u_3^0)是中面位移，(ψ_1, ψ_2)分别为绕 x_2 和 $-x_1$ 轴的转动，x_3 从中面算起，和式(11-107)对应的应变是

$$\begin{aligned}&\varepsilon_{11}=u_{1,1}^0+\eta_1\psi_{1,1}-\eta_2u_{3,11}^0,\quad \varepsilon_{22}=u_{2,2}^0+\eta_1\psi_{2,2}-\eta_2u_{3,22}^0,\quad \varepsilon_{33}=0\\&\gamma_{23}=u_{2,3}+u_{3,2}=\eta_{1,3}\psi_2-\eta_{2,3}u_{3,2}^0+u_{3,2}^0,\quad \gamma_{31}=u_{1,3}+u_{3,1}=\eta_{1,3}\psi_1-\eta_{2,3}u_{3,1}^0+u_{3,1}^0\\&\gamma_{12}=u_{1,2}+u_{2,1}=(u_{1,2}^0+u_{2,1}^0)+\eta_1(\psi_{1,2}+\psi_{2,1})-\eta_2(u_{3,12}^0+u_{3,21}^0)\end{aligned}\tag{11-108}$$

由式(11-107)和(11-108)知，给出的 $\eta_1(x_3)$，$\eta_2(x_3)$使横向切应变 γ_{13}，γ_{23}在板的上、下表面

为零，在厚度方向按 x_3 的 2 次方变化，同时没有沿厚度方向的法向应变。电势按分层离散的形式给出较为方便，每层厚 h_i，多层板总厚度为 H，设电势分布为

$$\varphi(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{k-1}^{N} \sum_{j-1}^{m} f_k(x_3)\varphi^{(k,j)}(x_1, x_2, t) \tag{11-109}$$

上式表示多层板共有 N 层，每层中有 m 个插点；在第 k 层第 j 个插点的电势为 $\varphi^{(k,j)}$。其中 $f_k(x_3)$ 根据具体情况设定。但要注意，第 $k-1$ 层上表面的电荷要等于第 k 层下表面的电荷。

把式(11-107)和(11-109)代入式(11-106)，并忽略 σ_{33}，从而得到以下各项变分。

机械能变分：

$$\begin{aligned}\int_V \sigma_{ik}\delta u_{i,k}\mathrm{d}V =& \int_A \{(N_1\delta u_{1,1}^0 + M_1\delta\psi_{1,1} - P_1\delta u_{3,11}^0) + (N_2\delta u_{2,2}^0 + M_2\delta\psi_{2,2} - P_2\delta u_{3,22}^0) + \\ &[N_6(\delta u_{1,2}^0 + \delta u_{2,1}^0) + M_6(\delta\psi_{1,2} + \delta\psi_{2,1}) - 2P_6\delta u_{3,12}^0] + \\ &Q_4(\delta\psi_2 + \delta u_{3,2}^0) + Q_5(\delta\psi_1 + \delta u_{3,1}^0)\}\mathrm{d}A = \\ -&\int_A [(N_{1,1}\delta u_1^0 + M_{1,1}\delta\psi_1 - P_{1,11}\delta u_3^0) + (N_{2,2}\delta u_2^0 + M_{2,2}\delta\psi_2 - P_{2,22}\delta u_3^0) + \\ &(N_{6,2}\delta u_1^0 + N_{6,1}\delta u_2^0 + M_{6,2}\delta\psi_1 + M_{6,1}\delta\psi_2 - 2P_{6,12}\delta u_3^0) + (Q_4\delta\psi_2 - Q_{4,2}\delta u_3^0) + \\ &(Q_5\delta\psi_1 - Q_{5,1}\delta u_3^0)]\mathrm{d}A + \int_L \{[N_1\delta u_1^0 + M_1\delta\psi_1 - (P_1\delta u_{3,1}^0 - P_{1,1}\delta u_3^0)]n_1 + \\ &[N_2\delta u_2^0 + M_2\delta\psi_2 - (P_2\delta u_{3,2}^0 - P_{2,2}\delta u_3^0)]n_2 + (N_6\delta u_2^0 + M_6\delta\psi_2)n_1 + \\ &(N_6\delta u_1^0 + M_6\delta\psi_1)n_2 - [P_6\delta u_{3,2}^0 n_1 + P_6\delta u_{3,1}^0 n_2 - (P_{6,1}n_2 + P_{6,2}n_1)\delta u_3^0] + \\ &(Q_4 n_2 + Q_5 n_1)\delta u_3^0\}\mathrm{d}L\end{aligned} \tag{11-110}$$

式中

$$\begin{aligned}&N_i = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_i\mathrm{d}x_3,\ M_i = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_i\eta_1\mathrm{d}x_3,\ P_i = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_i\eta_2\mathrm{d}x_3,\ i = 1, 2, 6 \\ &Q_i = \int_{-h/2}^{h/2}\sigma_i[1 - 4(z/H)^2]\mathrm{d}x_3,\ i = 4, 5\end{aligned} \tag{11-111}$$

电能变分：

$$\begin{aligned}\int_V D_i\delta\varphi_{,i}\mathrm{d}V =& \sum_{k=1}^{N}\int_A \sum_{j=1}^{m}(D_\alpha^{(k,j)}\delta\varphi_{,\alpha}^{(k,j)} + D_3^{(k,j)}\delta\varphi_{,3}^{(k,j)})\mathrm{d}V = \\ &-\sum_{k=1}^{N}\Big[\int_A \sum_{j=1}^{m}(P_{\alpha,\alpha}^{(k,j)} - G_3^{(k,j)})\delta\varphi^{(k,j)}\mathrm{d}A + \int_L \sum_{j-1}^{m} P_\alpha^{(k,j)} n_\alpha\delta\varphi^{(k,j)}\mathrm{d}L\Big] \\ P_\alpha^{(k,j)} =& \int_{h_{j-1}}^{h_j} D_\alpha f_k(x_3)\mathrm{d}x_3,\ G_3^{(k,j)} = \int_{h_{j-1}}^{h_j} D_3 f_{k,3}(x_3)\mathrm{d}x_3\end{aligned} \tag{11-112}$$

惯性力项变分：

$$\begin{aligned}\int_V \rho\ddot{u}_i\delta u_i\mathrm{d}V = \int_A\{&(I_1\ddot{u}_1^0 + I_2\ddot{\psi}_1 - I_3\ddot{u}_{3,1}^0)\delta u_1^0 + (I_2\ddot{u}_1^0 + I_4\ddot{\psi}_1 - I_5\ddot{u}_{3,1}^0)\delta\psi_1 + \\ &[(I_3\ddot{u}_1^0 + I_5\ddot{\psi}_1 - I_6\ddot{u}_{3,1}^0)_{,1} + (I_3\ddot{u}_2^0 + I_5\ddot{\psi}_2 - I_6\ddot{u}_{3,2}^0)_{,2} + I_1\ddot{u}_3^0]\delta u_3^0 + \\ &[(I_1\ddot{u}_2^0 + I_2\ddot{\psi}_2 - I_3\ddot{u}_{3,2}^0)\delta u_2^0 + (I_2\ddot{u}_2^0 + I_4\ddot{\psi}_2 - I_5\ddot{u}_{3,2}^0)\delta\psi_2]\}\mathrm{d}A\end{aligned} \tag{11-113}$$

式中

$$I_1=\int_{-h/2}^{h/2}\rho\mathrm{d}x_3,\ I_3=\int_{-h/2}^{h/2}\rho\eta_2(x_3)\mathrm{d}x_3,\ I_5=\int_{-h/2}^{h/2}\rho\eta_1(x_3)\eta_2(x_3)\mathrm{d}x_3$$
$$I_2=\int_{-h/2}^{h/2}\rho\eta_1(x_3)\mathrm{d}x_3,\ I_4=\int_{-h/2}^{h/2}\rho\eta_1^2(x_3)\mathrm{d}x_3,\ I_6=\int_{-h/2}^{h/2}\rho\eta_2^2(x_3)\mathrm{d}x_3 \tag{11-114}$$

外力功变分：对于机械力，等效单层板的外表面要分成两个部分分别研究：A 为板的中面，T_i^* 是转换到中面上单位面积上的面力，a 为板的端面，t_i^* 为端面上的合力。对于电载荷，多层板的每层要分成两个部分分别研究：每层的中表面和每层的端面，$\sigma^{(k)*}$ 为第 k 层的面电荷密度，$q^{(k)*}$ 为第 k 层端面的面电荷。所以有

$$-\int_{a_\sigma}T_k^*\delta u_k\mathrm{d}a+\int_{a_p}\sigma^*\delta\varphi\mathrm{d}a=-\int_A(T_1^*\delta u_1^0+T_2^*\delta u_2^0+T_3^*\delta u_3^0)\mathrm{d}A-$$
$$\int_L(t_1^*\delta u_1^0+t_2^*\delta u_2^0+t_3^*\delta u_3^0)\mathrm{d}L+\sum_{k=1}^{N}\left(\int_A\sigma^{(k)*}f_j\delta\varphi_j\mathrm{d}A+\int_L q^{(k)*}f_j\delta\varphi_j\mathrm{d}L\right) \tag{11-115}$$

把式(11－109)～(11－115)代入(11－106)，由变分方程得场方程

$$\begin{aligned}
&\delta u_{10}:N_{1,1}+N_{6,2}+T_1^*=I_1\ddot{u}_1^0+I_2\ddot{\psi}_1-I_3\ddot{u}_{3,1}^0\\
&\delta u_{20}:N_{2,2}+N_{6,1}+T_2^*=I_1\ddot{u}_2^0+I_2\ddot{\psi}_2-I_3\ddot{u}_{3,2}^0\\
&\delta u_{30}:P_{1,11}+P_{2,22}+2P_{6,12}+Q_{4,2}+Q_{5,1}-T_3^*=\\
&\quad(I_3\ddot{u}_1^0+I_5\ddot{\psi}_1-I_6\ddot{u}_{3,1}^0)_{,1}+(I_3\ddot{u}_2^0+I_5\ddot{\psi}_2-I_6\ddot{u}_{3,2}^0)_{,2}+I_1\ddot{u}_3^0\\
&\delta\psi_1:M_{1,1}+M_{6,2}-Q_5=I_2\ddot{u}_1^0+I_4\ddot{\psi}_1-I_5\ddot{u}_{3,1}^0\\
&\delta\psi_2:M_{2,2}+M_{6,1}-Q_4=I_2\ddot{u}_2^0+I_4\ddot{\psi}_2-I_5\ddot{u}_{3,2}^0\\
&\delta\varphi^{(k,j)}:\sum_{j=1}^{m}(P_{\alpha,\alpha}^{(k,j)}-G_3^{(k,j)})=\sigma^{(j)*}f_j
\end{aligned} \tag{11-116}$$

自然边界条件为

$$\begin{aligned}
&\delta u_1^0:N_1n_1+N_6n_2+t_1^*=0,\quad \delta u_2^0:N_2n_2+N_6n_1+t_2^*=0\\
&\delta u_3^0:P_{1,1}n_1+P_{2,2}n_2+P_{6,1}n_2+P_{6,2}n+Q_4n_2+Q_5n_1+t_3^*=0\\
&\delta\psi_1:M_1n_1+M_6n_2=0,\quad \delta\psi_2:M_2n_2+M_6n_1=0\\
&\delta u_{3,1}^0:P_1n_1+P_6n_2=0,\quad \delta u_{3,2}^0:P_2n_2+P_6n_1=0\\
&\delta\varphi_j^{(k)}:\sum_{j-1}^{m}P_\alpha^{(j,k)}n_\alpha-q^{(k)*}f_j(x_3)=0
\end{aligned} \tag{11-117a}$$

在给定位移边界上有

$$\delta u_1^0=\delta u_2^0=\delta u_3^0=\delta u_{3,1}^0=\delta u_{3,2}^0=\delta\psi_1=\delta\psi_2=0 \tag{11-117b}$$

Mitchell 和 Reddy[203]采用 Hamilton 原理(即式(3－64)中的 δH_1)推导相关公式，有关动能部分的变分显得很复杂，本处采用物理变分原理，惯性力部分的变分较为简单。根据具体情况，上列诸公式可简化。

利用式(11－111)和正交各向异性材料的本构关系式(11－94)，可求出广义力的表达式。由于和压电效应相关的量和纯弹性量之间，表达形式差异较大，分开写有一定好处，即令[203]

$$N_i=\overline{N}_i+N_i^{(p)},\quad M_i=\overline{M}_i+M_i^{(p)},\quad P_i=\overline{P}_i+P_i^{(p)},\quad Q_i=\overline{Q}_i+Q_i^{(p)} \tag{11-118a}$$

式中各量含上短横“—”的量表示纯弹性量，含上标“p”的量表示和压电效应相关的量。其中

$$\begin{Bmatrix}\overline{N}_1\\ \overline{N}_2\\ \overline{N}_3\\ \overline{M}_1\\ \overline{M}_2\\ \overline{M}_3\\ \overline{P}_1\\ \overline{P}_2\\ \overline{P}_3\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11}&A_{12}&0&A_{11}^{*}&A_{12}^{*}&0&A_{11}^{**}&A_{12}^{**}&0\\ A_{12}&A_{22}&0&A_{12}^{*}&A_{22}^{*}&0&A_{12}^{**}&A_{22}^{**}&0\\ 0&0&A_{66}&0&0&A_{66}^{*}&0&0&A_{66}^{**}\\ A_{11}^{*}&A_{12}^{*}&0&B_{11}&B_{12}&0&B_{11}^{*}&B_{12}^{*}&0\\ A_{12}^{*}&A_{22}^{*}&0&B_{12}&B_{22}&0&B_{12}^{*}&B_{22}^{*}&0\\ 0&0&A_{66}^{*}&0&0&B_{66}&0&0&B_{66}^{*}\\ A_{11}^{**}&A_{12}^{**}&0&B_{11}^{*}&B_{12}^{*}&0&D_{11}&D_{12}&0\\ A_{12}^{**}&A_{22}^{**}&0&B_{12}^{*}&B_{22}^{*}&0&D_{12}&D_{22}&0\\ 0&0&A_{66}^{**}&0&0&B_{66}^{*}&0&0&D_{66}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}u_{1,1}^{0}\\ u_{2,2}^{0}\\ u_{1,2}^{0}+u_{2,1}^{0}\\ \psi_{1,1}\\ \psi_{2,2}\\ \psi_{1,2}+\psi_{2,1}\\ -u_{3,11}^{0}\\ -u_{3,22}^{0}\\ -2u_{3,12}^{0}\end{Bmatrix} \tag{11-118b}$$

$$\begin{Bmatrix}\overline{Q}_4\\ \overline{Q}_5\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}F_{44}&0\\ 0&F_{55}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\psi_2+u_{30,2}\\ \psi_1+u_{30,1}\end{Bmatrix} \tag{11-118c}$$

$$\begin{aligned}
&N_1^{(p)}=\sum_{k=1}^{N}e_{31}^{(k)}\sum_{j=1}^{m}\beta_1^{(k,j)}\varphi^{(k,j)},\quad N_2^{(p)}=\sum_{k=1}^{N}e_{32}^{(k)}\sum_{j=1}^{m}\beta_1^{(k,j)}\varphi^{(k,j)},\quad N_6^{(p)}=0\\
&M_1^{(p)}=\sum_{k=1}^{N}e_{31}^{(k)}\sum_{j=1}^{m}\beta_2^{(k,j)}\varphi^{(k,j)},\quad M_2^{(p)}=\sum_{k=1}^{N}e_{32}^{(k)}\sum_{j=1}^{m}\beta_2^{(k,j)}\varphi^{(k,j)},\quad M_6^{(p)}=0\\
&P_1^{(p)}=\sum_{k=1}^{N}e_{31}^{(k)}\sum_{j=1}^{m}\beta_3^{(k,j)}\varphi^{(k,j)},\quad P_2^{(p)}=\sum_{k=1}^{N}e_{32}^{(k)}\sum_{j=1}^{m}\beta_3^{(k,j)}\varphi^{(k,j)},\quad P_6^{(p)}=0\\
&Q_4^{(p)}=\sum_{k=1}^{N}e_{24}^{(k)}\sum_{j=1}^{m}\beta_4^{(k,j)}\partial\varphi^{(k,j)}/\partial x_2,\quad Q_5^{(p)}=\sum_{k=1}^{N}e_{15}^{(k)}\sum_{j=1}^{m}\beta_4^{(k,j)}\partial\varphi^{(k,j)}/\partial x_1
\end{aligned} \tag{11-118d}$$

式中

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{A}^{(k)}=\int_{-h_k/2}^{h_k/2}\boldsymbol{C}\mathrm{d}x_3,\ \boldsymbol{A}^{(k)*}=\int_{-h_k/2}^{h_k/2}\boldsymbol{C}\eta_1\mathrm{d}x_3,\ \boldsymbol{A}^{(k)**}=\int_{-h_k/2}^{h_k/2}\boldsymbol{C}\eta_2\mathrm{d}x_3,\ \boldsymbol{B}^{(k)}=\int_{-h_k/2}^{h_k/2}\boldsymbol{C}\eta_1^2\mathrm{d}x_3\\
&\boldsymbol{B}^{(k)*}=\int_{-h_k/2}^{h_k/2}\boldsymbol{C}\eta_1\eta_2\mathrm{d}x_3,\ \boldsymbol{D}=\int_{-h_k/2}^{h_k/2}\boldsymbol{C}\eta_2^2\mathrm{d}x_3,\ F_{44}=\int_{-h_k/2}^{h_k/2}C_{44}\eta_{1,3}^2\mathrm{d}x_3\\
&F_{55}=\int_{-h_k/2}^{h_k/2}C_{55}\eta_{1,3}^2\mathrm{d}x_3,\ \beta_1^{(k,j)}=\int_{-h_k/2}^{h_k/2}f_{j,3}\mathrm{d}x_3,\ \beta_2^{(k,j)}=\int_{-h_k/2}^{h_k/2}\eta_1 f_{j,3}\mathrm{d}x_3\\
&\beta_3^{(k,j)}=\int_{-h_k/2}^{h_k/2}\eta_2 f_{j,3}\mathrm{d}x_3,\ \beta_4^{(k,j)}=\int_{-h_k/2}^{h_k/2}\eta_{1,3}f_j\mathrm{d}x_3,\ \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}\overline{C}_{11}&\overline{C}_{12}&0\\ \overline{C}_{21}&\overline{C}_{22}&0\\ 0&0&\overline{C}_{66}\end{bmatrix}\\
&(\boldsymbol{A},\boldsymbol{A}^{*},\boldsymbol{A}^{**},\boldsymbol{B},\boldsymbol{B}^{*})=\sum_{k=1}^{N}(\boldsymbol{A}^{(k)},\boldsymbol{A}^{(k)*},\boldsymbol{A}^{(k)**},\boldsymbol{B}^{(k)},\boldsymbol{B}^{(k)*})
\end{aligned} \tag{11-119}$$

式(11-116)～式(11-119)组成完整的控制方程组。

11.6 压电复合梁的近似方程

11.6.1 Bernoulli－Euler梁弯曲的基本理论

图 11－4 为一长 $2L$ 的压电传感器示意图，图(a)由基体梁、上下粘结层和上下压电陶瓷片组成。x_1 轴沿纵向，x_3 轴沿厚度方向。通常基体厚约为 1 mm 量级，粘结层厚约 0.1～0.3 mm 量级，压电陶瓷片厚约 0.2 mm 量级，压电层的上下表面沉积金属电极，外电源接通电极后，产生厚度方向的作用力，引起梁变形；反之，在机械载荷作用下，梁的变形将在压电陶瓷片内产生电荷，可从电极引出，作为控制信号。上下压电层的电场方向相同，将引起梁的弯曲，上下压电层的电场方向相反，将引起梁的拉伸；图(b)为压电层埋入基体梁中的传感器。已有大量文献讨论压电器件的工程控制理论[204～206]。通常假设压电复合梁弯曲时，产生单轴变形，基体梁按 Bernoulli－Euler 假设变形，应力沿厚度线性分布，在任何机械载荷作用下，复合梁或带有压电片梁的变形和应力分析可按通常材料力学方法进行，本处只对因压电片引起的变形作较为详细的研究。Crawley 和 Luis[207]和 Grawley 和 Lazarus[208]假设压电层均匀变形，应力沿其厚度均匀分布；基体梁视情况可以是弯曲变形或拉伸变形；粘结层只有剪切变形 γ 和切应力 τ，从基体梁的变形过渡到压电层的变形，即有

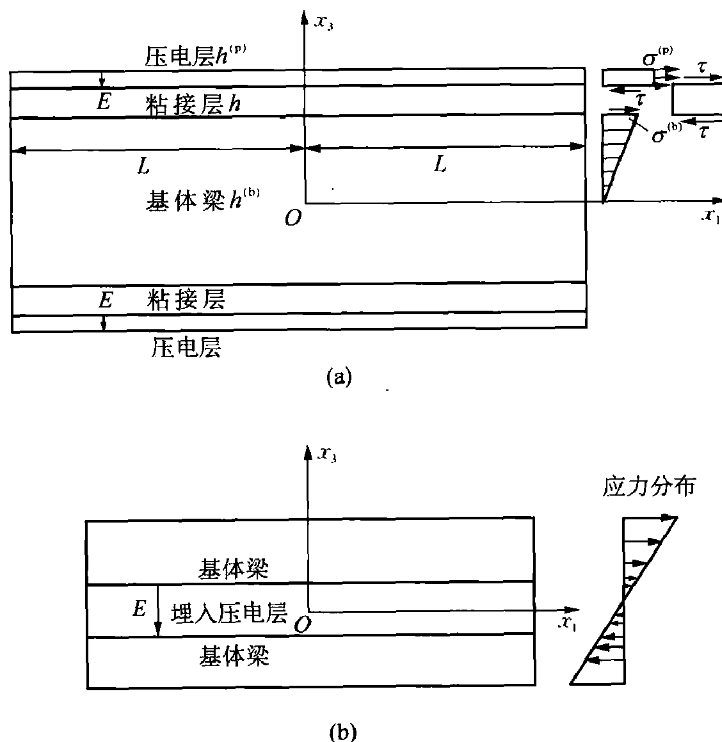


图 11－4　压电传感器结构示意图

$$\gamma = (u^{(p)} - u_s^{(b)})/h, \quad \tau = G\gamma \tag{11-120}$$

式中 G 和 h 分别为粘结层的剪切系数和厚度。下面分别用带右上标的字母“p”和“b”表示压电层和基体梁的变量。假设梁的宽度为 1 单位，按单元体力学平衡条件有

$$h^{(p)}\sigma_{,1}^{(p)}-\tau=0,\quad h^{(b)}\sigma_{s,1}^{(b)}+\alpha\tau=0 \tag{11-121}$$

上式中的第一式是压电层中力的平衡方程;第二式是基体梁的平衡方程,对于弯曲变形的基体梁是力矩平衡方程,式中 $\sigma_s^{(b)}$ 是基体层上表面的弯曲应力,按 Bernoulli - Euler 变形理论,系数 $\alpha=6$;对于拉压变形的基体梁是力的平衡方程,$\alpha=2$。基体梁的两种情形可统一讨论。压电层和基体梁的一维本构方程分别为

$$\sigma^{(p)}=Y^{(p)}(\varepsilon^{(p)}-\eta),\ \eta=e_{31}V/Y^{(p)}h^{(p)},\ \varepsilon^{(p)}=u_{,1}^{(p)};\quad \sigma_s^{(b)}=Y^{(b)}\varepsilon_s^{(b)},\ \varepsilon_s^{(b)}=u_{s,1}^{(b)} \tag{11-122}$$

式中 $V/h^{(p)}$ 是压电层中的电场强度,$Y^{(p)}$ 和 $Y^{(b)}$ 分别为压电层和基体梁的弹性模量。式(11-120)~(11-122)组成含8个未知量($u_s^{(b)}$, $u^{(p)}$, $\varepsilon_s^{(b)}$, $\varepsilon^{(p)}$, γ, $\sigma_s^{(b)}$, $\sigma^{(p)}$, τ)的8个方程。把式(11-120)代入(11-121),并利用式(11-122)和 $V_{,1}=0$,便得

$$h^{(p)}Y^{(p)}\varepsilon_{,11}^{(p)}-G(\varepsilon^{(p)}-\varepsilon_s^{(b)})/h=0,\quad h^{(b)}Y^{(b)}\varepsilon_{s,11}^{(b)}+\alpha G(\varepsilon^{(p)}-\varepsilon_s^{(b)})/h=0 \tag{11-123}$$

上述二阶联立方程的通解是

$$\begin{gathered}\varepsilon^{(p)}=c_1+c_2x_1-c_3\frac{\hat{Y}}{\alpha}\sinh\Gamma x_1-c_4\frac{\hat{Y}}{\alpha}\cosh\Gamma x_1\\ \varepsilon_s^{(b)}=c_1+c_2x_1+c_3\sinh\Gamma x_1+c_4\cosh\Gamma x_1,\quad \Gamma^2=\frac{G}{hh^{(p)}Y^{(p)}}\frac{\hat{Y}+\alpha}{\hat{Y}},\ \hat{Y}=\frac{h^{(b)}Y^{(b)}}{h^{(p)}Y^{(p)}}\end{gathered} \tag{11-124}$$

边界条件是

$$\varepsilon^{(p)}=\eta,\quad \varepsilon_s^{(b)}=\varepsilon_s^{(b\pm)},\ x_1=\pm L \tag{11-125}$$

式中 $\varepsilon_s^{(b\pm)}$ 为已知的基体梁在右(+)、左(−)端的应变。把式(11-124)代入(11-125),得

$$\begin{gathered}c_1=\frac{\hat{Y}}{\hat{Y}+\alpha}\left(\frac{\varepsilon_s^{(b+)}+\varepsilon_s^{(b-)}}{2}+\frac{\alpha}{\hat{Y}}\eta\right),\quad c_2=\frac{\hat{Y}}{\hat{Y}+\alpha}\frac{\varepsilon_s^{(b+)}-\varepsilon_s^{(b-)}}{2L}\\ c_3=\frac{\alpha}{(\hat{Y}+\alpha)\sinh\Gamma L}\frac{\varepsilon_s^{(b+)}-\varepsilon_s^{(b-)}}{2},\quad c_4=\frac{\alpha}{(\hat{Y}+\alpha)\cosh\Gamma L}\left(\frac{\varepsilon_s^{(b+)}+\varepsilon_s^{(b-)}}{2}-\eta\right)\end{gathered} \tag{11-126}$$

把式(11-124)和(11-126)代入(11-120),并利用位移和应变之间的关系,便得

$$\tau=-\frac{G}{h\Gamma}\left[\frac{\varepsilon_s^{(b+)}-\varepsilon_s^{(b-)}}{2}\frac{\cosh\Gamma x_1}{\sinh\Gamma L}+\left(\frac{\varepsilon_s^{(b+)}+\varepsilon_s^{(b-)}}{2}-\eta\right)\frac{\sinh\Gamma x_1}{\cosh\Gamma L}\right] \tag{11-127}$$

如果只有压电效应引起的应变,则有

$$\begin{gathered}\frac{\varepsilon^{(p)}}{\eta}=\frac{\alpha}{\hat{Y}+\alpha}+\frac{\hat{Y}\cosh\Gamma x_1}{(\hat{Y}+\alpha)\cosh\Gamma L},\quad \frac{\varepsilon_s^{(b)}}{\eta}=\frac{\alpha}{\hat{Y}+\alpha}-\frac{\alpha\cosh\Gamma x_1}{(\hat{Y}+\alpha)\cosh\Gamma L}\\ \tau=\frac{G\eta}{h\Gamma}\frac{\sinh\Gamma x_1}{\cosh\Gamma L}\end{gathered} \tag{11-128}$$

对于理想粘结情形,$\Gamma\to\infty$,由式(11-124)和(11-126)知,当 $x_1\neq\pm L$ 并利用 $|x_1|<L$ 时,有 $\sinh\Gamma x_1/\cosh\Gamma L=\cosh\Gamma x_1/\sinh\Gamma L=0$,则得

$$\varepsilon^{(p)}=\varepsilon_s^{(b)}=\frac{\hat{Y}}{\hat{Y}+\alpha}\left(\frac{\varepsilon_s^{(b+)}+\varepsilon_s^{(b-)}}{2}+\frac{\varepsilon_s^{(b+)}-\varepsilon_s^{(b-)}}{2}\frac{x_1}{L}\right)+\frac{\alpha}{\hat{Y}+\alpha}\eta \tag{11-129}$$

此时由基体梁传向压电片的剪切力集中在压电片的端点 $x_1 = \pm L$。由式(11-121)和(11-127),并利用 $x_1 = \pm L$ 时有 $\sinh \Gamma x_1/\cosh \Gamma L = x_1/L$, $\cosh \Gamma x_1/\sinh \Gamma L = 1$,可得

$$\sigma_s^{(b)} = \int_{-L}^{L} \sigma_{s,1}^{(b)} \mathrm{d}x_1 = -\int_{-L}^{L} \frac{\alpha\tau}{h^{(b)}} \mathrm{d}x_1 = \frac{\alpha Y^{(b)}}{\hat{Y}+\alpha}\left[\frac{\varepsilon_s^{(b+)} - \varepsilon_s^{(b-)}}{2} + \left(\frac{\varepsilon_s^{(b+)} + \varepsilon_s^{(b-)}}{2} - \eta\right)\frac{x_1}{L}\right] \tag{11-130}$$

此力施加给单位厚度基体梁的力矩为

$$M = \sigma_s^{(b)} h^{(b)} \tag{11-131}$$

压电层埋入基体梁中的传感器可按 Bernoulli-Euler 梁进行类似的分析。

11.6.2 考虑剪切变形的 Timoshenko 梁的弯曲理论

对于很窄的中等厚度板,可以将其看成梁,考虑剪切变形的梁弯曲的 Timoshenko 方程,可由 11.5.1 节的 Mindlin 板的方程直接推出。令 Mindlin 板理论中没有坐标 x_2 方向的分量,且所有的物理量都和坐标 x_2 无关,即只讨论 $\sigma_{11}(x_1, x_3)$ 和 $\sigma_{13}(x_1, x_3)$。本构方程式(11-94)化为

$$\begin{aligned} &\sigma_1 = \sigma_{11} = Yu_{1,1} + e_{31}\varphi_{,3}, \quad \sigma_5 = \sigma_{13} = G(u_{1,3} + u_{3,1}) + e_{15}\varphi_{,1} \\ &D_1 = e_{15}(u_{1,3} + u_{3,1}) - \epsilon_{11}\varphi_{,1}, \quad D_3 = e_{31}u_{1,1} - \epsilon_{33}\varphi_{,3} \end{aligned} \tag{11-132}$$

式中 Y, G 为弹性模量。对应于式(11-96),假设 Timoshenko 变形为

$$\varepsilon_{11} = u_{1,1}^0 + x_3\psi_{,1}, \quad \gamma_{13} = u_{3,1}^0 + \psi \tag{11-133}$$

当 $\psi = -u_{3,1}^0$ 时便有 $\gamma_{13} = 0$, Timoshenko 梁化为 Bernoulli-Euler 梁。对应于式(11-97)和(11-98),有

$$\begin{aligned} &\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_{1,1}^0 \\ \psi_{,1} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} N_e \\ M_e \end{Bmatrix}, \quad q = G\gamma_{13} - q_e \\ &(A, B, D) = \sum_{k=1}^{N}\int_{h_k} Y^{(k)}(1, x_3, x_3^2)\mathrm{d}x_3, \quad G = \sum_{k=1}^{N}\int_{h_k} \Phi^2 G^{(k)}\mathrm{d}x_3 \\ &(N_e, M_e) = \sum_{k=1}^{N}\int_{h_k} e_{31}^{(k)} E_3^{(k)}(1, x_3)\mathrm{d}x_3, \quad q_e = \sum_{k=1}^{N}\int_{h_k} \Phi^2 e_{15}^{(k)} E_1^{(k)}\mathrm{d}x_3 \end{aligned} \tag{11-134}$$

式中符号的意义可参照 11.5.1 节。对应于式(11-101),有

$$\rho_0\ddot{u}_1^0 + \rho_1\ddot{\psi} = N_{,1}, \quad \rho_0\ddot{u}_3^0 = q_{,1} + p, \quad \rho_1\ddot{u}_1^0 + \rho_2\ddot{\psi} = M_{,1} - q \tag{11-135}$$

ρ_0, ρ_1, ρ_2 仍由式(11-102)表示,电位移和电场仍由式(11-99)和(11-100)表示。

11.6.3 利用广义变分原理推导含侧向应力效应的压电梁的弯曲理论

上述梁的理论已做了一些简化假设,不能严格符合电弹性的基本方程,特别是本构方程。本书作者 1964 年在一篇科学报告[28]和文献[209]中,曾利用广义变分原理推导板的高阶近似方程,广义变分可自动寻找最佳的近似理论方程。类似于第 3 章中的变分原理,不计体积力和体电荷时,易于得到广义位移和广义应力都可以自由变分的广义变分方程。文献[210]提出的广义变分原理为

$$\delta\Pi = 0,\quad \mathscr{F} = \frac{1}{2}s_{kl}\sigma_k\sigma_l - \frac{1}{2}\beta_{kl}D_kD_l + g_{kl}\sigma_kD_l$$
$$\Pi = \int_V[\mathscr{F}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{D}) - \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{D}\cdot\boldsymbol{E}]\mathrm{d}V + \int_{a_\sigma}T_k^* u_k\mathrm{d}a - \int_{a_D}\rho_e^*\varphi\mathrm{d}V = 0 \tag{11-136}$$

式中$\mathscr{F}$为电弹性焓，s_{kl}为零电位移时测得的机械柔度，T_k^* 为表面力，ρ_e^* 为表面电荷。图 11-3 中，整体坐标系(x_1,x_2,x_3)，局部坐标系(x_1,x_2,z)，局部坐标系的原点取为$x_3=\bar{z}_i$，$\bar{z}_i$ 为第 i 层的中面的 x_3 坐标。两种坐标系的单位矢量均取用 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$。Maurini，Pouget 和 dell'Isola[210]认为侧向正应力 σ_{22} 对梁的变形有较为重要的作用，因而利用式(11-136)推导不考虑切应变，但考虑 σ_{22} 的梁的理论。为此，他们提出下列假设：

(1) 机械位移适用等效单层梁的 Euler-Bernoulli 变形的假设，即

$$\boldsymbol{u}(x_1,x_2,x_3) = [u_1(x_1) - x_3u_{3,1}(x_1)]\boldsymbol{e}_1 + u_3(x_1)\boldsymbol{e}_3 \tag{11-137}$$

略去厚度方向的应变，由上式可求出

$$\boldsymbol{\varepsilon}(x_1,x_2,x_3) = [\varepsilon_1^{(i)}(x_1) - z_i\kappa_1^{(i)}(x_1)]\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_1$$
$$\varepsilon_1^{(i)} = u_{1,1} - \bar{z}_i\kappa_1^{(i)},\quad \kappa_1^{(i)} = u_{3,11},\quad z_i = x_3 - \bar{z}_i \tag{11-138}$$

式中 $\kappa_1(x_1)$为梁弯曲的曲率半径的 x_1 分量。

(2) 电势沿层厚度线性分布，不同层之间并行连接，故对任一 i 层有

$$\varphi(x_1,x_2,x_3) = (1/2 + \eta_iz_i/h_i)V,\quad \boldsymbol{E} = E_3^{(i)}\boldsymbol{e}_3 = -\eta_iV/h_i \tag{11-139}$$

式中 V 是梁的两个电学端点间的电势差，η_i是常数。

(3) 层内应力线性分布，计及侧向应力，但不计切应力，即

$$\boldsymbol{\sigma}^{(i)}(x_1,x_2,x_3) = [\sigma_1^{(i)}(x_1) - z_i\varsigma_1^{(i)}(x_1)]\boldsymbol{e}_1\otimes\boldsymbol{e}_1 + [\sigma_2^{(i)}(x_1) - z_i\varsigma_2^{(i)}(x_1)]\boldsymbol{e}_2\otimes\boldsymbol{e}_2 \tag{11-140}$$

式中 $\sigma_1^{(i)}$，$\sigma_2^{(i)}$ 代表层内常应力项，$z_i\varsigma_1^{(i)}$，$z_i\varsigma_2^{(i)}$代表层内线性分布应力项。

(4) 层内电位移沿厚度均匀分布，且只有分量 D_3，即

$$\boldsymbol{D}^{(i)}(x_1,x_2,x_3) = D_3^{(i)}\boldsymbol{e}_3 \tag{11-141}$$

根据上述假设，广义应力可表为 $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_1^{(i)},\varsigma_1^{(i)},\sigma_2^{(i)},\varsigma_2^{(i)}]_{i=1}^N$，$\boldsymbol{D} = \{D_3^{(i)}\}_{i=1}^N$。

梁上作用的外力有

$$\boldsymbol{F} = T^*\boldsymbol{e}_1 + P^*\boldsymbol{e}_3,\quad \boldsymbol{M} = -M^*\boldsymbol{e}_2,\quad \varphi = V^*(\text{或 } D_3 = Q^*) \tag{11-142}$$

x_2 方向梁的端面的边界条件可分为几种。自由弯曲模式：侧向法应力满足合力为零的条件

$$N_2 = \iint_{a_2}\sigma_2\mathrm{d}a_2 = 0,\quad M_2 = -\iint_{a_2}x_3\sigma_2\mathrm{d}a_2 = 0 \tag{11-143}$$

式中 a_2 是垂直 x_1 方向梁的法截面。平面应变和平面应力的端面条件分别为

$$\varepsilon_{22} = 0(\text{平面应变}),\quad \sigma_{22} = 0(\text{平面应力}) \tag{11-144}$$

利用假设(1)～(4)，按本构方程(3-32)中的第四式、(11-140)和(11-141)，梁的单位长度上的电弹性焓可表成

$$\mathscr{F}_b = \sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{2}(A^{(i)}s_{kl}^{(i)}\sigma_k^{(i)}\sigma_l^{(i)} + J^{(i)}s_{kl}^{(i)}\varsigma_k^{(i)}\varsigma_l^{(i)}) + A^{(i)}g_{3k}^{(i)}\sigma_k^{(i)}D_3^{(i)} - \frac{1}{2}A^{(i)}\beta_{33}^{(i)}D_3^{(i)2}\right] \tag{11-145}$$

式中 $A^{(i)} = L_2h^{(i)}$ 是梁的每一层的横截面的面积，$J^{(i)} = L_2h^{(i)3}/12$ 是每一层的横截面的惯性矩，L_2 为梁在 x_2 方向的宽度。首先讨论自由弯曲模式。为了满足条件(11-143)，引入Lagrange 乘子 λ 和 μ，则修正后的广义变分原理式为

$$\begin{aligned}
&\delta\Pi^* = 0\\
&\Pi^* = \int_{L_1}\mathscr{F}_b(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{D})\mathrm{d}x_1 - \sum_{i=1}^{N}\int_{L_1}A^{(i)}D_3^{(i)}E_3^{(i)}\mathrm{d}x_1 - \sum_{i=1}^{N}\int_{L_1}(A^{(i)}\sigma_1^{(i)}\varepsilon_1^{(i)} + J^{(i)}\varsigma_1^{(i)}\kappa_1^{(i)})\mathrm{d}x_1 +\\
&\qquad\int_{L_1}(f_Nu_1 + f_Mu_3' + f_Tu_3)\mathrm{d}x_1 + (N^*u_1 + M^*u_3' + T^*u_3)_{0,L_1} - Q^*V -\\
&\qquad\int_{L_1}\lambda(x_1)\left(\iint_{a_2}\sigma_2\mathrm{d}a_2\right)\mathrm{d}x_1 + \int_{L_1}\mu(x_1)\left(\iint_{a_2}x_3\sigma_2\mathrm{d}a_2\right)\mathrm{d}x_1
\end{aligned} \tag{11-146}$$

式中 L 是梁在 x_1 方向的长度。

$$\begin{aligned}
&f_N = \int_{\mathscr{L}}T_1^*\,\mathrm{d}\mathscr{L},\quad f_M = -\int_{\mathscr{L}}x_3T_1^*\,\mathrm{d}\mathscr{L},\quad f_T = \int_{\mathscr{L}}T_3^*\,\mathrm{d}\mathscr{L}\\
&N^* = \int_{a_2}T_1^*\,\mathrm{d}a_2,\quad M^* = -\int_{a_2}x_3T_1^*\,\mathrm{d}a_2,\quad T^* = \int_{a_2}T_3^*\,\mathrm{d}a_2
\end{aligned} \tag{11-147}$$

式中 $\mathscr{L}$ 为横截面 a_2 的轮廓线。若令

$$\varepsilon_2^{(i)} = \lambda(x_1) - \bar{z}_i\kappa_2,\ \kappa_2 = \mu(x_1) \tag{11-148}$$

则有

$$\int_L\lambda(x_1)\left(\iint_{a_2}\sigma_2\mathrm{d}a_2\right)\mathrm{d}x_1 + \int_L\mu(x_1)\left(\iint_{a_2}x_3\sigma_2\mathrm{d}a_2\right)\mathrm{d}x_1 = \int_L\sum_{i=1}^{N}(A^{(i)}\sigma_2^{(i)}\varepsilon_2^{(i)} + J^{(i)}\varsigma_2^{(i)}\kappa_2^{(i)})\mathrm{d}x_1$$

由上式可见，x_2 方向的(λ, μ)有着和 x_1 方向的$(u_{1,1}, u_{3,11})$相类似的意义。

由式(11-146)关于 u_1，φ 的首次变分为零，可得平衡方程

$$\begin{aligned}
&f_N + N_{1,1} = 0,\quad f_{M,1} - f_T + M_{1,11} = 0,\quad \int_{L_1}q\mathrm{d}x_1 - Q^* = 0\\
&N_1 = \sum_{i-1}^{N}A^{(i)}\sigma_1^{(i)},\quad M_1 = -\sum_{i=1}^{N}A^{(i)}\bar{z}^{(i)}\sigma_1^{(i)} + \sum_{i=1}^{N}J^{(i)}\varsigma_1^{(i)},\quad q = -\sum_{i-1}^{N}A^{(i)}\eta_iD_3^{(i)}
\end{aligned} \tag{11-149}$$

和两端的自然边界条件

$$(N_1 - N^*)\delta u_1 = 0,\quad (M_1 - M^*)\delta u_{3,1} + (T^* + M_{1,1} + f_M)\delta u_3 = 0 \tag{11-150}$$

由式(11-146)关于 $\boldsymbol{\sigma}$，$\boldsymbol{D}$ 的首次变分为零，可得局部本构方程

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_l^{(i)} = s_{kl}^{(i)}\sigma_k^{(i)} + g_{3k}^{(i)}D_k^{(i)},\quad \kappa_l^{(i)} = s_{kl}^{(i)}\varsigma_k^{(i)},\quad E_3^{(i)} = -g_{3k}^{(i)}\sigma_k^{(i)} + \beta_{33}^{(i)}D_3^{(i)}\\
&\sigma_l^{(i)} = \widetilde{C}_{kl}^{(E)(i)}\varepsilon_k^{(i)} - \widetilde{e}_{3k}^{(i)}E_k^{(i)},\quad \varsigma_l^{(i)} = \widetilde{C}_{kl}^{(i)}\kappa_k^{(i)},\quad D_3^{(i)} = -\widetilde{e}_{3k}^{(i)}\varepsilon_k^{(i)} + \widetilde{\epsilon}_{33}^{(i)}E_3^{(i)}
\end{aligned} \tag{11-151}$$

由式(11－146)关于 λ，μ 的首次变分为零，可得式(11－143)。式(11－141)中 $\widetilde{C}_{kl}^{(i)}$，$\widetilde{e}_{3k}^{(i)}$，$\widetilde{\epsilon}_{33}^{(i)}$ 是一些折算后的材料常数(对应于 $\boldsymbol{e}_1-\boldsymbol{e}_2$ 面内的平面应力和沿 $\boldsymbol{e}_3$ 的单轴电位移)，易于求得

$$\widetilde{C}_{11}^{(E)}=\frac{s_{11}}{s_{11}^2-s_{12}^2},\quad \widetilde{C}_{12}^{(E)}=\frac{s_{12}}{s_{11}^2-s_{12}^2},\quad \widetilde{e}_{31}=\frac{d_{31}}{s_{11}+s_{12}},\quad \widetilde{\varepsilon}_{33}=\beta\frac{1}{\beta_{33}}-2\frac{d_{31}^2}{s_{11}+s_{12}}$$
$$\widetilde{C}_{11}=\widetilde{C}_{11}^{(E)}+\widetilde{e}_{31}^2/\widetilde{\varepsilon}_{33},\quad \widetilde{C}_{12}=\widetilde{C}_{12}^{(E)}+\widetilde{e}_{31}^2/\widetilde{\varepsilon}_{33} \tag{11－152}$$

除去式(11－143)代表的自由弯曲模式，对于宽梁，常用平面应变模式，即 $\varepsilon_{22}=0$，此时变分公式(11－146)中没有含 Lagrange 乘子的项。对于窄梁，常用平面应力模式，即 $\sigma_{22}=0$，此时变分公式(11－147)中含 Lagrange 乘子的项应当改为

$$-\int_{L_1}\sum_{i=1}^{N}[\lambda_i(x_1)\sigma_2^{(i)}(x_1)+\mu_i(x_1)\varsigma_2^{(i)}(x_1)]\mathrm{d}x_1 \tag{11－153}$$

上述理论提供了获得更好方程的方法。

11.7 电磁非线性薄板的一阶近似理论[30]

11.7.1 基本假设

工程中大量使用置于空气中的电磁非线性薄板，但现有文献中存在的理论差别明显，本节在小变形的情况下讨论电磁薄板的一阶近似理论。令坐标系原点和 x_1，x_2 轴位于中面上，x_3 垂直于中面向上，板向上弯曲。在薄板理论中，x_3 的作用和(x_1，x_2)不同，将单独写出讨论。薄板理论并不严格服从三维理论，需做近似处理，取用以下基本假设：

(1) 和经典理论一样，设 Kirchhoff 假设成立，变形前的中面法线变形后仍垂直于中面[211, 212]，即

$$u_k=u_k^0-x_3u_{3,k}^0,\ u_k^0=u_k^0(x_1,x_2,t),\ u_{k,3}^0=0,\ k=1,2,3$$

或

$$\begin{aligned}&u_\alpha=u_\alpha^0(x_1,x_2,t)-x_3u_{3,\alpha}^0,\quad u_3=u_3^0(x_1,x_2,t),\ \alpha=1,2\\&\varepsilon_{\alpha\alpha}=u_{\alpha,\alpha}=u_{\alpha,\alpha}^0-x_3u_{3,\alpha\alpha}^0,\quad \varepsilon_{33}=0,\quad u_{2,3}+u_{3,2}=0\\&u_{1,3}+u_{3,1}=0,\quad u_{1,2}+u_{2,1}=(u_{1,2}^0+u_{2,1}^0)-x_3(u_{3,12}^0+u_{3,21}^0)\end{aligned} \tag{11－154}$$

式中 $\boldsymbol{u}^0$ 是中面上点的位移，$\boldsymbol{u}$ 是板内任一点的位移。本节中希腊字母的下标取值(1, 2)，英文字母的下标取值(1, 2, 3)。

(2) 和经典理论一样，假设 $\sigma_{\alpha3}(\alpha=1,2)$ 比 σ_{11}，σ_{22}，σ_{12}小一个数量级，因而只计 $\sigma_{\alpha3}$本身，不计它产生的应变；完全略去 σ_{33}。

(3) 设电磁场仍然服从三维理论，不受位移近似的影响。但为了和经典板理论一致，把电势和磁势因迁移变分而产生的电磁力简化到中面 S 上或其边界线 L 上，$\mathrm{d}S=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$。

11.7.2 控制方程

置于空气中的电磁板，完全被空气所包围，所以只存在界面，没有自已独立的边界，同时空气不承受机械力，所以环境中只有电磁场的作用，没有机械力作用。对于不考虑体积力，无穷

远处作用有均匀磁场的小变形问题,第三章中有限变形一般理论的变分方程(3-83)可简化为

$$
\begin{aligned}
&\delta \Pi = \delta \Pi_1 + \delta \Pi_2 - \delta W^{*\,\mathrm{itf}} = 0 \\
&\delta \Pi_1 = \delta \int_V g\,\mathrm{d}V - \delta W^{*}, \quad \delta \Pi_2 = \delta \int_{V^{\mathrm{env}}} g^{\mathrm{env}}\,\mathrm{d}V - \delta W^{*\,\mathrm{env}} \\
&\delta W^{*} = -\int_V \rho \ddot{u}_k \delta u_k\,\mathrm{d}V - \int_V \rho_e \delta\varphi\,\mathrm{d}V \\
&\delta W^{*\,\mathrm{env}} = -\int_{V^{\mathrm{env}}} \rho_e^{\mathrm{env}} \delta\varphi^{\mathrm{env}}\,\mathrm{d}V + \int_{a_q^{\mathrm{env}}} D_i^{*\,\mathrm{env}} n_i^{\mathrm{env}} \delta\varphi^{\mathrm{env}}\,\mathrm{d}a + \int_{a_\mu^{\mathrm{env}}} B_i^{*\,\mathrm{env}} n_i^{\mathrm{env}} \delta\psi^{\mathrm{env}}\,\mathrm{d}a \\
&\delta W^{*\,\mathrm{itf}} = \int_{a_\sigma^{\mathrm{int}}} T_k^{*\,\mathrm{itf}} \delta u_k\,\mathrm{d}a - \int_{a_q^{\mathrm{int}}} \sigma^{*\,\mathrm{itf}} \delta\varphi\,\mathrm{d}a \\
&g = (1/2) C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} - (1/2) \epsilon_{kl} E_k E_l - e_{kij}^{\mathrm{e}} E_k \varepsilon_{ij} - (1/2) l_{ijkl}^{\mathrm{e}} E_i E_j \varepsilon_{kl} - \\
&\qquad (1/2) \mu_{kl} H_k H_l - e_{kij}^{\mathrm{m}} H_k \varepsilon_{ij} - (1/2) l_{ijkl}^{\mathrm{m}} H_i H_j \varepsilon_{kl}
\end{aligned}
\tag{11-155}
$$

由于讨论小变形,故 $\Gamma_{kl}\varepsilon_{lk}$ 已被略去。按假设(3),电磁场服从三维理论,在第 3 章已详细讨论过电场,磁场也类似,不再重复,下面只讨论力学方程。在方程(11-155)中应用假设(1)和(2)后,有

$$
\begin{aligned}
&\int_V \sigma_{kl} \delta u_{l,k}\,\mathrm{d}V = \int_V \sigma_{kl} \delta u_{l,k}^0\,\mathrm{d}V - \int_V \sigma_{kl} \delta (x_{3,k} u_{3,l}^0 + x_3 u_{3,lk}^0)\,\mathrm{d}V = \int_V \sigma_{\alpha\beta} \delta u_{\beta,\alpha}^0\,\mathrm{d}V - \\
&\quad \int_V \sigma_{\alpha\beta} x_3 \delta u_{3,\beta\alpha}^0\,\mathrm{d}V = \int_S \int_h^h \sigma_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x_3\, \delta u_{\alpha,\beta}^0\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 - \int_S \int_h^h \sigma_{\alpha\beta} x_3\,\mathrm{d}x_3\, \delta u_{3,\alpha\beta}^0\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2 = \\
&\int_L N_{\alpha\beta} n_\beta \delta u_\alpha^0\,\mathrm{d}L - \int_S N_{\alpha\beta,\beta} \delta u_\alpha^0\,\mathrm{d}S - \int_l M_{\alpha\beta} n_\beta \delta u_{3,\alpha}^0\,\mathrm{d}L + \\
&\quad \int_L M_{\alpha\beta,\alpha} n_\beta \delta u_3^0\,\mathrm{d}L - \int_S M_{\alpha\beta,\beta\alpha} \delta u_3^0\,\mathrm{d}S \\
&\int_V \rho \ddot{u}_k \delta u_k\,\mathrm{d}V = \int_V p (\ddot{u}_k^0 - x_3 \ddot{u}_{3,k}^0) \delta (u_k^0 - x_3 u_{3,k}^0)\,\mathrm{d}V \approx \int_S \hat{\rho} \ddot{u}_k^0 \delta u_k^0\,\mathrm{d}S
\end{aligned}
\tag{11-156}
$$

式中

$$
N_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{h} \sigma_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x_3,\ M_{\alpha\beta} = \int_{-h}^{h} \sigma_{\alpha\beta} x_3\,\mathrm{d}x_3,\ \hat{\rho} = \int_{-h}^{h} \rho\,\mathrm{d}x_3 \tag{11-157}
$$

注意到在中面上有 $n_3 = 1$, $n_\alpha = 0$,在侧面或 L 上有 $n_3 = 0$。作用在板和空气的界面上的电磁力可简化为

$$
\begin{aligned}
&\int_{a^{\mathrm{itf}}} \sigma_{ip}^{\mathrm{M}} n_i \delta u_p\,\mathrm{d}a - \int_{a^{\mathrm{itf}}} \sigma_{ip}^{\mathrm{envM}} n_i \delta u_p\,\mathrm{d}a = \int_L \int_{-h}^{h} (\sigma_{\alpha p}^{\mathrm{M}} - \sigma_{\alpha p}^{\mathrm{envM}})\,\mathrm{d}x_3\, n_\alpha \delta u_p\,\mathrm{d}L + \\
&\int_S \left(\sigma_{3p}^{\mathrm{M}} \Big|_{\mathrm{lower}}^{\mathrm{upper}} - \sigma_{3p}^{\mathrm{envM}} \Big|_{\mathrm{lower}}^{\mathrm{upper}}\right) n_3 \delta u_p\,\mathrm{d}S = \int_L (N_{\alpha p}^{\mathrm{M}} - N_{\alpha p}^{\mathrm{envM}}) n_\alpha \delta u_p\,\mathrm{d}L + \\
&\int_S (p_i^{\mathrm{M}} - p_i^{\mathrm{envM}}) \delta u_i\,\mathrm{d}S = \int_L (N_{\alpha p}^{\mathrm{M}} - N_{\alpha p}^{\mathrm{envM}}) n_\alpha \delta u_p^0\,\mathrm{d}L - \\
&\int_L (M_{\alpha\beta}^{\mathrm{M}} - M_{\alpha\beta}^{\mathrm{envM}}) n_\alpha \delta u_{3,\beta}^0\,\mathrm{d}L + \int_S (p_i^{\mathrm{M}} - p_i^{\mathrm{envM}}) \delta u_i^0\,\mathrm{d}S
\end{aligned}
\tag{11-158}
$$

式中

$$\sigma_{ip}^{\mathrm{M}} = (D_i E_p + B_i H_p) - (1/2)(D_m E_m + B_m H_m)\delta_{ip}$$
$$\sigma_{ip}^{\mathrm{envM}} = (D_i^{\mathrm{env}} E_p^{\mathrm{env}} + B_i^{\mathrm{env}} H_p^{\mathrm{env}}) - (1/2)(D_m^{\mathrm{env}} E_m^{\mathrm{env}} + B_m^{\mathrm{env}} H_m^{\mathrm{env}})\delta_{ip}$$
$$N_{\alpha p}^{\mathrm{M}} = \int_{-h}^{h} \sigma_{\alpha p}^{\mathrm{M}} \mathrm{d}x_3,\ M_{\alpha p}^{\mathrm{M}} = \int_{-h}^{h} \sigma_{\alpha p}^{\mathrm{M}} x_3 \mathrm{d}x_3,\ p_i^{\mathrm{M}} = \sigma_{i3}^{\mathrm{M}}\Big|_{\mathrm{lower}}^{\mathrm{upper}} \tag{11-159}$$
$$N_{\alpha p}^{\mathrm{envM}} = \int_{-h}^{h} \sigma_{\alpha p}^{\mathrm{envM}} \mathrm{d}x_3,\ M_{\alpha p}^{\mathrm{envM}} = \int_{-h}^{h} \sigma_{\alpha p}^{\mathrm{envM}} x_3 \mathrm{d}x_3,\ p_i^{\mathrm{envM}} = \sigma_{i3}^{\mathrm{envM}}\Big|_{\mathrm{lower}}^{\mathrm{upper}}$$

式中 $[A]_{\mathrm{lower}}^{\mathrm{upper}} = A_{\mathrm{upper}} - A_{\mathrm{lower}}$。板内的电磁力为

$$\int_V \sigma_{ip,i}^{\mathrm{M}} \delta u_p \mathrm{d}V = \int_V \sigma_{i\alpha,i}^{\mathrm{M}} \delta u_\alpha \mathrm{d}V + \int_V \sigma_{i3,i}^{\mathrm{M}} \delta u_3 \mathrm{d}V = \int_S N_{i\alpha,i}^{\mathrm{M}} \delta u_\alpha^0 \mathrm{d}S - \int_S M_{i\alpha,i}^{\mathrm{M}} \delta u_{3,\alpha}^0 \mathrm{d}S + \int_S p_{i,i}^{\mathrm{M}} \delta u_3^0 \mathrm{d}S \tag{11-160a}$$

由于板很薄,可设 σ_{ip}^{M} 和 x_3 无关,即 $\sigma_{ip}^{\mathrm{M}} = \sigma_{ip}^{\mathrm{M}}(x_1, x_2)$。因而式(11-160a)化为

$$\int_V \sigma_{ip,i}^{\mathrm{M}} \delta u_p \mathrm{d}V = \int_S \int_{-h}^{h} \sigma_{\alpha p,\alpha}^{\mathrm{M}} \mathrm{d}x_3 \delta u_p \mathrm{d}S = \int_S N_{\beta\alpha,\beta}^{\mathrm{M}} \delta u_\alpha^0 \mathrm{d}S - \int_S M_{\beta\alpha,\beta}^{\mathrm{M}} \delta u_{3,\alpha}^0 \mathrm{d}S + \int_S f_{\alpha,\alpha}^{\mathrm{M}} \delta u_3^0 \mathrm{d}S \tag{11-160b}$$

式中 $f_\alpha^{\mathrm{M}} = \int_{-h}^{h} \sigma_{\alpha 3}^{\mathrm{M}} \mathrm{d}x_3$。界面上给定的外力是

$$\int_{a_\sigma^{\mathrm{int}}} T_l^{*\,\mathrm{itf}} \delta u_l \mathrm{d}a = \int_S p_l^{*\,\mathrm{itf}} \delta u_l^0 \mathrm{d}S + \int_{L_\sigma} P_l^{*\,\mathrm{itf}} \delta u_l^0 \mathrm{d}L - \int_{L_\sigma} M_l^{*\,\mathrm{itf}} \delta u_{3,l}^0 \mathrm{d}L$$
$$p_l^{*\,\mathrm{itf}} = T_l^{*\,\mathrm{itf}}\Big|_{\mathrm{lower}}^{\mathrm{upper}}(\text{在 } S \text{ 上});\ P_l^{*\,\mathrm{itf}} = \int_{-h}^{h} T_l^{*\,\mathrm{itf}} \mathrm{d}x_3,\ M_l^{*\,\mathrm{itf}} = \int_{-h}^{h} T_l^{*\,\mathrm{itf}} x_3 \mathrm{d}x_3 (\text{在 } L_\sigma \text{ 上}) \tag{11-161}$$

由式(11-155)和方程(11-156)~(11-161),可以得到有关机械力的变分公式,但需作一修正。按式(11-154)有 $\varepsilon_{\alpha 3} = 0$,但按与横向力 $P_3^{*\,\mathrm{int}}$ 的平衡条件有 $\sigma_{\alpha 3} \neq 0$,这种矛盾只能用近似方法处理。由式(11-155)和方程(11-156)~(11-161)知,简化到中面上的 $\sigma_{\alpha 3}$ 已由 $P_3^{*\,\mathrm{int}}$ 近似考虑,但自由边界上的 $\sigma_{\alpha 3}$ 没有考虑。为此,变分公式中需增加一项:$\int_L Q_\alpha n_\alpha \delta u_3 \mathrm{d}L$,其中 $Q_\alpha = \int_{-h}^{h} \sigma_{\alpha 3} \mathrm{d}x_3$,从而最终有

$$\begin{aligned}
&-\int_S [(N_{\alpha\beta} + N_{\alpha\beta}^{\mathrm{M}})_{,\beta} - \hat{\rho}\ddot{u}_\alpha^0 + p_\alpha^{\mathrm{envM}} - p_\alpha^{\mathrm{M}} + p_\alpha^{*\,\mathrm{itf}}]\delta u_\alpha^0 \mathrm{d}s + \\
&\int_L [(N_{\alpha\beta} + N_{\alpha\beta}^{\mathrm{M}} - N_{\alpha\beta}^{\mathrm{envM}})n_\beta - P_\alpha^{*\,\mathrm{itf}}]\delta u_\alpha^0 \mathrm{d}L - \\
&\int_S [(M_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta}^{\mathrm{M}})_{,\beta\alpha} + f_{\alpha,\alpha}^{\mathrm{M}} - \hat{\rho}\ddot{u}_3^0 + (p_3^{\mathrm{envM}} - p_3^{\mathrm{M}}) + p_3^{*\,\mathrm{itf}}]\delta u_3^0 \mathrm{d}s + \\
&\int_L [(M_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta}^{\mathrm{M}})_{,\beta} n_\beta + Q_\beta n_\beta - P_3^{\mathrm{itf}\,*} + (N_{\beta 3}^{\mathrm{M}} - N_{\beta 3}^{\mathrm{envM}})n_\beta]\delta u_3^0 \mathrm{d}L - \\
&\int_L [M_{\alpha\beta} n_\beta + (M_{\beta\alpha}^{\mathrm{M}} - M_{\beta\alpha}^{\mathrm{envM}})n_\beta - M_\alpha^{*\,\mathrm{itf}}]\delta u_{3,\alpha}^0 \mathrm{d}L = 0
\end{aligned} \tag{11-162}$$

由式(11-162),得到板的平面问题的控制方程

$$(N_{\alpha\beta} + N_{\alpha\beta}^{N})_{,\beta} + p_{\alpha}^{envM} - p_{\alpha}^{M} + p_{\alpha}^{*\,itf} = \hat{\rho}\ddot{u}_{\alpha}^{0}(\text{在 } S \text{ 内})$$
$$(N_{\alpha\beta} + N_{\alpha\beta}^{M} - N_{\alpha\beta}^{envM})n_{\beta} = P_{\alpha}^{*\,itf}(\text{在 } L_{\sigma} \text{ 上}) \quad (11-163)$$

由式(11-162)，得到板的弯曲问题的场控制方程

$$(M_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta}^{M})_{,\beta\alpha} + f_{\alpha,\alpha}^{M} + (p_{3}^{envM} - p_{3}^{M}) + p_{3}^{*\,itf} = \hat{\rho}\ddot{u}_{3}^{0}(\text{在 } S \text{ 内}) \quad (11-164)$$

通常 $M_{\alpha\beta,\epsilon\beta}^{M}$，$f_{\alpha,\alpha}^{M}$ 较小，可以略去。下面较详细地讨论板的弯曲问题的边界条件。令 x_1，x_2 分别和边界 L 上一点的法线 n 和切线 t 一致，改写式(11-162)中板弯曲问题的边界条件为

$$\int_{L}[(M_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta}^{M} - M_{\alpha\beta}^{envM})_{,\alpha}n_{\beta} + Q_{\beta}n_{\beta} - P_{3}^{*\,itf} + (N_{\beta3}^{M} - N_{\beta3}^{envM})n_{\beta}]\delta u_{3}^{0}\,dL -$$
$$\int_{L}[M_{\alpha\beta}n_{\beta} + (M_{\beta\alpha}^{M} - M_{\beta\alpha}^{envM})n_{\beta} - M_{\alpha}^{*\,itf}]\delta u_{3,\alpha}^{0}\,dL = 0,\ \alpha,\ \beta = n,\ t \quad (11-165)$$

表面上上式有三个边界条件，但实质上只有两个。通常板的三种边界条件可讨论如下：

(1) 固定边。按给定位移边界上的变分的先决条件，要求 $\delta u_3^0 = \delta u_{3,\alpha}^0 = 0$，即要求

$$u_3^0 = u_3^{0*},\quad u_{3,n}^0 = u_{3,n}^{0*} \quad (11-166a)$$

式中 u_3^{0*} 和 $u_{3,n}^{0*}$ 是给定值。条件 $u_{3,t}^0 = u_{3,t}^{0*}$ 已包含在 $u_3^0 = u_3^{0*}$ 中。

(2) 铰支边。按式(11-165)有

$$u_3^0 = u_3^{0*},\quad M_n + (M_n^M - M_n^{envM}) = M_n^{*\,itf} \quad (11-166b)$$

式中 $M_n = M_{nn}$。

(3) 自由边 C。由式(11-165)，得

$$M_n + (M_n^M - M_n^{envM}) = M_n^{*\,itf}$$
$$(M_{nt} + M_{nt}^M - M_{nt}^{envM})_{,t} + Q_n + N_{n3}^M - N_{n3}^{envM} = P_3^{*\,itf} \quad (11-166c)$$

式中 $M_t^{*\,itf}$ 已改写为 $M_{nt}^{*\,itf}$。从上面的讨论也可看出，通常板的三种边界条件可以由一般理论自然地导出。

11.7.3 软铁磁板例题

作为上述理论的一个应用，讨论位于均匀磁场中的软铁磁板。位于磁场中的软铁磁板初始处于平板状态，但在横向磁场的作用下，超过临界值后便发生弯曲或失稳[213, 214]；软铁磁板的振动频率会随面内磁场的大小而改变[215]。这些现象曾引起过困扰。Zhou 和 Zheng[216] 曾提出一个变分原理来讨论这一问题。我们将用上面提出的理论更统一和合理地解决这一问题。

设板上没有机械力作用，因而只有磁力作用在板上。下面只讨论弯曲问题。按式(11-164)，作用在板中面上的磁力为

$$M_{i\beta,i\beta}^{M} + p_{i,i}^{M} + (p_3^{envM} - p_3^{M}),\quad p_i^M = \sigma_{i3}^M\Big|_{lower}^{upper}$$

$$\sigma_{i3}^M = \left(B_iH_3 - \frac{1}{2}B_mH_m\delta_{i3}\right),\quad \sigma_{\alpha3}^M = B_\alpha H_3,\quad \sigma_{33}^M = (1/2)(B_3H_3 - B_\alpha H_\alpha) \quad (11-167)$$

对环境有类似的公式。可得到 $B_i^{\text{env}} = \mu_0 H_i^{\text{env}}$（空气中），$B_i = \tilde{\mu} H_i$，$\tilde{\mu} = \mu_0 \mu_r = \mu_0(1+\chi)$，其中 μ_r 是相对磁导率，χ 是磁化系数（板内）。界面上的连续条件是

$$H_\alpha^{\text{env}} = H_\alpha, \quad B_3^{\text{env}} = B_3, \quad \text{或}\ H_3^{\text{env}} = (\tilde{\mu}/\mu_0) H_3 \tag{11-168}$$

略去 $M_{i\beta,i\beta}^{\text{M}} + p_{i,i}^{\text{M}}$，则沿 x_3 方向作用在板上的磁力为

$$\begin{aligned} p_3^{\text{envM}} - p_3^{\text{M}} &= (1/2)\left[(B_3^{\text{env}} H_3^{\text{env}} - B_3 H_3) - (B_\alpha^{\text{env}} H_\alpha^{\text{env}} - B_\alpha H_\alpha)\right]\Big|_{\text{lower}}^{\text{upper}} = \\ &(1/2)\left[(\tilde{\mu} H_\alpha H_\alpha - \mu_0 H_\alpha H_\alpha) - (1 - \tilde{\mu}/\mu_0)\tilde{\mu} H_3^2\right]\Big|_{\text{lower}}^{\text{upper}} = \\ &(1/2)(\mu_0 \mu_r \chi H_3^2 + \mu_0 \chi H_\alpha H_\alpha)\Big|_{\text{lower}}^{\text{upper}} \end{aligned} \tag{11-169}$$

当外磁场为 $\boldsymbol{H} = H\mathbf{i}_3$ 时，式(11-169)大体上和 Eringen[217] 的公式一致；当外磁场为 $\boldsymbol{H} = H\mathbf{i}_1$ 时，式(11-169)和 Zhou and Miya[215] 的公式一致（可能差一符号）。上述两个磁力的公式能得到和实验一致的结果。

11.8 压电复合圆柱壳

11.8.1 无限长压电圆柱型薄壳的圆柱状弯曲

本节讨论图 11-5 所示的两端铰支的无限长压电圆柱薄壳的圆柱弯曲，由正交各向异性材料组成，采用图示的圆柱坐标系，设上、下层为薄压电层，中间层为非压电的基体层。由于圆柱壳无限长，可设变量只是(r, θ)的函数，和坐标 z 无关。在圆柱坐标系中的控制方程、广义平衡方程、广义位移应变方程和本构方程分别为

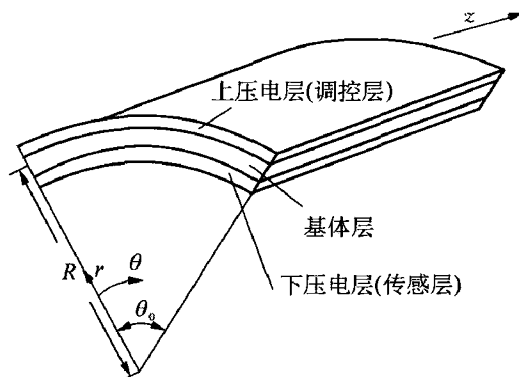


图 11-5　无限长层状圆柱壳结构

$$\begin{aligned} &\sigma_{r,r} + \sigma_{r\theta,\theta}/r + (\sigma_r - \sigma_\theta)/r = 0, \quad \sigma_{r\theta,r} + \sigma_{\theta,\theta}/r + 2\sigma_{r\theta}/r = 0 \\ &D_r + rD_{r,r} + D_{\theta,\theta} = 0 \end{aligned} \tag{11-170a}$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon_r = u_{r,r}, \quad \varepsilon_\theta = (u_{\theta,\theta} + u_r)/r, \quad \gamma_{r\theta} = (u_{r,\theta} - u_\theta)/r + u_{\theta,r} \\ &E_r = -\varphi_{,r}, \quad E_\theta = -\varphi_{,\theta}/r \end{aligned} \tag{11-170b}$$

$$\sigma_r = C_{11}\varepsilon_r + C_{12}\varepsilon_\theta - e_{33}E_r, \quad \sigma_\theta = C_{12}\varepsilon_r + C_{22}\varepsilon_\theta - e_{31}E_r$$
$$\sigma_{r\theta} = C_{66}\gamma_{r\theta} - e_{15}E_\theta, \quad D_r = e_{33}\varepsilon_r + e_{31}\varepsilon_\theta + \epsilon_r E_r, \quad D_\theta = e_{15}\gamma_{r\theta} + \epsilon_\theta E_\theta \tag{11-171}$$

式中C_{ij}等应当理解为折算材料系数。边界条件是：

(1) 两端铰支：$u_r = \sigma_\theta = \sigma_{\theta z} = 0$；$\varphi = 0$，$\theta = 0$，$\theta_0$

(2) 压电层和基体界面连接条件：u_r，u_θ，σ_r，$\sigma_{r\theta}$ 连续，$\varphi = 0$ (11-172)

(3) 上压电层外表面：$\sigma_r = q_0 \sin p\theta$，$\sigma_{r\theta} = 0$，$\varphi = V\sin p\theta$

(4) 下压电层内表面：$\sigma_r = \sigma_{r\theta} = 0$；$D_r = 0$

式中 $p = m\pi/\theta_0$，m 为整数，V 和 q_0 是给定值。

满足棱端 $u_r = \sigma_\theta = \varphi = 0$ 的铰支的上述问题的解，Chen，Shen 和 Wang[218] 提出下述广义位移

$$u_r = u_{r0}(r)\sin p\theta, \quad u_\theta = u_{\theta 0}(r)\cos p\theta, \quad \varphi = \varphi_0(r)\sin p\theta \tag{11-173}$$

把式(11-158)代入(11-154)，并利用式(11-155)和(11-156)，对压电层便得

$$C_{11}\left(u''_{r0} + \frac{u'_{r0}}{r}\right) - (C_{22} + p^2C_{66})\frac{u_{r0}}{r^2} - p(C_{66} + C_{12})\frac{u'_{\theta 0}}{r} + p(C_{22} + C_{66})\frac{u_{\theta 0}}{r^2} - e_{31}\frac{\varphi'_0}{r} = 0$$
$$p(C_{12} + C_{66})\frac{u'_{r0}}{r} + p(C_{22} + C_{66})\frac{u_{r0}}{r^2} + C_{66}\left(u''_{\theta 0} + \frac{u'_{\theta 0}}{r}\right) - (p^2C_{22} + C_{66})\frac{u_{\theta 0}}{r^2} + pe_{31}\frac{\varphi'_0}{r} = 0$$
$$e_{31}\frac{u'_{r0}}{r} - pe_{31}\frac{u'_{\theta 0}}{r} - \epsilon_r\left(\varphi''_0 + \frac{\varphi'_0}{r}\right) + p^2\epsilon_\theta\frac{\varphi_0}{r^2} = 0 \tag{11-174}$$

式中对任一变量 f，已令 $f' = f_{,r}$，$f'' = f_{,rr}$。由于上式是 Euler 齐次方程，故可设其解为

$$u_{r0}(r) = A_r r^s, \quad u_{\theta 0}(r) = A_\theta r^s, \quad \varphi_0(r) = A_\varphi r^s \tag{11-175}$$

把上式代入(11-174)，便得 A_r，A_θ，A_φ 的本征方程，由其前的系数行列式为零，得

$$\begin{aligned}
&As^6 + Bs^4 + Cs^2 + D = 0\\
&A = -C_{11}C_{66}\epsilon_r\\
&B = [C_{11}(p^2C_{22} + C_{66}) + C_{66}(C_{22} + p^2C_{66}) - p^2(C_{12} + C_{66})^2]\epsilon_r + \\
&\qquad p^2C_{11}C_{66}\epsilon_\theta + (C_{66} + p^2C_{11})e_{31}^2\\
&C = [-(C_{22} + p^2C_{66})(p^2C_{22} + C_{66}) + p^2(C_{22} + C_{66})^2]\epsilon_r + [p^4(C_{12} + C_{66})^2 - \\
&\qquad p^2C_{11}(p^2C_{22} + C_{66}) - p^2C_{66}(C_{22} + p^2C_{66})]\epsilon_\theta + [2p^2(C_{22} + C_{66}) - \\
&\qquad (p^2C_{22} + C_{66})e_{31}^2 - p^2(C_{22} + p^2C_{66})]e_{31}^2\\
&D = [p^2(p^2C_{22} + C_{66})(C_{22} + p^2C_{66}) - p^4(C_{22} + C_{66})^2]\epsilon_\theta
\end{aligned} \tag{11-176}$$

上式可化为标准的代数立方方程

$$\Omega^3 + g\Omega + f = 0$$
$$\Omega = s^2 + \frac{B}{3A}, \quad g = -\frac{B^2 - 3AC}{3A^2}, \quad f = \frac{2B^3 - 9ABC + 27A^2D}{27A^3} \tag{11-177}$$

根据 $f^3/4 + g^3/27$ 为负值、零和正值，上式的根分别为 3 个相异的实根、3 个实根中至少有

两个相等以及一个实根和一对复根。按式(11-176)，s 有 6 个根 s_j，$j=1\sim6$，对每个 s_j 可找到一组(A_{rj}, $A_{\theta j}$, $A_{\varphi j}$)，且其中有一个是任意的。从而式(11-160)的通解为

$$
\begin{aligned}
& u_{r0}=\sum_{j=1}^{6}A_jr^{s_j},\quad u_{\theta0}=\sum_{j=1}^{6}A_jH_{\theta j}r^{s_j},\quad \varphi_0=\sum_{j=1}^{6}A_jH_{\varphi j}r^{s_j} \\
& H_{\theta j}=-\{p[(C_{12}+C_{66})s_j+(C_{22}+C_{66})](-\epsilon_rs_j^2+p^2\epsilon_\theta)-pe_{31}^2s_j^2\}/\Delta \\
& H_{\varphi j}=-\{(C_{66}s_j^2-p^2C_{22}-C_{66})+p^2[(C_{12}+C_{66})s_j+C_{22}+C_{66}]\}e_{31}s_j/\Delta \\
& \Delta=(C_{66}s_j^2-p^2C_{22}-C_{66})(-\epsilon_rs_j^2+p^2\epsilon_\theta)+pe_{31}^2s_j^2
\end{aligned}
\tag{11-178}
$$

式(11-174)中的头两式在略去含 φ 的项后，便是中间基体层的控制方程，因而可采用和上面相同的解法，即仍采用式(11-175)，不过其中无含 φ_0 的项。由此可得到 4 次方程

$$
\begin{aligned}
& Bs^4+Cs^2+D=0 \\
& B=C_{11}C_{66} \\
& C=-C_{66}(C_{22}+p^2C_{66})-C_{11}(p^2C_{22}+C_{66})+p^2(C_{12}+C_{66})^2 \\
& D=(C_{22}+p^2C_{66})(p^2C_{22}+C_{66})-p^2(C_{12}+C_{66})^2
\end{aligned}
\tag{11-179}
$$

因此，中间基体层的解为

$$
\begin{aligned}
& u_{r0}=\sum_{j=1}^{4}B_jH_{rj}r^{s_j},\quad u_{\theta0}=\sum_{j=1}^{4}B_jr^{s_j} \\
& H_{rj}=p[(C_{12}+C_{66})s_j-(C_{22}+C_{66})]/[C_{11}s_j^2-(C_{22}+p^2C_{66})]
\end{aligned}
\tag{11-180}
$$

从而共有 16 个未知量：上压电层 6 个 A_j，下压电层 6 个 A_j 和基体层 4 个 B_j；同时有 16 个边界条件：两个界面各 4 个，上、下表面各 3 个和 $\theta=0$, θ_0 时的 $\sigma_{\theta z}=0$，因而问题可解。

11.8.2 压电圆柱壳的一阶剪切变形理论

下面讨论图 11-6 所示的一个厚 H，平均半径 R，长 L 和由正交各向异性材料组成的径向极化的压电圆柱壳，采用图示圆柱坐标系(x, θ, z)，其中(x, θ)位于中面上，z 沿中面法线方向，即沿圆柱半径方向，这和常用的符号不同。在一阶剪切变形理论近似中，Kapuria, Sengupta 和 Dumir[219] 提出机械位移可设成下列形式

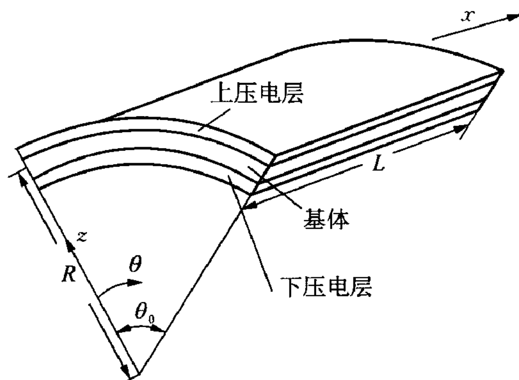


图 11-6 有限长层状圆柱壳结构

$$u = u^0(x,\theta) + z\psi_1(x,\theta), \quad v = v^0(x,\theta) + z\psi_2(x,\theta), \quad w = w^0(x,\theta) \tag{11-181}$$

式中 u^0, v^0, w^0 分别为中面上沿 x、θ 和 z(法向)方向点的位移,ψ_1 和 ψ_2 为中面法线转角。相应的应变为

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_x = u^0_{,x} + z\psi_{1,x}, \quad \varepsilon_\theta = (v^0_{,\theta} ++ z\psi_{2,\theta} + w^0)/(R+z), \quad \varepsilon_z = 0, \quad \gamma_{zx} = \psi_1 + w^0_{,x} \\
&\gamma_{\theta z} = \psi_2 + (w^0_{,\theta} - v^0 - z\psi_2)/(R+z), \quad \gamma_{\theta x} = v^0_{,x} + (u^0_\theta + z\psi_{1,\theta})/(R+z) + z\psi_{2,x}
\end{aligned} \tag{11-182}$$

通常按下式定义中面上的合力 N_x, N_θ, $N_{x\theta}$, $N_{\theta x}$,横向切力 Q_x, Q_θ 和力矩 M_x, M_θ, $M_{x\theta}$, $M_{\theta x}$

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} N_x, N_\theta, N_{x\theta}, N_{\theta x} \\ M_x, M_\theta, M_{x\theta}, M_{\theta x}\end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} 1 \\ z \end{Bmatrix} \left[\sigma_x\left(1+\frac{z}{R}\right), \sigma_\theta, \sigma_{x\theta}\left(1+\frac{z}{R}\right), \sigma_{\theta x}\right]\mathrm{d}z \\
&(Q_x, Q_\theta) = \int_{-h/2}^{h/2} [\sigma_{xz}(1+z/R), \sigma_{\theta z}]\mathrm{d}z
\end{aligned} \tag{11-183}$$

平衡方程为

$$\begin{aligned}
&N_{x,x} + N_{\theta x,\theta}/R + p_x = 0, \quad (Q_\theta + N_{\theta,\theta})/R + N_{x\theta,x} + p_\theta = 0 \\
&Q_{x,x} + (Q_{\theta,\theta} - N_\theta)/R + p_z = 0 \\
&M_{x,x} + M_{\theta x,\theta}/R - Q_x + m_x = 0, \quad M_{\theta,\theta}/R + M_{x\theta,x} - Q_\theta + m_\theta = 0 \\
&(p_x, p_\theta, p_z) = [(1+z/R)(\sigma_{zx}, \sigma_{z\theta}, \sigma_z)]_{-H/2}^{H/2}, \quad (m_x, m_\theta) = [(1+z/R)z(\sigma_{zx}, \sigma_{z\theta})]_{-H/2}^{H/2}
\end{aligned} \tag{11-184}$$

式中 p_x, p_θ, p_z, m_x, m_θ 分别为外加体积力和力矩。边界条件通常取为

$$\begin{aligned}
&N_x \text{ 或 } u^0, N_{x\theta} \text{ 或 } v^0, Q_x \text{ 或 } w^0, M_x \text{ 或 } \psi_1, M_{x\theta} \text{ 或 } \psi_2 (\text{在 } x = 0 \text{ 或 } L) \\
&N_{\theta x} \text{ 或 } u^0, N_\theta \text{ 或 } v^0, Q_\theta \text{ 或 } w^0, M_{\theta x} \text{ 或 } \psi_1, M_\theta \text{ 或 } \psi_2 (\text{在 } \theta = 0 \text{ 或 } \theta_0)
\end{aligned} \tag{11-185}$$

式中 θ_0 是圆柱壳张成的角。利用本构方程式(11-94)和(11-95),可以用位移表示平衡方程,此处从略。对于多层复合壳,可仿照前面的方法处理。

在许多工程问题中,实际上机械场和电场之间的相互耦合作用,并不完全考虑,而是把多层压电复合壳当作整体处理,求解上面讨论过的方程。下压电层作为传感层,把壳的变形转换为电信号,传入控制系统,处理放大后,反馈电压到上压电层的调控层,由于反馈的电压很大且是已知的,所有机械场引起的电场可以忽略。这样一来,求解这里的一阶剪切变形方程已足够,并不需要像前面那样,求解两者的耦合场。

若令 $\psi_1 = -u^0_{3,x}$, $\psi_2 = (u^0_2 - u^0_{3,\theta})/R$,则 $\gamma_{zx} = \gamma_{\theta z} = 0$,圆柱壳的一阶剪切变形理论退化为经典圆柱壳理论。

11.8.3 内充流体的中空圆柱压电壳的三维自由振动分析

1) 基本方程

本小节用三维理论直接讨论内充流体的多层泛函梯度中空圆柱压电壳的三维自由振动问题。假设壳的内半径为 R,厚度为 h,轴向长度为 L。采用圆柱坐标系(r, θ, z),在轴线方向极化的正交各向异性圆柱壳的基本方程如下所示。

几何方程:

$$\varepsilon_r = u_{r,r},\quad \varepsilon_\theta = (u_{\theta,\theta}+u_r)/r,\quad 2\varepsilon_{r\theta} = (u_{r,\theta}-u_\theta)/r+u_{\theta,r}$$
$$\varepsilon_z = u_{z,z},\quad 2\varepsilon_{rz} = u_{z,r}+u_{r,z},\quad 2\varepsilon_{\theta z} = u_{\theta,z}+u_{z,\theta}/r \qquad (11-186)$$
$$E_r = -\varphi_{,r},\quad E_\theta = -\varphi_{,\theta}/r,\quad E_z = -\varphi_{,z}$$

本构方程：

$$\sigma_r = C_{11}\varepsilon_r + C_{12}\varepsilon_\theta + C_{13}\varepsilon_z - e_{31}E_z,\quad \sigma_\theta = C_{12}\varepsilon_r + C_{22}\varepsilon_\theta + C_{23}\varepsilon_z - e_{32}E_z$$
$$\sigma_z = C_{13}\varepsilon_r + C_{23}\varepsilon_\theta + C_{33}\varepsilon_z - e_{33}E_z,\quad \sigma_{\theta z} = 2C_{44}\varepsilon_{\theta z} - e_{24}E_\theta$$
$$\sigma_{rz} = 2C_{55}\varepsilon_{rz} - e_{15}E_r,\quad \sigma_{r\theta} = 2C_{66}\varepsilon_{r\theta},\quad D_r = 2e_{15}\varepsilon_{rz} + \epsilon_{11}E_r \qquad (11-187)$$
$$D_\theta = 2e_{24}\varepsilon_{\theta z} + \epsilon_{22}E_\theta,\quad D_z = e_{31}\varepsilon_r + e_{32}\varepsilon_\theta + e_{33}\varepsilon_z + \epsilon_{33}E_z$$

运动方程(不考虑体积力和体积电荷)：

$$\sigma_{r,r} + \sigma_{r\theta,\theta}/r + \sigma_{zr,z} + (\sigma_r - \sigma_\theta)/r = \rho\ddot{u}_r,\quad \sigma_{r\theta,r} + \sigma_{\theta,\theta}/r + \sigma_{z\theta,z} + 2\sigma_{r\theta}/r = \rho\ddot{u}_\theta$$
$$\sigma_{rz,r} + \sigma_{\theta z,\theta}/r + \sigma_{z,z} + \sigma_{rz}/r = \rho\ddot{u}_z,\quad D_{r,r} + D_r/r + D_{\theta,\theta}/r + D_{z,z} = 0$$
$$(11-188)$$

Chen，Bian，Lv 和 Ding[220, 221]采用状态空间方法进行分析，把式(11－186)～(11－188)改写成

$$\boldsymbol{Y}_{,r} = \boldsymbol{MY},\ \boldsymbol{Y} = [u_z,\ u_\theta,\ \sigma_r,\ D_r,\ \sigma_{rz},\ \sigma_{r\theta},\ u_r,\ \varphi]^{\mathrm{T}} \qquad (11-189)$$

式中 $\boldsymbol{M}$ 为 8×8 的矩阵，其元素为

$$M_{14} = M_{85} = \frac{e_{15}}{\alpha},\quad M_{15} = \frac{\epsilon_{11}}{\alpha},\quad M_{17} = \frac{\partial}{\partial z},\quad -M_{22} = M_{44} = M_{55} = \frac{1}{2}M_{66} = -\frac{1}{r},\quad M_{26} = \frac{1}{C_{66}}$$
$$M_{27} = M_{36} = -\frac{\partial}{r\partial\theta},\quad M_{31} = -M_{57} = \frac{k_2\partial}{r\partial z},\quad M_{32} = -M_{67} = \frac{k_1\partial}{r^2\partial\theta},\quad M_{33} = \frac{1}{r}\left(\frac{C_{12}}{C_{11}}-1\right)$$
$$M_{35} = -\frac{\partial}{\partial z},\quad M_{37} = \frac{\rho\partial^2}{\partial t^2} + \frac{k_1}{r^2},\quad M_{38} = -M_{47} = \frac{k_3\partial}{r\partial z},\quad M_{41} = -\frac{e_{24}\partial^2}{r^2\partial\theta^2} - \frac{k_5\partial^2}{\partial z^2}$$
$$M_{42} = M_{68} = -\frac{(e_{24}+k_3)\partial^2}{r\partial\theta\partial z},\quad M_{43} = -\frac{e_{31}\partial}{C_{11}\partial z},\quad M_{48} = \frac{\epsilon_{22}\partial^2}{r^2\partial\theta^2} + \frac{k_6\partial^2}{\partial z^2}$$
$$M_{51} = \frac{\rho\partial^2}{\partial t^2} - \frac{C_{44}\partial^2}{r^2\partial\theta^2} - \frac{k_4\partial^2}{\partial z^2},\quad M_{52} = M_{61} = -\frac{(C_{44}+k_2)\partial^2}{r\partial\theta\partial z},\quad M_{53} = -\frac{C_{31}\partial}{C_{11}\partial z}$$
$$M_{58} = -\frac{e_{24}\partial^2}{r^2\partial\theta^2} - \frac{k_5\partial^2}{\partial z^2},\quad M_{62} = \frac{\rho\partial^2}{\partial t^2} - \frac{k_1\partial^2}{r^2\partial\theta^2} - \frac{C_{44}\partial^2}{\partial z^2},\quad M_{63} = -\frac{C_{12}\partial}{C_{11}r\partial\theta},\quad M_{71} = -\frac{C_{31}\partial}{C_{11}\partial z}$$
$$M_{72} = -\frac{C_{12}\partial}{C_{11}r\partial\theta},\quad M_{73} = \frac{1}{C_{11}},\quad M_{77} = -\frac{C_{12}}{C_{11}r},\quad M_{78} = -\frac{e_{31}\partial}{C_{11}\partial z},\quad M_{84} = -\frac{C_{55}}{\alpha},\quad \text{其余 } M_{ij} = 0$$
$$(11-190)$$

式中

$$\alpha = C_{55}\epsilon_{11} + e_{15}^2,\ k_1 = C_{22} - \frac{C_{12}^2}{C_{11}},\ k_2 = C_{23} - \frac{C_{12}C_{13}}{C_{11}},\ k_3 = e_{32} - \frac{C_{12}e_{31}}{C_{11}}$$
$$k_4 = C_{33} - \frac{C_{13}^2}{C_{11}},\ k_5 = e_{33} - \frac{C_{13}e_{31}}{C_{11}},\ k_6 = \epsilon_{33} + \frac{e_{31}^2}{C_{11}}$$
$$(11-191)$$

对于两端简支和电学开路的绝缘壳，其边界条件为

$$u_r = u_\theta = \sigma_z = D_z = 0(z = 0,\ L) \tag{11-192}$$

2）解的形式

满足式(11－192)的解可设为

$$\boldsymbol{Y} = \begin{Bmatrix} u_z \\ u_\theta \\ \sigma_r \\ D_r \\ \sigma_{rz} \\ \sigma_{r\theta} \\ u_r \\ \varphi \end{Bmatrix} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \begin{Bmatrix} R_0\ \overline{u}_z(\eta)\cos m\pi\varsigma\cos n\theta \\ R_0\ \overline{u}_\theta(\eta)\sin m\pi\varsigma\sin n\theta \\ C_{44}\ \overline{\sigma}_r(\eta)\sin m\pi\varsigma\cos n\theta \\ \sqrt{C_{44}\epsilon_{33}}\ \overline{D}_r(\eta)\cos m\pi\varsigma\cos n\theta \\ C_{44}\ \overline{\sigma}_{rz}(\eta)\cos m\pi\varsigma\cos n\theta \\ C_{44}\ \overline{\sigma}_{r\theta}(\eta)\sin m\pi\varsigma\sin n\theta \\ R_0\ \overline{u}_r(\eta)\sin m\pi\varsigma\cos n\theta \\ R_0\sqrt{C_{44}/\epsilon_{33}}\ \overline{\varphi}(\eta)\cos m\pi\varsigma\cos n\theta \end{Bmatrix} e^{i\omega t} \tag{11-193}$$

式中 $R_0 = R + h/2$，$\eta = r/R_0$，$\varsigma = z/L$，为量纲一量，m，n 为整数，ω 为圆频率。把式(11－193)代入(11－189)，可得待定函数$\overline{\boldsymbol{Y}}$的方程

$$\overline{\boldsymbol{Y}}_{,\eta} = \boldsymbol{N}\overline{\boldsymbol{Y}},\ \overline{\boldsymbol{Y}} = [\overline{u}_z,\ \overline{u}_\theta,\ \overline{\sigma}_r,\ \overline{D}_r,\ \overline{\sigma}_{rz},\ \overline{\sigma}_{r\theta},\ \overline{u}_r,\ \overline{\varphi}]^{\mathrm{T}} = e^{N\eta}\,\overline{\boldsymbol{Y}}_0 \tag{11-194}$$

式中$\overline{\boldsymbol{Y}}_0$ 为待求常矢量，$\boldsymbol{N}$ 为 8×8 的矩阵，其元素为

$$\begin{aligned}
&N_{14} = N_{85} = e_{15}\sqrt{C_{44}\epsilon_{33}}/(C_{55}\epsilon_{11} + e_{15}^2),\quad N_{15} = C_{44}\epsilon_{11}/(C_{55}\epsilon_{11} + e_{15}^2),\quad N_{17} = -\lambda \\
&N_{22} = 1/\eta,\quad N_{26} = C_{44}/C_{66},\quad N_{27} = n/\eta,\quad N_{31} = d_1\lambda/\eta,\quad N_{32} = -d_3 n/\eta^2 \\
&N_{33} = (C_{12}/C_{11} - 1)/\eta,\quad N_{35} = \lambda,\quad N_{36} = -n/\lambda,\quad N_{37} = -d_3/\eta^2 - \Omega^2 \\
&N_{38} = N_{47} = -d_4\lambda/\eta,\quad N_{41} = N_{58} = e_{24}n^2/\sqrt{C_{44}\epsilon_{33}}\,\eta^2 + d_2\lambda^2 \\
&N_{42} = -(e_{24}/\sqrt{C_{44}\epsilon_{33}} + d_4)n\lambda/\eta,\quad N_{43} = -N_{78} = -e_{31}\lambda\sqrt{C_{44}}/C_{11}\sqrt{\epsilon_{33}},\quad N_{44} = -1/\eta \\
&N_{48} = -\epsilon_{22}n^2/\epsilon_{33}\eta^2 - d_5\lambda^2,\quad N_{51} = n^2/\eta^2 - d_6\lambda^2 - \Omega^2,\quad N_{52} = N_{61} = -(1 - d_1)n\lambda/\eta \\
&N_{53} = -C_{13}\lambda/C_{11},\quad N_{55} = -1/\eta,\quad N_{57} = d_1\lambda/\eta,\quad N_{62} = \lambda^2 - d_3 n^2/\eta^2 - \Omega^2 \\
&N_{63} = C_{12}n/C_{11}\eta,\quad N_{66} = -2/\eta,\quad N_{67} = -d_3 n/\eta^2,\quad N_{68} = -(e_{24}/\sqrt{C_{44}\epsilon_{33}} + d_4)n\lambda/\eta \\
&N_{71} = C_{13}\lambda/C_{11},\quad N_{72} = -C_{12}n/C_{11}\eta,\quad N_{73} = C_{44}/C_{11} \\
&N_{77} = -C_{12}/C_{11}\eta,\quad N_{84} = -C_{55}\epsilon_{33}/(C_{55}\epsilon_{11} + e_{15}^2),\quad \text{其余 } N_{ij} = 0
\end{aligned} \tag{11-195}$$

式中

$$\begin{aligned}
&\lambda = \frac{R_0 m\pi}{L},\ \Omega^2 = \frac{R_0^2\omega^2\rho}{C_{44}},\ d_1 = \frac{C_{12}C_{13}}{C_{11}C_{14}} - \frac{C_{23}}{C_{44}},\ d_2 = \frac{e_{33}}{\sqrt{C_4 4\epsilon_{13}}} - \frac{C_{13}e_{31}}{C_{11}\sqrt{C_{44}\epsilon_{33}}} \\
&d_3 = \frac{C_{12}^2}{C_{11}C_{14}} - \frac{C_{22}}{C_{44}},\ d_4 = \frac{e_{32}}{\sqrt{C_{44}\epsilon_{33}}} - \frac{C_{12}e_{31}}{C_{11}\sqrt{C_{44}\epsilon_{33}}},\ d_5 = 1 + \frac{e_{31}^2}{C_{11}\epsilon_{33}},\ d_6 = \frac{C_{13}^2}{C_{11}C_{14}} - \frac{C_{33}}{C_{44}}
\end{aligned} \tag{11-196}$$

3）边界条件

上面的解已满足两端简支和电学开路的条件，现在还需使$\overline{\boldsymbol{Y}}$满足圆柱的内、外表面上的边

界条件。因圆柱充满理想可压缩流体，故需要讨论最简单的流固耦合问题，以给出机械边界条件[213, 214]。小扰动时，线性化无旋理想流体的运动是有势的，它服从方程

$$\ddot{\Phi}-c_f^2\nabla^2\Phi=0,\quad \boldsymbol{v}_f=\dot{\boldsymbol{u}}_f=\nabla\Phi,\ c_f^2=(\partial p_f/\partial\rho_f)_s,\ p_f=-\rho_f\dot{\Phi}$$
$$\nabla^2=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\tag{11-197}$$

式中 $\boldsymbol{u}_f$，$\boldsymbol{v}_f$，Φ，c_f，p_f，ρ_f 分别是流体中的位移、速度、速度势、等熵声速、流体压力和密度。在流体和圆柱壳的界面上，法向速度和法向应力必需相等，即圆柱内、外表面的边界条件是

$$v_r=v_{fr},\quad p_f+\sigma_r=0,\quad \sigma_{rz}=\sigma_{r\theta}=0(r=R,\ R+h)\tag{11-198}$$

根据式(11-197)和 $r=0$ 时速度有界的限制，对于任意的 $(m,\ n)$，可设

$$\Phi=BB_n(\kappa\eta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\sin m\pi\varsigma\cos n\theta,\quad \kappa^2=(\omega R_o/c_f)^2-(m\pi R_0/L)^2$$
$$B_n(\kappa\eta)=\mathrm{J}_n(\kappa\eta),\kappa^2\geqslant 0;\quad B_n(\kappa\eta)=\mathrm{I}_n(\mathrm{i}\kappa\eta),\kappa^2<0\tag{11-199}$$

式中 B 为任意常数，$\mathrm{J}_n(\kappa\eta)$，$\mathrm{I}_n(\mathrm{i}\kappa\eta)$ 分别为第一类和修正的第一类 Bessel 函数。一般解可由式(11-199)代表的解叠加而成。利用在圆柱表面 $v_r=v_{fr}$ 或 $u_r=u_{fr}$，由上式推出

$$v_{fr}=\Phi_{,r}=(\kappa/R_0)BB'_n(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\sin m\pi\varsigma\cos n\theta,\ \xi=\kappa\eta$$
$$u_{fr}=(\mathrm{i}\omega)^{-1}(\kappa/R_0)BB'_n(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\sin m\pi\varsigma\cos n\theta\tag{11-200}$$
$$p_f=-\mathrm{i}\rho_f\omega BB_n(\xi)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\sin m\pi\varsigma\cos n\theta=(\rho_f/\kappa)R_0^2\omega^2(B_n/B'_n)\,\overline{u}_{fr}$$

式中 $B_n'(\xi)$ 表示 $B_n(\xi)$ 对 ξ 的导数。忽略静止时流体的压力，对于确定的 $(m,\ n)$ 分量，可求得

$$\bar{\sigma}_r\big|_{r=R,\ R+h}=-\frac{1}{\kappa}\frac{\rho_f}{\rho}\frac{R^2\omega^2}{c_s^2}\frac{B_n(\bar{\kappa})}{B'_n(\bar{\kappa})}\,\overline{u}_r,\ c_s^2=\frac{C_{44}}{\rho}\tag{11-201}$$

式中 c_s 为压电体中的剪切波速。当 $r=R$ 时，$\bar{\kappa}=\kappa$；当 $r=R+h$ 时，$\bar{\kappa}=\kappa[(R+h)/R]$。

圆柱内、外表面上给定的力学边界条件通常是式(11-198)，而电学边界条件要分以下两种情况：

电学开路：$D_r=0$，　或电学短路：$\overline{\varphi}=0(r=R,\ R+h)$　(11-202)

4）*频率方程*

式(11-194)中的 $\overline{\boldsymbol{Y}}=e^{N\eta}\overline{\boldsymbol{Y}}_0$ 把外表面的物理量和内表面的量联系了起来。代入内、外表面的边界条件便可求解问题。特别是当内、外表面的给定量，除表面的法向应力等于流体压力外都是零时，便组成 $(u_r,\ u_\theta,\ u_z,\ D_r)$（电学短路）或 $(u_r,\ u_\theta,\ u_z,\ \varphi)$（电学开路）的频率齐次方程，用以确定自振频率。如对只有内表面法向应力的电学短路情形，有

$$[\overline{u}_z,\ \overline{u}_\theta,\ 0,\ \overline{D}_r,\ 0,\ 0,\ \overline{u}_r,\ 0]^{\mathrm{T}}_{外部}=\boldsymbol{T}[\overline{u}_z,\ \overline{u}_\theta,\ \bar{\sigma}_{r0},\ \overline{D}_r,\ 0,\ 0,\ \overline{u}_r,\ 0]^{\mathrm{T}}_{内部},\ \boldsymbol{T}=e^{N\eta}$$

式中 $\bar{\sigma}_{r0}=\bar{\sigma}_r\big|_{r=R}$ 由式(11-201)确定，是圆柱内表面流体压力的负值。由上式推出

$$\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\0\end{Bmatrix}=\begin{bmatrix}T_{31}&T_{32}&T_{34}&T_{37}+T_{33}\,\bar{\sigma}_{r0}\\T_{51}&T_{52}&T_{54}&T_{57}+T_{53}\,\bar{\sigma}_{r0}\\T_{61}&T_{62}&T_{64}&T_{67}+T_{63}\,\bar{\sigma}_{r0}\\T_{81}&T_{82}&T_{84}&T_{87}+T_{83}\,\bar{\sigma}_{r0}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\overline{u}_z\\\overline{u}_\theta\\\overline{D}_r\\\overline{u}_r\end{Bmatrix}\tag{11-203}$$

对于多层圆柱，可采用 9.4.2 节的传递矩阵方法处理。

5）**无限长圆柱**

对于无限长圆柱，无需考虑纵向边界条件，因而在式(11－178)中没有含 $m\pi\varsigma$ 的项，从而也无需对 m 求和，成为单无限级数。

11.8.4 泛函梯度压电扁壳的近似理论

图 11－7 表示一厚 $2h$ 的扁壳，通常在中面上取正交曲线$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，其中$(\alpha_1, \alpha_2)$为曲线坐标系，相应的 Lamé 参数为 H_1，H_2，曲率半径为 R_1，R_2；而 α_3 为垂直于中面的直线坐标。设(u_1, u_2, u_3, φ)为正交曲线坐标系中的广义位移，则广义应变为

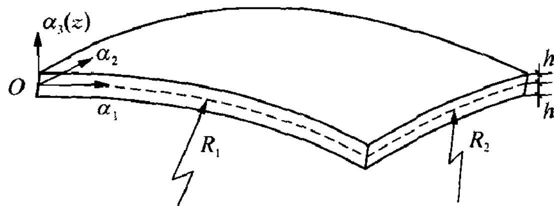


图 11－7　一般压电壳体

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_{11}=\frac{\partial u_1}{H_1\partial\alpha_1}+\frac{u_2}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}+\frac{u_3}{R_1},\quad \varepsilon_{22}=\frac{\partial u_2}{H_2\partial\alpha_2}+\frac{u_1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}+\frac{u_3}{R_2}\\
&\varepsilon_{33}=\frac{\partial u_3}{\partial\alpha_3},\quad \gamma_{23}=\frac{\partial u_2}{\partial\alpha_3}+\frac{\partial u_3}{H_2\partial\alpha_2}-\frac{u_2}{R_2},\quad \gamma_{13}=\frac{\partial u_1}{\partial\alpha_3}+\frac{\partial u_3}{H_1\partial\alpha_1}-\frac{u_1}{R_1}\\
&\gamma_{12}=\frac{\partial u_1}{H_2\partial\alpha_2}+\frac{\partial u_2}{H_1\partial\alpha_1}-\frac{u_2}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}-\frac{u_1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}\\
&E_1=-\frac{\partial\varphi}{H_1\partial\alpha_1},\quad E_2=-\frac{\partial\varphi}{H_2\partial\alpha_2},\quad E_3=-\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha_3}
\end{aligned}
\tag{11-204}
$$

本处假设材料性质只沿厚度方向变化，即 $C_{ijkl}(z)$，$e_{kij}(z)$，$\epsilon_{ij}(z)$，其中 $z=\alpha_3$。

Wu，Chen，Shen 和 Tian[222] 设广义位移为

$$
\begin{aligned}
&u_1=u_1^0(\alpha_1,\alpha_2)+zu_1^{(1)}(\alpha_1,\alpha_2),\quad u_2=u_2^0(\alpha_1,\alpha_2)+zu_2^{(1)}(\alpha_1,\alpha_2)\\
&u_3=u_3^0(\alpha_1,\alpha_2)+zu_3^{(1)}(\alpha_1,\alpha_2),\quad \varphi=\varphi^0(\alpha_1,\alpha_2)+z\varphi^{(1)}(\alpha_1,\alpha_2)+z^2\varphi^{(2)}(\alpha_1,\alpha_2)
\end{aligned}
\tag{11-205}
$$

由上式可求出广义应变，代入式(11－106)中的变分公式，在正交曲线坐标系中，$\mathrm{d}V=H_1H_2\mathrm{d}\alpha_1\mathrm{d}\alpha_2\mathrm{d}z$，同时令 $1+z/R_1\approx1$，$1+z/R_2\approx1$。完成变分后，令自由变分量前的系数为零，便可求得薄壳的近似方程。由变分公式，得中面上单元的广义运动方程为

$$
\begin{aligned}
\delta u_1^0:\ &\frac{\partial(H_2N_{11})}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial(H_1N_{12})}{\partial\alpha_2}+N_{12}\frac{\partial H_1}{\partial\alpha_2}-N_{22}\frac{\partial H_2}{\partial\alpha_1}+N_{31}\frac{H_1H_2}{R_1}+\\
&H_1H_2(T_1^{*+}+T_1^{*-})=H_1H_2(\rho_0\ddot{u}_1^0+\rho_1\ddot{u}_1^1)\\
\delta u_2^0:\ &(H_2N_{12})_{,1}+(H_1N_{22})_{,2}+N_{12}H_{2,1}-N_{11}H_{1,2}+N_{32}H_1H_2/R_2+\\
&H_1H_2(T_2^{*+}+T_2^{*-})=H_1H_2(\rho_0\ddot{u}_2^0+\rho_1\ddot{u}_2^1)\\
\delta u_3^0:\ &(H_2N_{13})_{,1}+(H_1N_{32})_{,2}-N_{11}H_1H_2/R_1-N_{22}H_1H_2/R_2+\\
&H_1H_2(T_3^{*+}+T_3^{*-})=H_1H_2(\rho_0\ddot{u}_3^0+\rho_1\ddot{u}_3^1)_3\\
\delta u_1^{(1)}:\ &(H_2M_{11})_{,1}+(H_1M_{12})_{,2}+M_{12}H_{1,2}-M_{22}H_{2,1}+M_{31}H_1H_2/R_1-\\
&N_{13}H_1H_2+H_1H_2(hT_1^{*+}-hT_1^{*-})=H_1H_2(\rho_1\ddot{u}_1^0+\rho_2\ddot{u}_1^1)\\
\delta u_2^{(1)}:\ &(H_2M_{12})_{,1}+(H_1M_{22})_{,2}+M_{12}H_{2,1}-M_{11}H_{1,2}+M_{32}H_1H_2/R_2-
\end{aligned}
$$

$$N_{23}H_1H_2+H_1H_2(hT_2^{*+}-hT_2^{*-})=H_1H_2(\rho_1\ddot{u}_2^0+\rho_2\ddot{u}_2^1)$$

$$\delta u_3^{(1)}:(H_2M_{13})_{,1}+(H_1M_{23})_{,2}-M_{11}H_1H_2/R_1-M_{22}H_1H_2/R_2-$$

$$N_{33}H_1H_2+H_1H_2(hT_3^{*+}-hT_3^{*-})=H_1H_2(\rho_1\ddot{u}_3^0+\rho_2\ddot{u}_3^1)$$

$$\delta\varphi^0:(H_2D_1^0)_{,1}+(H_1D_2^0)_{,2}+H_1H_2(\sigma_1^{*+}+\sigma_1^{*-})=0$$

$$\delta\varphi^{(1)}:(H_2D_1^{(1)})_{,1}+(H_1D_2^{(1)})_{,2}-H_1H_2D_3^0+H_1H_2(h\sigma_1^{*+}-h\sigma_1^{*-})=0$$

$$\delta\varphi^{(2)}:(H_2D_1^{(2)})_{,1}+(H_1D_2^{(2)})_{,2}-H_1H_2D_3^{(1)}+H_1H_2(h^2\sigma_1^{*+}-h^2\sigma_1^{*-})=0$$

(11-206)

自然边界条件为

$$\delta u_1^0:N_{11}n_1+N_{12}n_2=\overline{T}_1,\quad \delta u_2^0:N_{12}n_1+N_{22}n_2=\overline{T}_2$$

$$\delta u_3^0:N_{13}n_1+N_{32}n_2=\overline{T}_3,\quad \delta u_1^{(1)}:M_{11}n_1+M_{12}n_2=\overline{M}_1$$

$$\delta u_2^{(1)}:M_{12}n_1+M_{22}n_2=\overline{M}_2,\quad \delta u_3^{(1)}:M_{13}n_1+M_{23}n_2=\overline{M}_3 \tag{11-207}$$

$$\delta\varphi^0:D_1^0n_1+D_2^0n_2=-\sigma^{0*},\quad \delta\varphi^{(1)}:D_1^{(1)}n_1+D_2^1n_2=-\sigma^{1*}$$

$$\delta\varphi^{(2)}:D_1^{(2)}n_1+D_2^{(2)}n_2=-\sigma^{2*}$$

式中 T_i^{*+} 表示上、下表面的面力，$(T_1^{*+}+T_1^{*-})$ 是折算到中面的面力。

$$(\overline{T}_i,\ \overline{M}_i)=\int_{-h}^{h}T_i^*(1,\ z)\mathrm{d}z,\quad (D_i^0,\ D_i^{(1)},\ D_i^{(2)})=\int_{-h}^{h}D_i(1,\ z,\ z^2)\mathrm{d}z$$

$$(\sigma^{0*},\ \sigma^{(1)*},\ \sigma^{(2)*})=\int_{h}^{h}\sigma^*(1,\ z,\ z^2)\mathrm{d}z \tag{11-208}$$

$$(\rho_0,\ \rho_1,\ \rho_2)=\int_{h}^{h}\rho(1,\ x_3,\ x_3^2)\mathrm{d}x_3,\quad (N_{ij},\ M_{ij})=\int_{-h}^{h}(1,\ z)\sigma_{ij}\mathrm{d}z$$

应当注意，使用变分公式(11-106)时，广义位移必须满足边界条件。如果在近似计算中，希望放松广义位移的边界条件，特别是在实际问题中，电学边界条件往往给的是电势，要想放宽电势的边界条件，需要采用其他的变分原理，如广义或混合变分原理。

利用本构方程，可以求出用广义位移表示的控制方程，由于过于复杂，此处从略。

第12章

压电体的破坏理论

12.1 实验研究

12.1.1 含裂纹的紧凑拉伸实验

Park 和 Sun[223]进行了含裂纹的 PZT－4 材料的紧凑拉伸实验，试件形状如图 12－1 所示，其尺寸为 25.5×19.1×5.1 (mm)。裂纹长度为 $a=6.9$ mm，韧带长度为 14 mm，极化方向沿轴 x_3 方向(即厚度方向)。试件放入硅油中，使裂纹得到更好的绝缘和避免放电。实验是在不同的固定电压下施加机械载荷，直至破坏，载荷产生的应力由有限元计算。实验结果表示于图 12－2 上。由结果可见，正电场加速裂纹扩展，断裂韧性降低较慢；负电场阻止裂纹扩展，断裂韧性增加较快。

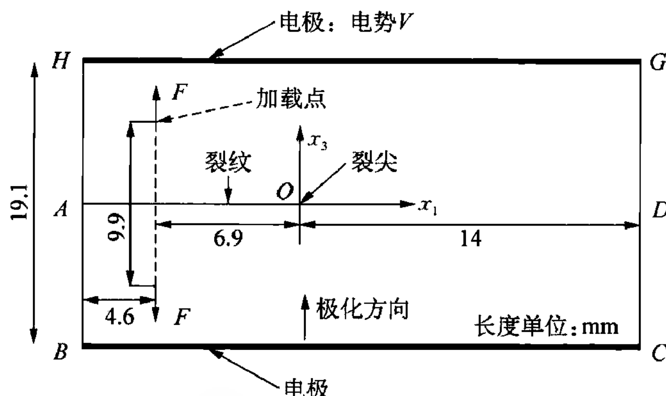


图 12－1　承受机械和电载荷的紧凑拉伸试件

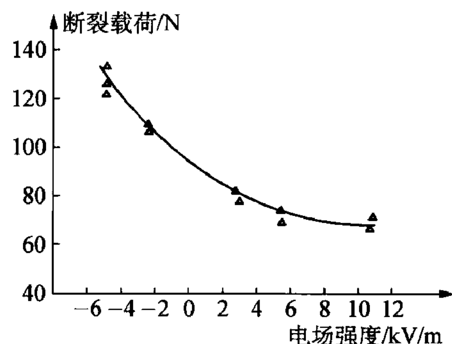


图 12－2　不同外加电场作用下紧凑拉伸试件的断裂载荷

Fang，Zhang，Soh 和 Lee[224]进行了 PZT－5 材料的中心裂纹板的拉伸和电载荷实验，板沿裂纹垂直方向极化，其尺寸为 40×20×3(mm)，上下表面(面积为 40 mm×3 mm)涂银做电极，承受拉伸和电载荷。他们的结果和 Park 和 Sun[223]的类似，同样得出结论：正电场降低断裂韧性，负电场增加断裂韧性。

12.1.2 含裂纹的不对称三点弯曲实验

Park 和 Sun[223]还进行了含裂纹的 PZT－4 材料的不对称三点弯曲实验，模拟混合断裂情形，试件形状如图 12－3 所示，其尺寸为 19.1×9×5.1 (mm)。裂纹长度为 4.0 mm，分别开在试件对称轴上和偏离对称轴 2 mm，4 mm 处；韧带长度为 5 mm，极化方向垂直于裂纹和载荷。实验结果表示于图 12－4 上。由结果可见，偏心引起断裂韧性降低。

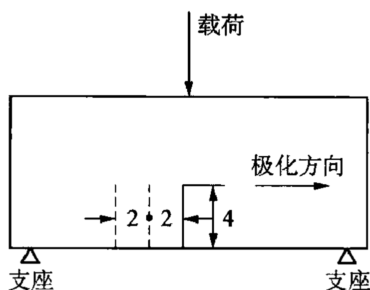


图 12-3 偏心三点弯曲试件

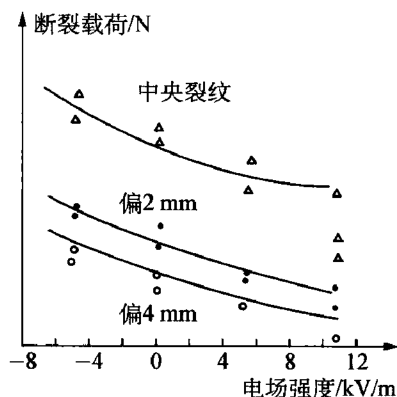


图 12-4 不同外加电场下偏心三点弯曲试件的断裂载荷

12.1.3 不含裂纹的光滑对称三点弯曲实验

Fu 和 Zhang[225]进行了不含裂纹的 PZT－841(材料性质接近于 PZT－4)材料的对称三点弯曲实验，试件尺寸为 10×4×3.2 (mm)，支撑点间的跨度为 6 mm，试件的极化方向沿试件长度方向。载荷产生的应力由有限元计算。实验结果表示于图 12-5 上。由结果可见，正负电场都引起弯曲强度降低。

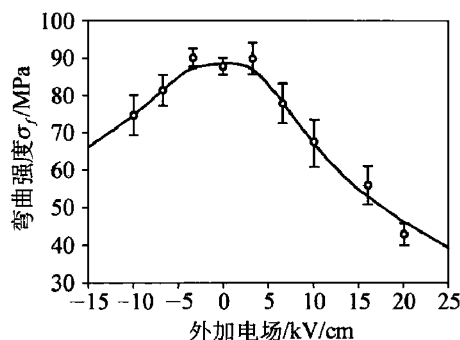


图 12-5 无裂纹三点弯曲试件的断裂载荷与电场的关系

12.1.4 压痕实验

Vicker 压痕实验是把方形金刚石角锥在给定外力下压入试件，沿角点产生径向半硬币型裂纹和扩展，垂直极化方向的裂纹较长，平行极化方向的较短(图 12-6)。Jiang 和 Sun[219]的实验表明，载荷较小时(9 N)，随正电场增加，裂纹长度也增加；随负电场增加，裂纹长度减少；载荷较大时(49 N)，随正负电场增加，裂纹长度均增加，不过负电场增加较少。他们还用理论分析来证明他们的结果，Wang 和 Singh[220]的实验表明，在 11.8 N 载荷下，随正电场增加，裂纹长度降低；随负电场增加，裂纹长度增加或不减少。实验结果存在一定差别。

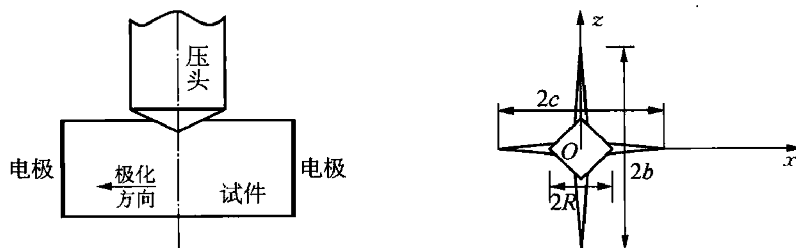


图 12-6 Vicker 压头的压痕实验

12.2 理论分析

对压电介质的破坏问题已进行了许多实验研究，一般很难在试件中制造出比较理想的裂纹，实际进行的都是带有微圆弧端部的狭长切口试件；同时由于实验的困难，不同作者的实验结果也存在一定差别，所以仍需进行大量的实验工作。

12.2.1 应力和电位移强度因子准则

在线弹性断裂力学的断裂理论中，I 型问题常用单参数的应力强因子 K_{I} 或 J_{I} 积分作为断裂参数，对复合型问题，K_{I}，K_{II} 的组合常用作断裂准则，得到较为广泛的应用，取得了一定的成功。人们自然地想到把这一准则应用到压电体中，同时采用应力强度因子和电位移强度因子。对于复合加载情形，可能的破坏准则是

$$f(K_{\mathrm{I}},\ K_{\mathrm{II}},\ K_{\mathrm{III}},\ K_{\mathrm{D}} \text{ 或 } K_{\mathrm{E}}) = K_{\mathrm{c}} \tag{12-1}$$

式中 K_{c} 为临界载荷。这样的准则对不同的压电体可能具有不同的表达式，需要继续研究。上式中 K_{D} 或 K_{E} 所起的作用和 K_{I}，K_{II}，K_{III} 是不一样的，实验表明，纯电场时的电能需要比机械能高得多时才能使试件破坏。另外，在压电体的线性分析中，应力强度因子和外加电位移场无关，电位移强度因子和外加应力场无关，这也不符合事实，理论模型还有待改进。

Fang 等[224]在他们的实验范围内(约 $K_{\mathrm{I}} < 1.5\ \mathrm{Pa \cdot m^{1/2}}$，$-2.5\times10^{4}\ \mathrm{V \cdot m^{-1/2}} < K_{\mathrm{E}} < 4\times10^{4}\ \mathrm{V \cdot m^{1/2}}$)，用最小二乘法拟合实验数据，得到的准则是

$$K_{\mathrm{I}} + 18.193K_{\mathrm{E}} - 2.641 + 10^{4}K_{\mathrm{E}}^{2} = 803\,505.949$$

12.2.2 能量释放率准则

1) 总能量释放率准则

在线性情况下，总能量释放率 $\widetilde{G}$ 和 J 积分是相同的。对于纯弹性问题，$\widetilde{G}$ 和 J 的表达式分别为第 1 章的式(1-28)和(1-29)；对于压电体，J 的积分由式(3-123)和(5-83)表示，$\widetilde{G}$ 由式(5-82)表示。对于非均匀材料，可查看式(3-141)和(3-153)。Suo，Kuo，Barnett，Willis[40]推出总能量释放率和应力强度因子的关系如式(5-38)所示。该式认为，对称加载的未极化的均匀铁电陶瓷，电位移强度因子给出的能量释放率总是负的，所以总是阻止裂纹扩展，这和实验不符。

对于图 12-1 所示的 PZT-4 材料的紧凑拉伸试件(属 I 型断裂)，计算得到

$$\widetilde{G}_{\mathrm{I}} = (\pi a/2)[2.29\times10^{11}(\sigma_{33}^{\infty})^{2} + 2.35\times10^{11}\sigma_{33}^{\infty}E_{3}^{\infty} - 8.78\times10^{9}(E_{3}^{\infty})^{2}](\mathrm{N/m})$$

上式表明，当机械应力较小时，外加电载荷总是阻止裂纹扩展的，这与实验事实不符。

2) 机械能量释放率准则

Park 和 Sun[223]提出压电体的破坏决定于机械能 $G_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{M})}$。对于图 12-1 所示的紧凑拉伸试件，得到

$$\begin{aligned} G_{\mathrm{I}}^{(\mathrm{M})} &= \lim_{\Delta\to0}\frac{1}{2\Delta}\int_{0}^{\Delta}\{\sigma_{33}(r_1)[u_3^{+}(\Delta-r_1)-u_3(\Delta-r_1)]\} = \\ &(\pi a/2)[2.28\times10^{-11}(\sigma_{33}^{\infty})^{2} + 1.21\times10^{-11}\sigma_{33}^{\infty}E_{3}^{\infty}](\mathrm{N/m}) \end{aligned} \tag{12-2}$$

这一准则显示，正电场（电场方向和极化方向一致）增加能量释放率，降低断裂韧性；负电场降低能量释放率，增加断裂韧性。用上式作出的电场与断裂载荷的曲线在图 12-2 上用实线表示，由图可见，理论曲线和实验点符合较好。如果外载荷是纯电场，虽然实验表明，需要比机械能高得多的电能才能使试件破坏，但按机械能量释放率准则是不会破坏试件的，这也与事实不符。不过，对于机械载荷较大的情况，可以认为机械能量释放率准则还是较好的。

12.2.3 局部能量释放率准则

实验表明，对于压电陶瓷材料，机械强度很高，不易屈服，但在大电场时易于饱和。针对这种情况，类似于断裂力学中的 Dugdale 模型，Gao, Zhang 和 Tong[228] 提出电学条形区域模型，即在裂尖附近，除去极接近裂尖的过程区，变形是弹性的，但电场已经饱和，材料的断裂决定于裂尖电学饱和区内和过程区外的局部 J 积分值（图 12-7）。这一理论的物理意义较为明确，但需裂尖后方没有放电现象。Gao 等采用了一个简化本构模型，用以定性分析电场对压电体破坏的影响。他们取用的简化本构模型是

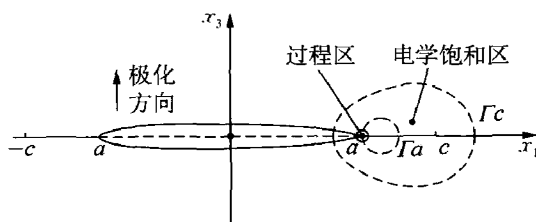


图 12-7 局部 J 积分准则理论模型

$$
\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{32} \\ \sigma_{31} \\ \sigma_{12} \\ D_1 \\ D_2 \\ D_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} M & * & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e \\ * & M & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e \\ * & * & M & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -e \\ 0 & 0 & 0 & M & 0 & 0 & 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M & 0 & -e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e & 0 & \epsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e & 0 & 0 & 0 & \epsilon & 0 \\ -e & -e & e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{32} \\ 2\varepsilon_{31} \\ 2\varepsilon_{12} \\ E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{Bmatrix} \tag{12-3}
$$

式中带 * 的项表示在现在的模型分析中不出现，所以不必明显写出。在这一简单模型中只有 3 个材料常数 M, e, ϵ。

1）极化垂直于裂纹

讨论带有位于 x_1 横轴上、长 $2a$ 的中心裂纹的无限板，坐标原点取在裂纹中点，极化沿 x_3 方向（垂直于裂纹，图 12-7），讨论 (x_1, x_3) 平面。进一步设只有 x_3 方向的位移，即

$$u_1 = 0, \quad u_3 = u_3(x_1, x_3), \quad E_i = -\varphi_{,i} \tag{12-4}$$

取 ε_{ij}, E_i 为自变量。把式(12-4)代入(12-3)，便得

$$
\begin{aligned} \sigma_{13} &= Mu_{3,1} + e\varphi_{,1}, \quad \sigma_{33} = Mu_{3,3} + e\varphi_{,3} \\ D_1 &= eu_{3,1} - \epsilon\varphi_{,1}, \quad D_3 = eu_{3,3} - \epsilon\varphi_{,3} \end{aligned} \tag{12-5}
$$

再代入平衡方程 $\sigma_{ij,j} = 0$ 和电位移的 Gauss 方程 $D_{i,i} = 0$，便得比一般压电体简单得多的方程

$$\nabla^2 u_3 = 0, \quad \nabla^2 \varphi = 0 \tag{12-6}$$

正如前面指出，可引入复势 $U(z)$ 和 $\Phi(z)$，用复变函数方法求解，以下取复势的虚部，即令

$$u_3 = \mathrm{Im}[U(z)],\quad \varphi = \mathrm{Im}[\Phi(z)],\quad \sigma_{33} + \mathrm{i}\sigma_{31} = MU'(z) + e\Phi'(z)$$
$$D_3 + \mathrm{i}D_1 = eU'(z) - \epsilon\Phi'(z),\quad E_3 + \mathrm{i}E_1 = -\Phi'(z),\ z = x_1 + \mathrm{i}x_3 \tag{12-7}$$

讨论电学饱和条形模型。设在裂纹前方 $a < x_1 \leqslant c$，$x_3 = 0$ 上电学饱和，从而边界条件为

$$\begin{aligned}&\sigma_{33} + \mathrm{i}\sigma_{31} = \sigma^\infty,\quad E_3 + \mathrm{i}E_1 = E^\infty,\ |z| \to \infty\\&\sigma_{33} = 0,\quad D_3 = 0,\ |x_1| < a,\ x_3 = 0,\\&u_3^+ = u_3^-,\quad D_3 = D_s,\ a < |x_1| \leqslant c,\ x_3 = 0\end{aligned} \tag{12-8}$$

由于假设只有 x_3 方向的位移，所以边界条件不能再要求 $|x_1| < a$ 时 $\sigma_{31} = 0$。设 $\boldsymbol{\sigma}^\infty$ 和 $\boldsymbol{E}^\infty$ 均垂直于裂纹，适合边界条件的解为

$$\begin{aligned}&U'(z) = \frac{c_1 z}{\sqrt{z^2 - a^2}},\quad \Phi'(z) = \frac{c_3 z}{\sqrt{z^2 - a^2}} + \frac{c_4 z}{\sqrt{z^2 - c^2}} - \frac{D_s}{\epsilon}\omega(z)\\&c_1 = \frac{eE^\infty + \sigma^\infty}{M},\ c_3 = \frac{e(eE^\infty + \sigma^\infty)}{\epsilon M},\ c_4 = -\frac{(e^2 + \epsilon M)E^\infty + e\sigma^\infty}{\epsilon M}\\&\omega(z) = \frac{2}{\pi}\left[\operatorname{arccot}\left(\frac{a}{z}\sqrt{\frac{z^2 - c^2}{c^2 - a^2}}\right) - \frac{z}{\sqrt{z^2 - c^2}}\arccos\left(\frac{a}{c}\right)\right]\end{aligned} \tag{12-9}$$

函数 $\omega(z)$ 具有下列性质（在原始 Dugdale 模型中，$\omega(z)$ 和条形塑性区内的均匀分布应力相关[9]）

$$\begin{aligned}&z \to \infty \text{ 时}, \omega(z) \to 0;\quad |x_1| > c \text{ 时}, \mathrm{Im}\,\omega(x_1) = 0\\&|x_1| < a \text{ 时}, \mathrm{Re}\omega(x_1) = 0;\quad a < |x_1| < c \text{ 时}, \mathrm{Re}\omega(x_1) = 1\end{aligned}$$

由 $|x_1| = c$ 处电位移有界的条件，求得饱和区的长度为

$$\rho = c - a = a\sec\left[\frac{\pi}{2}\,\frac{(e^2 + \epsilon M)E^\infty + e\sigma^\infty}{MD_s}\right] - a = a\sec\left(\frac{\pi}{2}\,\frac{D^\infty}{D_s}\right) - a \tag{12-10}$$

裂端的局部 J 积分为（图 12-7）

$$J_a = \int_{\Gamma_a}(gn_1 - \sigma_{ij}n_j u_{j,1} - D_j n_j \phi_{,1})\mathrm{d}s = \frac{\pi a}{2M}\left(1 + \frac{e^2}{\epsilon M}\right)(eE^\infty + \sigma^\infty)^2 \tag{12-11a}$$

式中 $g = \frac{1}{2}\sigma_{ij}\epsilon_{ij} - \frac{1}{2}D_i E_i$，是电 Gibbs 自由能。裂端绕包围饱和区的表观 J 积分为

$$\begin{aligned}J_c &= \int_{\Gamma_c}(gn_1 - \sigma_{ij}n_j u_{j,1} - D_j n_j \varphi_{,1})\mathrm{d}s = J_c + D_s(\varphi^+ - \varphi^-)\Big|_{x_1 = a} =\\&\frac{\pi a}{2M}\left(1 + \frac{e^2}{\epsilon M}\right)(eE^\infty + \sigma^\infty)^2 - \frac{4D_s a}{\pi\epsilon}\ln\left\{\sec\left[\frac{\pi}{2}\,\frac{(e^2 + \epsilon M)E^\infty + e\sigma^\infty}{MD_s}\right]\right\} \approx\\&\frac{\pi a}{2M}[(\sigma^\infty)^2 - (e^2 + \epsilon M)(E^\infty)^2]\end{aligned} \tag{12-11b}$$

当 $\rho \ll a$ 时，上面的近似等式成立，而这正是不存在电学饱和区时的线性问题的解。

显然，$J_c \neq J_a$。如以 $J_c = J_{cr}$ 作为断裂准则，其中 J_{cr} 为材料断裂时的 J 积分值，那么正负电场都降低 J_c 值，从而使断裂韧性增高；相反，如以 $J_a = J_{cr}$ 作为断裂准则，那么负电场降低 J_a 值，从而使断裂韧性增高，但正电场增高 J_a 值，从而使断裂韧性降低，这符合实验事实。

Wang[63] 在更一般的条件下讨论了电学饱和条形区模型，如 5.5 节所示。他根据局部能量释放准则，在采用一些近似后，得出的破坏载荷和 Park 与 Sun 的实验结果较为一致。Fulton 和 Gao[229] 也讨论了一般情况下的局部能量释放率准则，在一定电场范围内，数字结果

和实验符合较好。

2）极化平行于裂纹

设裂纹沿 x_3 轴，极化平行于裂纹，x_1 轴垂直于裂纹（图 12-8），取

$$D_1 = -\psi_{,3},\quad D_3 = \psi_{,1},\quad u_3 = 0,\quad u_1 = u_1(x_1, x_3) \tag{12-12}$$

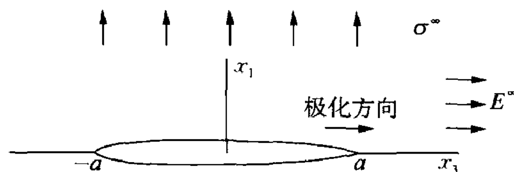


图 12-8 极化平行于裂纹

则此时本构方程又可写成

$$\begin{aligned}&\sigma_{13} = \overline{M}u_{1,3} + \bar{e}\,\psi_{,3},\quad \sigma_{11} = \overline{M}u_{1,1} + \bar{e}\,\psi_{,1}\\ &E_3 = \bar{e}u_{1,1} - \bar{\epsilon}\psi_{,1},\quad E_1 = -\bar{e}u_{1,3} + \bar{\epsilon}\psi_{,3}\\ &\overline{M} = M + e^2/\epsilon,\ \bar{e} = e/\epsilon,\ \bar{\epsilon} = -1/\epsilon\end{aligned} \tag{12-13}$$

根据 $E_{1,3} = E_{3,1}$ 和 $\sigma_{11,1} + \sigma_{13,3} = 0$，仍可推出 u_3，ψ 均为调和函数。类似于式（12-6），引入复势 $U(z)$ 和 $\Psi(z)$，则有

$$\begin{aligned}&u_1 = \mathrm{Im}[U(z)],\quad \psi = \mathrm{Im}[\Psi(z)],\quad \sigma_{11} + \mathrm{i}\sigma_{13} = \overline{M}U'(z) + \bar{e}\Psi'(z)\\ &D_3 - \mathrm{i}E_1 = \bar{e}\,U'(z) - \bar{\epsilon}\Psi'(z),\quad D_3 - \mathrm{i}D_1 = \Psi'(z)\end{aligned} \tag{12-14}$$

对于中心裂纹，其解为

$$U'(z) = \frac{\sigma^\infty z}{\overline{M}\sqrt{z^2 - a^2}} + \frac{\bar{e}(\overline{M}E^\infty - \bar{e}\sigma^\infty)}{\overline{M}(\overline{M}\bar{\epsilon} + \bar{e}^2)},\quad \Psi'(z) = -\frac{\overline{M}E^\infty - \bar{e}\sigma^\infty}{\overline{M}\bar{\epsilon} + \bar{e}^2} \tag{12-15}$$

求得

$$J_c = J_a = \pi a\sigma^{\infty 2}/2\overline{M} = \pi a\epsilon\sigma^{\infty 2}/[2M(\epsilon M + e^2)] \tag{12-16}$$

上式表明，在极化方向平行于裂纹时，电场对裂纹的断裂没有影响，这也符合实验结果。

12.2.4 裂尖附近区域畴变理论

Zhuh 和 Yang[230]，Yang 和 Zhuh[231] 在讨论裂纹的扩展问题时，提出裂尖区在高电场下的小范围畴变理论。作为模型，他们假设：①忽略畴变区之外的应力和电场的相互影响；②假设材料是各向同性的，未极化的铁电体近似具有这一性质。8.1.6 节中曾详细讨论了电致伸缩材料中的开路的椭圆孔，那里的电场解对压电体也适用（因为那里讨论的电场是线性化了的）；电场解也可由 4.4 节中的式（4-112）退化得到。对于无穷远处只作用电场 E_2^∞ 时，按式（8-50）（下式用 θ 代换那里的 η），裂尖区的渐近电场为

$$E_2 \approx E_2^\infty\left[\frac{1}{1+\bar{\kappa}}\sqrt{\frac{a}{2r}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta/2} + \frac{1+2\bar{\kappa}}{2(1+\bar{\kappa})}\right] \tag{12-17}$$

上式中的 r 和 θ 分别是原点在裂尖的局部坐标系 z_1 中的半径和极角，$\bar{\kappa}$ 的意义见式（8-47b）。式中第一项表示奇异电场的作用，第二项表示均匀电场的作用。$\bar{\kappa}$ 很小时，奇异电场是主要的；$\bar{\kappa}$ 很大时，均匀电场是主要的。畴变区外的应力场近似为

$$\sigma_{ij} = (K_{\mathrm{app}}/\sqrt{2\pi r})f_{ij}(\theta) \tag{12-18}$$

式中 K_{app} 为畴变区外近似渐近应力场的表观应力强度因子，$f_{ij}(\theta)$ 为渐近场的普适角度分布函数，由式(1-24)或(1-25)表示。按式(3-42)，铁电体的 90°畴变准则粗略地可表为

$$\boldsymbol{\sigma}:\Delta\boldsymbol{\varepsilon}+\boldsymbol{E}:\Delta\boldsymbol{P}\geqslant G^{c}=2P_{s}E_{c} \tag{12-19}$$

式中 P_s 为饱和极化强度，E_c 为矫顽电场。对于初始极化方向和 x_1 成 ϕ 角的情形(图 12-9)，相应于 90°的极化转换，式(3-41)应为

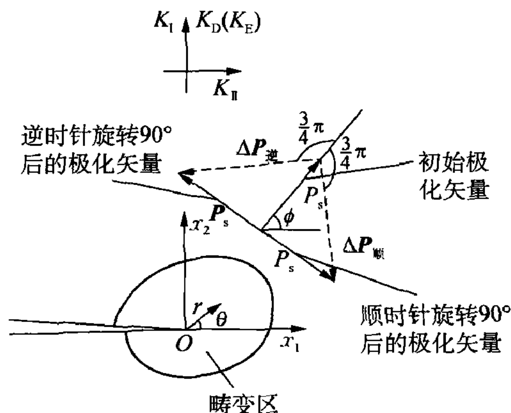


图 12-9 裂尖小范围 90°畴变区

$$\Delta P_{s}=\sqrt{2}P_{s}\begin{Bmatrix}\cos(\phi\pm3\pi/4)\\ \sin(\phi\pm3\pi/4)\end{Bmatrix} \tag{12-20}$$

$$\Delta\varepsilon_{0}=\varepsilon_{0}\begin{bmatrix}-\cos2\phi & \sin2\phi\\ \sin2\phi & \cos2\phi\end{bmatrix}$$

式中±3π/4 分别对应于顺时针和逆时针方向转过的角度。把式(12-17)、(12-18)和(12-20)代入(12-19)，便粗略地得到畴变区的边界 R_0，即 R_0 和 θ 相关的方程

$$\sqrt{R_{0}}=\sqrt{\rho}R(\theta,\beta,\bar{\kappa})>0,\quad \rho=\frac{1}{8\pi}\left(\frac{K_{app}\varepsilon_{0}}{P_{s}E_{c}}\right),\quad \beta=\frac{K_{E}P_{s}}{K_{app}\varepsilon_{0}}$$

$$R=\left[\frac{\sqrt{2}}{1+\bar{\kappa}}\beta\sin\left(\phi\pm\frac{3\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)+\sin\theta\sin\left(2\phi+\frac{3\theta}{2}\right)\right]\left[1-\frac{E_{2}^{\infty}}{\sqrt{2}E_{c}}\frac{\bar{\kappa}}{1+\bar{\kappa}}\sin\left(\phi\pm\frac{3\pi}{4}\right)\right]^{-1} \tag{12-21}$$

式中 $K_E=E^{\infty}\sqrt{\pi a}$。在式(12-21)中，分子上的两项表示奇异电场和应力场的作用，均匀电场的作用体现在分母中。图 12-10 表示单畴畴变情形的量纲一的 x_i/ρ 的边界，其中(a)表示 $\bar{\kappa}=10^3$（均匀电场起主要作用），正($\beta>0$)负($\beta<0$)电场对畴变边界的影响，(b)表示 $\bar{\kappa}=10^{-3}$

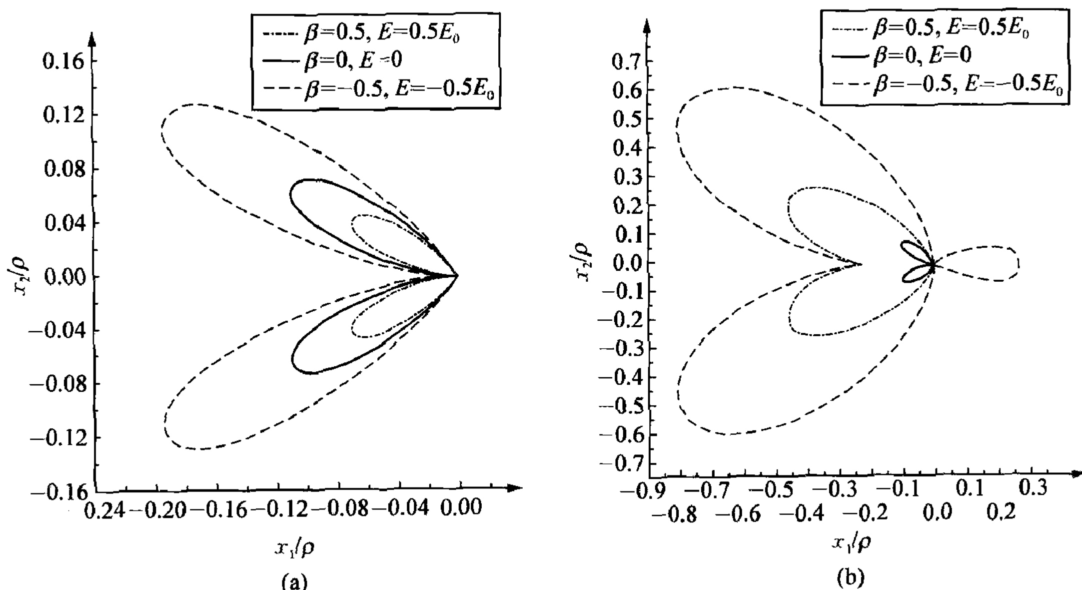


图 12-10 正负电场作用下 90°单畴畴变时的边界

(a) $\bar{\kappa}=10^3$；(b) $\bar{\kappa}=10^{-3}$

(奇异电场起主要作用),正负电场对畴变边界的影响。由图可知,均匀电场只影响畴变区的大小,且负电场扩大畴变区,正电场缩小畴变区;奇异电场影响畴变区的大小和形状,且都扩大畴变区,但负电场作用时畴变区要大一些。

铁电体中发生畴变时,畴变区内便引起了畴变(相变)应变,有了畴变区的形状和大小,便可应用相变理论来讨论因畴变而引起的增韧问题[9,232,233]。Zhuh 和 Yang[230] 给出的结果是:当均匀电场在裂尖区占主导地位时,负电场延缓裂纹扩展,正电场加速裂纹扩展,和 Park 和 Sun[233] 等人的实验结果一致;当奇异电场在裂尖区占主导地位时,除小的正负电场起增韧作用外,较大的正负电场均使断裂韧性降低。Zeng 和 Rajapakse[234],Rajapakse 和 Zeng[235] 用相变理论讨论铁电体畴变增韧问题,他们得出的结论是:正电场阻止裂纹扩展,负电场加速裂纹扩展。Huang 和 Kuang[236] 讨论了二次畴变增韧问题。关于畴变增韧理论,还需进行广泛的研究。

12.2.5 基于 Griffith 能量理论的分析

Fang, Liu, Hwang[237] 提出极化铁电体的基于 Griffith[238] 能量理论的起始断裂准则

$$\widetilde{G} = F\mathrm{d}\Delta/\mathrm{d}a + \varphi\mathrm{d}q/\mathrm{d}a - \mathrm{d}U/\mathrm{d}a - W_{\mathrm{ds}} = \widetilde{G}^{\mathrm{c}} \tag{12-22}$$

式中$\widetilde{G}$为裂纹扩展单位面积的能量,$\widetilde{G}^{\mathrm{c}}$ 为裂纹扩展单位面积所需要的临界能量,W_{ds}为裂纹开裂和裂尖前方畴变消耗的能量,$F\mathrm{d}\Delta$ 和 $\varphi\mathrm{d}q$ 分别为外力微功和电势微功,$\mathrm{d}U$ 为微内能。上述理论借鉴了弹塑性体中裂纹扩展的 Irwin 和 Orowan 方法[9],不过在 Irwin 和 Orowan 方法[9] 中,将塑性功看成常数,而现在的畴变功是随载荷等条件而变化的。这一理论和 Suo[239] 的电击穿理论也有相似之处。如按 Zhuh 和 Yang[230] 的理论,对于极化铁电体,负电场促使畴变发生,则裂尖区畴变范围大,耗散能量增大;正电场延迟畴变发生,裂尖区畴变范围小,耗散能量相对较小。所以负电场作用下的铁电体需要比正电场作用下的铁电体有更大的外力才能使裂纹扩展,这便解释了一些实验结果。类似于式(5-82),对自相似扩展的裂纹,$\widetilde{G}$可写成

$$\begin{aligned}\widetilde{G} = \lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{2\Delta}\int_0^{\Delta}\{&\boldsymbol{\Sigma}_2^{\mathrm{T}}(r_1,\ 0)\cdot[\boldsymbol{u}^{+}(\Delta-r_1)-\boldsymbol{u}^{-}(\Delta-r_1)]+\\ &D_2(r_1,\ 0)[\varphi^{+}(\Delta-r_1)-\varphi^{-}(\Delta-r_1)]\}\mathrm{d}r_1\end{aligned} \tag{12-23}$$

因此,如能算出铁电体中的应力和电场,便可用式(12-23)算出$\widetilde{G}$。他们采用 Gao, Zhang 和 Tong[228] 的分析结果,裂尖虚扩展时裂尖区裂纹上下表面的电势差很小,近似有

$$\lim_{\Delta\to 0}\frac{1}{2\Delta}\int_0^{\Delta}D_2(r_1,\ 0)[\varphi^{+}(\Delta-r_1)-\varphi^{-}(\Delta-r_1)]\mathrm{d}r_1 = 0$$

按式(12-7)和(12-9),有

$$\sigma_{33} = \mathrm{Re}[MU'(z)+e\Phi'(z)] = M\frac{c_1(a+r)}{\sqrt{r^2+2ra}} + e\left[\frac{c_3(a+r)}{\sqrt{r^2+2ra}} - \frac{D_{\mathrm{s}}}{\epsilon}\omega(z)\right]$$

$$u_3 = \mathrm{Im}[U(z)] = c_1\sqrt{a^2-x^2},\ -a<x<a$$

把上列诸式代入式(12-23)进行计算,结果和式(12-11)相同,即和文献[228]算出的局部 J 积分一致。这和 5.3.6 节的讨论是一致的。

12.2.6 应变能密度因子准则

线弹性断裂力学中，裂尖应力场具有 $1/\sqrt{r}$ 的奇异性，能量密度具有 $1/r$ 的奇异性，都是无界的，所以需要讨论其强度，即应力强度因子或应变能密度因子，不能讨论其绝对值。Sih[240] 提出了应变能密度因子准则。Shen 和 Nishioka[241]，Zuo 和 Sih[242]，Chen，Liu 和 Zou[243] 把应变能密度准则推广到压电体中。他们定义的应变能密度因子为

$$S = \lim_{r \to 0} r\mathrm{d}U/\mathrm{d}V,\ \mathrm{d}U/\mathrm{d}V = \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}/2 + D_i E_i/2 \tag{12-24}$$

式中 $\mathrm{d}U/\mathrm{d}V = u$ 为应变能密度。压电体的能量密度因子准则设为：

(1) 裂纹发生的方向在裂尖最大的能量密度取极小的方向，或发生在 $\max S_{\min}$ 方向，$S_{\min}$ 的方向就是 $\partial S/\partial\theta = 0$ 的 θ 方向，其中 θ 为原点在裂尖的极坐标中的极角。

(2) 当 $\max S_{\min}$ 达临界值 S_c 时，产生裂纹或裂纹开始扩展。

设压电体的极化沿 x_3 轴，(x_1, x_3) 平面为各向异性平面，对广义平面应变问题，有 $E_2 = 0$，$\varepsilon_{22} = 0$。所以 $\sigma_{22}\varepsilon_{22} = 0$，$D_2E_2 = 0$，从而在应变能密度中不含这些项。

按式(5-14)，在一般载荷情况下，广义二维问题的裂纹尖端的应力渐近场可表示为

$$\begin{gathered}
\boldsymbol{\Sigma}_3[\sigma_{31}, \sigma_{32}, \sigma_{33}, D_3]^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\boldsymbol{QK},\quad \boldsymbol{\Sigma}_1 = [\sigma_{11}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, D_1]^{\mathrm{T}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}}\boldsymbol{RK} \\
\boldsymbol{Q} = \mathrm{Re}\left[\boldsymbol{B}\left\langle\frac{1}{\sqrt{\cos\theta + \mu_k\sin\theta}}\right\rangle\boldsymbol{B}^{-1}\right],\ \boldsymbol{R} = \mathrm{Re}\left[\boldsymbol{B}\left\langle\frac{\mu_k}{\sqrt{\cos\theta + \mu_k\sin\theta}}\right\rangle\boldsymbol{B}^{-1}\right] \\
K_{\mathrm{I}} = \sigma_{33}^{\infty}\sqrt{\pi a},\quad K_{\mathrm{II}} = \sigma_{31}^{\infty}\sqrt{\pi a},\quad K_{\mathrm{III}} = \sigma_{32}^{\infty}\sqrt{\pi a},\quad K_{\mathrm{D}} = D_3^{\infty}\sqrt{\pi a}
\end{gathered} \tag{12-25}$$

计及二维广义应变问题，有 $\varepsilon_{22} = E_2 = 0$，则应变能密度因子可以写成

$$\begin{gathered}
S = \lim_{r\to 0} r\mathrm{d}U/\mathrm{d}V = (1/2)\lim_{r\to 0} r[(\boldsymbol{\Sigma}_1^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_3^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\varepsilon}_3) + (\sigma_{21}\varepsilon_{21} + \sigma_{23}\varepsilon_{23})] \\
\boldsymbol{\varepsilon}_1 = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, E_1)^{\mathrm{T}},\ \boldsymbol{\varepsilon}_3 = (\varepsilon_{31}, \varepsilon_{32}, \varepsilon_{33}, E_3)^{\mathrm{T}}
\end{gathered} \tag{12-26}$$

其中的应变可由本构方程求得，因而应变能密度因子可用广义应力强度因子表示。他们对 PZT-4 的计算结果表明，在 $-0.6\ \mathrm{kV/cm} < E_3 < 0.8\ \mathrm{kV/cm}$ 的范围内，由 $\partial S/\partial\theta = 0$ 推出 $\theta = 0$，即裂纹沿其自身方向扩展，同时指出正电场促使裂纹扩展，负电场阻止裂纹扩展，在这一较窄范围内和实验较为符合。

12.3 本征模态理论

12.3.1 线性电弹性介质中的广义正则应力和应变矢量

式(3-32)的第三式可以改写成

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{C}^{-1}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{d}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{D} = \boldsymbol{d\sigma} + \boldsymbol{\epsilon E} \tag{12-27}$$

现引入 9 维空间的广义应力矢量 $\boldsymbol{\Sigma}$ 和广义应变矢量 $\boldsymbol{\Gamma}$，则上式可改写为

$$\boldsymbol{\Gamma} = s\boldsymbol{\Sigma}$$

$$\boldsymbol{\Gamma} = [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}, \gamma_{xy}, \widetilde{D}_x, \widetilde{D}_y, \widetilde{D}_z]^{\mathrm{T}}, \boldsymbol{\Sigma} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{xy}, \widetilde{E}_x, \widetilde{E}_y, \widetilde{E}_z]^{\mathrm{T}} \tag{12-28}$$

式中 γ_{yz}，γ_{zx}，γ_{xy} 为工程切应变，$\widetilde{\boldsymbol{D}}=\boldsymbol{D}/\upsilon$ 为量纲一的电位移，$\widetilde{\boldsymbol{E}}=\upsilon\boldsymbol{E}$，为具有应力量纲的电场强度，其中 $\upsilon = 1\,\mathrm{N/V\cdot m}$，这一规定的好处是材料常数 s 具有统一的量纲 $\mathrm{N^{-1}m^2}$，但相应的材料常数的量纲需要调整。当然，这一做法并非完全必要，实际上后面的数字例子还是采用了传统的变量。

再按下式引入广义正则应力 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ 和广义正则应变 $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}$

$$\begin{aligned} &\hat{\boldsymbol{\Gamma}} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{\Gamma}, \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{P} = \boldsymbol{P}^{\mathrm{T}} = \mathrm{diag}[1, 1, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 1, 1, 1] \\ &\hat{\boldsymbol{\Gamma}} = \hat{s}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}, \hat{s} = \boldsymbol{P}^{-1}s\boldsymbol{P}^{-1} \end{aligned} \tag{12-29}$$

式中 $\hat{s}$ 为广义正则柔度矩阵。设新、老坐标系 ϕ' 和 ϕ 的变换矩阵为 $\boldsymbol{Q}=[Q_{kl}]$，$Q_{kl}=\cos(\boldsymbol{i}'_k, \boldsymbol{i}_l)$，则新、老坐标系中的物理量存在关系

$$\boldsymbol{\Sigma}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{\Sigma}, \quad \boldsymbol{\Gamma}' = \boldsymbol{B}\boldsymbol{\Gamma}, \quad \hat{\boldsymbol{\Sigma}}' = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}, \quad \hat{\boldsymbol{\Gamma}}' = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}\hat{\boldsymbol{\Gamma}}, \quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{-1} \tag{12-30}$$

式中

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & 2\boldsymbol{A}_{12} & 0 \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{Q} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & 0 \\ 2\boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{Q} \end{bmatrix}, A_{11} = \begin{bmatrix} Q_{11}^2 & Q_{12}^2 & Q_{13}^2 \\ Q_{21}^2 & Q_{22}^2 & Q_{23}^2 \\ Q_{31}^2 & Q_{32}^2 & Q_{33}^2 \end{bmatrix} \\ &\boldsymbol{A}_{12} = \begin{bmatrix} Q_{12}Q_{13} & Q_{11}Q_{13} & Q_{11}Q_{12} \\ Q_{22}Q_{23} & Q_{21}Q_{23} & Q_{21}Q_{22} \\ Q_{32}Q_{33} & Q_{31}Q_{33} & Q_{31}Q_{32} \end{bmatrix}, \boldsymbol{A}_{21} = \begin{bmatrix} Q_{21}Q_{31} & Q_{22}Q_{32} & Q_{23}Q_{33} \\ Q_{11}Q_{31} & Q_{12}Q_{32} & Q_{13}Q_{33} \\ Q_{11}Q_{21} & Q_{12}Q_{22} & Q_{13}Q_{23} \end{bmatrix} \\ &\boldsymbol{A}_{22} = \begin{bmatrix} Q_{32}Q_{23}+Q_{22}Q_{33} & Q_{33}Q_{21}+Q_{23}Q_{31} & Q_{31}Q_{22}+Q_{21}Q_{32} \\ Q_{12}Q_{33}+Q_{32}Q_{13} & Q_{33}Q_{11}+Q_{13}Q_{31} & Q_{11}Q_{32}+Q_{31}Q_{12} \\ Q_{12}Q_{23}+Q_{22}Q_{13} & Q_{13}Q_{21}+Q_{23}Q_{11} & Q_{11}Q_{22}+Q_{21}Q_{22} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{12-31}$$

上式中 $\boldsymbol{A}$ 矩阵右下角的子矩阵是电位移 $\boldsymbol{D}$ 的变换张量，剩下的左上角的子矩阵是应力 $\boldsymbol{\sigma}$ 的变换张量。由矩阵 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{P}$ 的表达式和 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{-1}$，可得

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{H} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}^{-1} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}, \quad \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{H}^{-1}, \quad \boldsymbol{H}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{H} = \boldsymbol{I} \\ &\hat{\boldsymbol{\Sigma}}' = \boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{\Sigma}}, \quad \hat{\boldsymbol{\Gamma}}' = \boldsymbol{H}\hat{\boldsymbol{\Gamma}} = \boldsymbol{H}\hat{s}\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \hat{s}'\hat{\boldsymbol{\Sigma}}', \hat{s}' = \boldsymbol{H}\hat{s}\boldsymbol{H}^{-1} \end{aligned} \tag{12-32}$$

因此，$\boldsymbol{H}$ 是用三维空间变换张量表示的 9 维空间的正交张量，可用作 9 维空间的坐标变换张量。由式(12-23)知，坐标变换时，$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$，$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}$ 服从相同的矢量变换规则，是 9 维空间的矢量；相反，$\boldsymbol{\Sigma}$，$\boldsymbol{\Gamma}$ 则不是。这也是我们引入广义正则应力 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ 和广义正则应变 $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}$ 的原因。

12.3.2 材料的本证常数和模态

由式(12-29)可知，$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}$ 的每个分量和 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ 的 9 个分量全部相关，很难区分不同的变形方式和材料破坏之间的关系。Kuang，Zhou，Chen 和 Zhao[244] 推广 Kelvin 模态分析方法[245~247]，在 9 维空间中寻找变形时 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ 和 $\hat{\boldsymbol{\Gamma}}$ 相互平行的物质空间的主方向 $\boldsymbol{\Phi}$，即寻找满足下列方程的 $\boldsymbol{\Phi}$

$$(\hat{s}-\Lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{\Phi}=0, \quad |\hat{s}-\Lambda \boldsymbol{I}|=0 \tag{12-33}$$

通常广义正则柔度矩阵$\hat{s}$是实对称的，所以本征值 Λ 取实值。按式(12－32)，坐标变换时，$\hat{s}'=\boldsymbol{H}\hat{s}\boldsymbol{H}^{-1}$，两者为相似矩阵。因此按 1.4 节的说明，在变换后的新坐标系中，本征值不变，而在新坐标系中的本征矢量变换为 $\boldsymbol{\Phi}'=\boldsymbol{H}^{-1}\boldsymbol{\Phi}$。对非退化情形，有 9 个不同的值 Λ_i，称 Λ_i 为电介质的第 i 型本征柔度，称

$$\boldsymbol{\Lambda}=\mathrm{diag}[\Lambda_i]=\langle \Lambda_i \rangle \tag{12-34}$$

为材料的本征柔度矩阵。对应于每个 Λ_i，由式(12－33)可以得到一个本征方向矢量 $\boldsymbol{\Phi}_i$，其中有一个分量可以是任意的；不同的 Λ_i 对应的 $\boldsymbol{\Phi}_i$ 相互正交，并可归一化，称为材料的第 i 型本征方向，或第 i 型材料模态，称

$$\boldsymbol{\Phi}=[\boldsymbol{\Phi}_i]=[\boldsymbol{\Phi}_1,\boldsymbol{\Phi}_2,\cdots,\boldsymbol{\Phi}_9], \quad \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{I} \tag{12-35}$$

为材料的模态矩阵。如果用 $\boldsymbol{\Phi}_i$ 作为坐标系的基矢，由这些基矢张成的空间称为模态空间。由于弹性电介质存在这样那样的对称性，因而本征方程式(12－33)成为半退化的，此时 Λ 出现重根，不过每个重根对应的独立模态的个数恰好等于根的重数，所以仍有 9 个独立模态。

在以物质空间的主方向 $\boldsymbol{\Phi}$ 作为坐标轴的坐标系中，$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$和$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}$分别记为$\overline{\boldsymbol{\Sigma}}$和$\overline{\boldsymbol{\Gamma}}$，此时有

$$\overline{\boldsymbol{\Gamma}}=\Lambda\overline{\boldsymbol{\Sigma}} \tag{12-36a}$$

类似于上面的讨论，可以讨论本征弹性系数矩阵 $\boldsymbol{\lambda}=[\lambda_i]=[\Lambda_i^{-1}]=\boldsymbol{\Lambda}^{-1}$，而材料的模态不变，因而由这种方法得出的模态空间不变。此时有

$$\overline{\boldsymbol{\Sigma}}=\boldsymbol{\lambda}\overline{\boldsymbol{\Gamma}}, \ \boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{\Lambda}^{-1} \tag{12-36b}$$

12.3.3 材料中的模态应力、模态应变和模态能量

任一广义正则应力$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$和广义正则应变$\hat{\boldsymbol{\Gamma}}$都可在物理模态空间展开，即

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}=\sum_{j=1}^{m}\overline{\boldsymbol{\Sigma}}_j=\sum_{j=1}^{m}\overline{\Sigma}_j\boldsymbol{\Phi}_j, \quad \hat{\boldsymbol{\Gamma}}=\sum_{j=1}^{m}\overline{\boldsymbol{\Gamma}}_j=\sum_{j=1}^{m}\overline{\Gamma}_j\boldsymbol{\Phi}_j \tag{12-37}$$

式中$\overline{\boldsymbol{\Sigma}}_j$，$\overline{\boldsymbol{\Gamma}}_j$ 分别为第 j 个模态应力和模态应变矢量，$\overline{\Sigma}_j$，$\overline{\Gamma}_j$ 分别是$\overline{\boldsymbol{\Sigma}}_j$，$\boldsymbol{\Gamma}_j$ 的模。显然模态应力和模态应变矢量相互平行，即 $\overline{\boldsymbol{\Gamma}}_j=\Lambda_j\overline{\boldsymbol{\Sigma}}_j$。

由于模态应力和模态应变矢量相互平行，所以第 i 个模态的变形能是

$$U_i=\overline{\boldsymbol{\Gamma}}_i^{\mathrm{T}}\overline{\boldsymbol{\Sigma}}_i/2=\Lambda_i\overline{\Sigma}_i^2/2 \ (\text{对 } i \text{ 不求和}) \tag{12-38}$$

12.3.4 材料破坏和非弹性变形的模态能量理论

材料的破坏和塑性变形等应当和变形方式有关，因而自然地联想到和不同变形方式的能量相关。前面讲过，不管本征值是否有重根，总可以构造出 9 个本征矢量，但这 9 个本征矢量对材料的破坏和塑性变形的贡献是不一样的，要由实验决定。

设 Λ_p 是 r 重根，对应的独立模态是 $\boldsymbol{\Phi}_{pi}$，$i=1,2,\cdots,r$，此时以 $\boldsymbol{\Phi}_{pi}$ 为基矢张成的子空间内，任一方向都是对应于 Λ_p 的本征方向，这是一个对应于 Λ_p 的各向同性子空间，在这一子空

间内，没有特别优先的方向，实验表明，对塑性变形等一类变形问题，可以把这个子空间内的每个变形方式的贡献同等看待，把 $\boldsymbol{\Phi}_{p1}+\boldsymbol{\Phi}_{p2}+\cdots+\boldsymbol{\Phi}_{pr}$ 作为一个独立的物理模态，不需分成 r 个独立模态来处理。因此若 Λ 有 m 个相异的实根，第 i 个根的重数是 r_i，其对应的本征方向也是 r_i 个，那么本征方向矢量的总和仍是 $\sum_{i=1}^{m} r_i = 9$，但对于工程应用来说，独立的物理模态或变形方式可取成 $m(\leqslant 9)$ 个，可以在只由 m 个物理模态张成的物理模态空间来处理问题。实验还表明，对于破坏等问题，对于同一个模态，往往和本征矢量的指向相关，例如材料拉伸和压缩属于同一个模态，但它们的破坏应力是不同的，所以破坏准则和变形准则还是有区别的，这在理论分析中有待特别注意。

鉴于已知的物理事实，我们提出如下两类模态能量破坏和塑性变形的理论：

(1) 任一模态能量 U_i 达其临界值 U_{ic}，即

$$U_i^+ = U_{icr}^+,\quad U_i^- = U_{icr}^- = U_{icr}^+/\beta_i,\ i=1,\cdots,m \tag{12-39}$$

式中 m 为和独立本征值对应的物理模态数，U_i^+，U_i^- 分别表示正、负指向的第 i 个模态的能量，U_{icr}^+，U_{icr}^- 为其临界值，β_i 为指向因子。对于塑性变形，可取 $U_{cr}^+ = U_{cr}^-$；对于破坏，$U_{cr}^+ \neq U_{cr}^-$。

(2) 不同模态能量的某种线性组合达到临界值 U_{cr}，即

$$\sum_{i=1}^{M}(a_i^+ U_i^+ + \beta_i a_i^- U_i^-) = U_{cr} \tag{12-40}$$

式中 a_i^+，a_i^- 是衡量不同模态作用的权系数，对于塑性变形，可取 $a_i^+ = a_i^-$，$\beta_i = 1$。如全部系数 $a_i^{\pm}$ 都等于 1，则上述代表的是总能量准则。

12.3.5 某些材料的本征柔度和模态

1) 横观各向同性电介质

首先讨论横观各向同性电介质，极化平行于 Ox_3 轴。注意到 $\hat{\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{s}\boldsymbol{P}^{-\mathrm{T}}$，用通常的材料常数 $\boldsymbol{s}$ 表示的本征方程式(12-33)为

$$\boldsymbol{\Lambda} = (\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{s}\boldsymbol{P}^{-1} - \Lambda\boldsymbol{I})\overline{\boldsymbol{\Sigma}} = 0$$

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix}
s_{11}-\Lambda & s_{12} & s_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\
s_{12} & s_{11}-\Lambda & s_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{31} \\
s_{13} & s_{23} & s_{33}-\Lambda & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{33} \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}s_{44}-\Lambda & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}d_{15} & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}s_{44}-\Lambda & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}d_{15} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (s_{11}-s_{12})-\Lambda & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}d_{15} & 0 & \epsilon_{11}-\Lambda & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}d_{15} & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{11}-\Lambda & 0 \\
d_{31} & d_{31} & d_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \epsilon_{33}-\Lambda
\end{bmatrix} \tag{12-41}$$

第一和第二个本征柔度是相同,是二重根,它和它对应的模态是

$$\Lambda_{1,2}=(2\epsilon_{11}+s_{44}+\sqrt{2(\epsilon_{11}-s_{44})^2+8d_{15}^2})/4$$
$$\boldsymbol{\Phi}_1=\left[0,\ 0,\ 0,\ 0,\ (-2\epsilon_{11}+s_{44}+\sqrt{2(\epsilon_{11}-s_{44})^2+8d_{15}^2})/2\sqrt{2}d_{15},\ 0,\ 1,\ 0,\ 0\right]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{\Phi}_2=\left[0,\ 0,\ 0,\ (-2\epsilon_{11}+s_{44}+\sqrt{(2\epsilon_{11}-s_{44})^2+8d_{15}^2})/2\sqrt{2}d_{15},\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0\right]^{\mathrm{T}} \tag{12-42}$$

这一变形模态表示面外剪切应变和面内电位移的组合。第三和第四个本征柔度是相同的,也是二重根,它和它对应的模态是

$$\Lambda_{3,4}=s_{11}-s_{12}$$
$$\boldsymbol{\Phi}_3=[-1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0]^{\mathrm{T}},\quad \boldsymbol{\Phi}_4=[0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0]^{\mathrm{T}} \tag{12-43}$$

这一变形模态表示只有面内应变,没有电位移,两者是解耦的。第五和第六个本征柔度是二重根,它和它对应的模态是

$$\Lambda_{5,6}=(2\epsilon_{11}+s_{44}-\sqrt{2(\epsilon_{11}-s_{44})^2+8d_{15}^2})/4$$
$$\boldsymbol{\Phi}_5=\left[0,\ 0,\ 0,\ 0,(-2\epsilon_{11}+s_{44}-\sqrt{2(\epsilon_{11}-s_{44})^2+8d_{15}^2})/2\sqrt{2}d_{15},\ 0,\ 1,\ 0,\ 0\right]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{\Phi}_6=\left[0,\ 0,\ 0,(-2\epsilon_{11}+s_{44}-\sqrt{(2\epsilon_{11}-s_{44})^2+8d_{15}^2})/2\sqrt{2}d_{15},\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 0\right]^{\mathrm{T}} \tag{12-44}$$

这一变形模态和第一个本征柔度的情形类似。最后的三个本征柔度是单根,它们是

$$\begin{aligned}
\Lambda_7&=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}-\frac{a}{3}\\
\Lambda_8&=\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}-\frac{a}{3}\\
\Lambda_9&=\omega^2\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}+\omega\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2+\left(\frac{p}{3}\right)^3}}-\frac{a}{3}
\end{aligned} \tag{12-45}$$

式中

$$\begin{aligned}
&p=b-a^2/3,\ q=2a^3/27-ab/3+c,\ a=-(s_{33}+s_{11}+s_{12}+\epsilon_{33})\\
&b=-2s_{13}^2+s_{33}s_{11}+s_{33}s_{12}+s_{33}\epsilon_{33}+s_{11}\epsilon_{33}+s_{12}\epsilon_{33}-d_{33}^2-2d_{31}^2\\
&c=2\epsilon_{33}s_{13}^2+(s_{11}+s_{12})(d_{33}^2-s_{33}\epsilon_{33})-4s_{13}d_{31}d_{33}+2d_{31}^2s_{33},\ \omega=(-1+\mathrm{i}\sqrt{3})/2
\end{aligned} \tag{12-46}$$

对应的模态为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\Phi}_7&=\left[1,\ 1,\frac{(s_{11}+s_{12}-\Lambda_7)d_{33}-2s_{13}d_{31}}{(s_{33}-\Lambda_7)d_{31}-s_{13}d_{33}},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\frac{(s_{11}+s_{12}-\Lambda_7)d_{33}-2s_{13}d_{31}}{(\epsilon_{33}-\Lambda_7)s_{13}-d_{31}d_{33}}\right]^{\mathrm{T}}\\
\boldsymbol{\Phi}_8&=\left[1,\ 1,\frac{(s_{11}+s_{12}-\Lambda_8)d_{33}-2s_{13}d_{31}}{(s_{33}-\Lambda_8)d_{31}-s_{13}d_{33}},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\frac{(s_{11}+s_{12}-\Lambda_8)d_{33}-2s_{13}d_{31}}{(\epsilon_{33}-\Lambda_8)s_{13}-d_{31}d_{33}}\right]^{\mathrm{T}}\\
\boldsymbol{\Phi}_9&=\left[1,\ 1,\frac{(s_{11}+s_{12}-\Lambda_9)d_{33}-2s_{13}d_{31}}{(s_{33}-\Lambda_9)d_{31}-s_{13}d_{33}},\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\frac{(s_{11}+s_{12}-\Lambda_9)d_{33}-2s_{13}d_{31}}{(\epsilon_{33}-\Lambda_9)s_{13}-d_{31}d_{33}}\right]^{\mathrm{T}}
\end{aligned} \tag{12-47}$$

这一变形模态表示轴对称应变和面外电位移的组合。

2) 其他压电晶体的本征柔度

立方晶体的本征柔度为

$$\Lambda_1 = s_{11} + 2s_{12}, \quad \Lambda_{2,3} = s_{11} - s_{12}, \quad \Lambda_{4,5,6} = \frac{1}{2}\epsilon_{11} + \frac{1}{4}s_{44} + \frac{1}{4}\sqrt{4\epsilon_{11}^2 - 4s_{44}\epsilon_{11} + s_{44}^2 + 8d_{14}^2}$$
$$\Lambda_{7,8,9} = \frac{1}{2}\epsilon_{11} + \frac{1}{4}s_{44} - \frac{1}{4}\sqrt{4\epsilon_{11}^2 - 4s_{44}\epsilon_{11} + s_{44}^2 + 8d_{14}^2} \tag{12-48}$$

六方晶体的本征柔度为

$$\Lambda_1 = \epsilon_{33}, \quad \Lambda_{2,3} = s_{11} - s_{12}$$
$$\Lambda_4 = \frac{1}{2}s_{11} + \frac{1}{2}s_{12} + \frac{1}{2}s_{33} + \frac{1}{2}\sqrt{(-s_{11} - s_{12} - s_{33})^2 - 4(-2\epsilon_{13}^2 + s_{11}s_{33} + s_{12}s_{33})}$$
$$\Lambda_5 = \frac{1}{2}s_{11} + \frac{1}{2}s_{12} + \frac{1}{2}s_{33} - \frac{1}{2}\sqrt{(-s_{11} - s_{12} - s_{33})^2 - 4(-2\epsilon_{13}^2 + s_{11}s_{33} + s_{12}s_{33})}$$
$$\Lambda_{6,7} = \frac{1}{2}\epsilon_{11} + \frac{1}{4}s_{44} + \frac{1}{4}\sqrt{4\epsilon_{11}^2 - 4s_{44}\epsilon_{11} + s_{44}^2 + 8d_{14}^2}$$
$$\Lambda_{8,9} = \frac{1}{2}\epsilon_{11} + \frac{1}{4}s_{44} - \frac{1}{4}\sqrt{4\epsilon_{11}^2 - 4s_{44}\epsilon_{11} + s_{44}^2 + 8d_{14}^2} \tag{12-49}$$

四方晶体的本征柔度为

$$\Lambda_1 = \frac{1}{2}s_{66}, \quad \Lambda_2 = \epsilon_{33}, \quad \Lambda_3 = s_{11} - s_{12}$$
$$\Lambda_4 = \frac{1}{2}s_{11} + \frac{1}{2}s_{12} + \frac{1}{2}s_{33} + \frac{1}{2}\sqrt{(-s_{11} - s_{12} - s_{33})^2 - 4(-2\epsilon_{13}^2 + s_{11}s_{33} + s_{12}s_{33})}$$
$$\Lambda_5 = \frac{1}{2}s_{11} + \frac{1}{2}s_{12} + \frac{1}{2}s_{33} - \frac{1}{2}\sqrt{(-s_{11} - s_{12} - s_{33})^2 - 4(-2\epsilon_{13}^2 + s_{11}s_{33} + s_{12}s_{33})}$$
$$\Lambda_{6,7} = \frac{1}{2}\epsilon_{11} + \frac{1}{4}s_{44} + \frac{1}{4}\sqrt{4\epsilon_{11}^2 - 4s_{44}\epsilon_{11} + s_{44}^2 + 8d_{14}^2}$$
$$\Lambda_{8,9} = \frac{1}{2}\epsilon_{11} + \frac{1}{4}s_{44} - \frac{1}{4}\sqrt{4\epsilon_{11}^2 - 4s_{44}\epsilon_{11} + s_{44}^2 + 8d_{14}^2} \tag{12-50}$$

各向同性纯弹性体的本征柔度和模态为

$$\Lambda_1 = s_{11} + 2s_{12}, \quad \Lambda_{2,3,4,5,6} = s_{11} - s_{12}$$
$$\boldsymbol{\Phi}_1 = [1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 0, 0, 0]^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\Phi}_2 = [0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0, 0, 0]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{\Phi}_3 = [\sqrt{2/3}, -\sqrt{1/6}, -\sqrt{1/6}, 0, 0, 0]^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\Phi}_4 = [0, 0, 0, 1, 0, 0]^{\mathrm{T}} \tag{12-51}$$
$$\boldsymbol{\Phi}_5 = [0, 0, 0, 0, 1, 0]^{\mathrm{T}}, \quad \boldsymbol{\Phi}_6 = [0, 0, 0, 0, 0, 1]^{\mathrm{T}}$$
$$\boldsymbol{\Phi}_0 = \boldsymbol{\Phi}_2 + \boldsymbol{\Phi}_3 + \boldsymbol{\Phi}_4 + \boldsymbol{\Phi}_5 + \boldsymbol{\Phi}_6 = [\sqrt{2/3}, \sqrt{1/2} - \sqrt{1/6}, -\sqrt{1/2} - \sqrt{1/6}, 1, 1, 1]^{\mathrm{T}}$$

由于 $\Lambda_{2,3,4,5,6}$ 是五重根，所以许多情况下，可以用一个 $\boldsymbol{\Phi}_0$ 代替，从而各向同性纯弹性体的物理模态便只有 $\boldsymbol{\Phi}_0$ 和 $\boldsymbol{\Phi}_1$ 两个，它们相应于形状改变和体积改变模态，这也是弹塑性理论和强度

理论的基础。根据本节的理论，对于破坏问题，体积改变模态应当根据模态的指向分成体积膨胀和体积压缩两种状态，这更符合实验事实。

12.3.6 例题

下面以 PZT4 材料为例，进行数字计算。PZT4 材料的弹性柔度系数可由 5.3.7 节的数据换算得到，换算时可能不很准确，但定性上还是合适的。由式(12-41)计算出的本征柔度为

$$\Lambda_{1,2}=1.3025\times10^{-8},\quad \Lambda_3=1.1494\times10^{-8},\quad \Lambda_{4,5}=1.634\times10^{-11},$$
$$\Lambda_6=9.9855\times10^{-12},\quad \Lambda_{7,8}=9.0006\times10^{-12},\quad \Lambda_9=3.5413\times10^{-12}(\mathrm{m^2/N})$$

相对应的模态为

$$\boldsymbol{\Phi}_1+\boldsymbol{\Phi}_2=[0,\ 0,\ 0,\ -0.02011,\ 0.02011,\ 0,\ 0.7068,\ -0.7068,\ 0]^{\mathrm T}$$
$$\boldsymbol{\Phi}_3=[-0.01174,\ -0.01174,\ 0.02068,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0.9995]^{\mathrm T}$$
$$\boldsymbol{\Phi}_4+\boldsymbol{\Phi}_5=[-0.5,\ 0.5,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0.70711,\ 0,\ 0,\ 0]^{\mathrm T}$$
$$\boldsymbol{\Phi}_6=[0.3617,\ 0.3617,\ -0.8587,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0.03091]^{\mathrm T}$$
$$\boldsymbol{\Phi}_7+\boldsymbol{\Phi}_8=[0,\ 0,\ 0,\ -0.7068,\ -0.7068,\ 0,\ 0.02011,\ 0.02011,\ 0]^{\mathrm T}$$
$$\boldsymbol{\Phi}_9=[0.6075,\ 0.6075,\ 0.5118,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0.000918]^{\mathrm T}$$

从上面看出，PZT4 的变形方式共有 3 类。$\boldsymbol{\Phi}_1+\boldsymbol{\Phi}_2$ 和 $\boldsymbol{\Phi}_7+\boldsymbol{\Phi}_8$ 代表面外剪切应力和面内电场，其中 $\boldsymbol{\Phi}_1+\boldsymbol{\Phi}_2$ 电场较大，$\boldsymbol{\Phi}_7+\boldsymbol{\Phi}_8$ 剪切应力较大；$\boldsymbol{\Phi}_4+\boldsymbol{\Phi}_5$ 代表面内应力；$\boldsymbol{\Phi}_3$、$\boldsymbol{\Phi}_6$ 和 $\boldsymbol{\Phi}_9$ 代表轴对称应力和面外电场，其中 $\boldsymbol{\Phi}_3$ 电场较大，$\boldsymbol{\Phi}_9$ 应力较大，$\boldsymbol{\Phi}_4$ 两者影响均不能忽视。

现在用上述理论对 Park 和 Sun[223] 的紧凑拉伸实验作一分析。针对该试件具体尺寸，有限元分析给出裂尖广义应力强度因子为

$$K_{\mathrm I}=\sigma_3^\infty\sqrt{\pi a},\ \sigma_3^\infty=4.4F/tc=6.16\times10^4F(\mathrm{MPa});\quad K_{\mathrm D}=D_3^\infty\sqrt{\pi a}$$

式中 t 是试件厚度，c 是韧带长度，F 是外力，σ_3^∞ 和 D_3^∞ 分别是远场应力和电位移。通过计算，裂尖广义正则应力$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$为

$$\sqrt{r}\,\hat{\boldsymbol{\Sigma}}=\sqrt{a/2}[8093F-1.298E_3^\infty,\ 6922F+10.2E_3^\infty,$$
$$6163F,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1440F+0.974E_3^\infty]^{\mathrm T}$$

式中 E_3^∞ 由本构方程求得：$E_3^\infty=D_3^\infty\times10^8-1479F$。在上述加载条件下，对应 $\boldsymbol{\Phi}_3$、$\boldsymbol{\Phi}_4$、$\boldsymbol{\Phi}_6$ 和 $\boldsymbol{\Phi}_9$ 的 4 个模态应变能不为零，它们为

$$(r/a)U_3=(5\times10^{-12}\sigma_3^{\infty2}+0.417\sigma_3^\infty E_3^\infty+8.69\times10^{-9}E_3^{\infty2})/4$$
$$(r/a)U_4=(1.47\times10^{-13}\sigma_3^{\infty2}-1.79\times10^{-11}\sigma_3^\infty E_3^\infty+5.4\times10^{-10}E_3^{\infty2})/2$$
$$(r/a)U_6=(5.44\times10^{-15}\sigma_3^{\infty2}+1.51\times10^{-12}\sigma_3^\infty E_3^\infty+1.055\times10^{-10}E_3^{\infty2})/4$$
$$(r/a)U_9=(1.4\times10^{-11}\sigma_3^{\infty2}+7.64\times10^{-11}\sigma_3^\infty E_3^\infty+1.039\times10^{-10}E_3^{\infty2})/4$$

由于模态应变能 U_6 远比其他模态应变能小得多，故略去不计。按模态能量理论(1)，如果取第 9 阶模态能量达临界值作为破坏准则，则有

$$(r/a)U_9=U_{\mathrm{cr9}} \tag{a}$$
$$(1.4\times10^{-11}\sigma_3^{\infty2}+7.64\times10^{-11}\sigma_3^\infty E_3^\infty+1.039\times10^{-10}E_3^{\infty2})/4=117.9$$

按模态能量理论(2),取用

$$(r/a)(0.02U_3 + 0.05U_4 + 0.93U_9) = U_{cr}$$
$$(1.29 \times 10^{-11}\sigma_3^{\infty 2} + 8.78 \times 10^{-11}\sigma_3^{\infty} E_3^{\infty} + 5.82 \times 10^{-10}E_3^{\infty 2})/4 = 112.9 \tag{b}$$

上式实际上还是很接近第9阶模态能量的表达式。如果令所有模态能量的比例系数都相同,那么便得到能量密度因子理论

$$(r/a)(U_3 + U_4 + U_6 + U_9) = \overline{U}_{cr}$$
$$(1.95 \times 10^{-11}\sigma_3^{\infty 2} + 4.59 \times 10^{-10}\sigma_3^{\infty} E_3^{\infty} + 9.98 \times 10^{-9}E_3^{\infty 2})/4 = 152.1 \tag{c}$$

图12-11给出理论结果和实验结果的比较。由图可知,用上述数据拟合,当 $-6\ \text{kV/cm} < E_3 < 6\ \text{kV/cm}$ 时,文中给出的两个理论结果和实验结果符合得较好的,但当 $6\ \text{kV/cm} < E_3$ 后,理论和实验差别较大。然而,如考虑到裂尖电场饱和,当 $6\ \text{kV/cm} < E_3$,断裂载荷便不再增加,那么断裂韧性也不再下降,从而理论和实验的结果便又相符了。这一理论是一有前途的普适理论,但还有待进一步完善,对某一材料往往可以选择其中的一种作为基础。

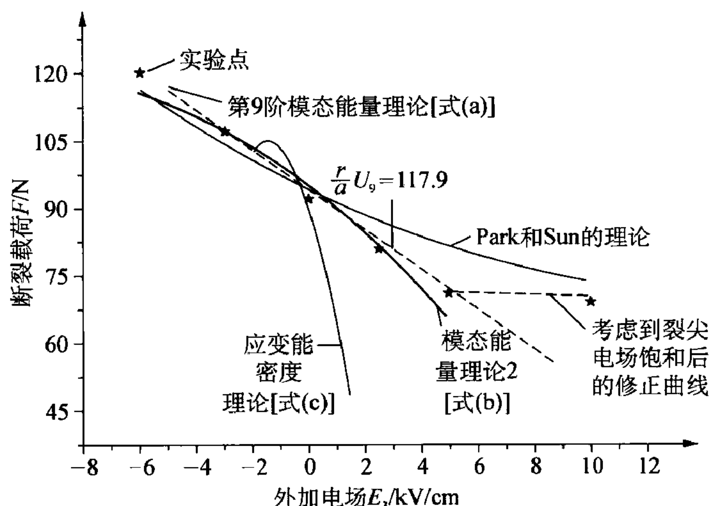


图12-11 本征模态理论的理论破坏曲线

12.4 传导裂纹破坏的无电荷区模型

12.4.1 无电荷区模型的基本概念

在电子和电机械设备中大量使用内部柔软电极,这种电极可以看成是传导裂纹。当外加电场平行于传导裂纹时,传导裂纹表面的电荷将重新排列,产生和外加电场大小相等、方向相反的诱导电场,以使传导裂纹内部没有电场。由于裂纹上下表面产生同号电荷,因而促使裂纹张开。裂纹尖端产生奇异电场,促使裂纹扩展而导致破坏。压电陶瓷材料机械强度很高,不易产生屈服,但在外加大电场下会产生畴变,发生电学饱和。在纯电场作用下,裂尖扩展所消耗的电能远大于纯机械载荷下所需要的机械能。可以从微观的畴变角度来研究电饱和问题,也

可以用局部电饱和的条形区域模型来近似讨论裂尖饱和区，Zhang，Zhao 和 Liu[248]，Zhang，Wang 和 Zhao[249]采用裂尖无电荷区模型来分析裂尖局部饱和的影响，这有点类似于线弹性断裂力学中的裂尖的无位错区模型[250~252]。裂尖无电荷区模型认为，当电场强度因子达到临界值时，裂尖放出电荷，在裂尖前方一微小区域将没有电荷，故电场是奇异的，从而可采用电场强度因子来讨论传导裂纹的断裂，但在裂尖周围的电荷云将起到屏蔽外电场的作用，从而提高了断裂韧性。图 12-12 为无电荷区的条形简化模型。设裂纹在 x_1 轴上，从裂尖 O 沿 x_1 轴到 b 为无电荷区，从 b 到 c 为电荷聚积区。

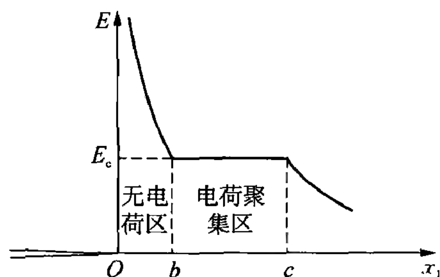


图 12-12　裂尖无电荷区模型

12.4.2 简化本构模型中的无电荷区模型

1) 裂纹对其前方点电荷的吸引力

首先讨论含半无限传导裂纹的二维无限体，无穷远处没有载荷，其中有一点电荷的解。裂尖取为坐标原点，裂纹位于横轴 x_1 的负半轴上，极化沿 x_1 正向，x_2 垂直于裂纹。为使概念清楚起见，讨论由式(12-3)表示的本构关系的无电荷区模型，但要注意，坐标轴和这里选取的不同，那里极化是沿 x_3 轴的。因此采用式(12-3)时，需要把那里的坐标轴作适当代换，即 $x_3 \to x_1$，$x_1 \to x_2$，$x_2 \to x_3$。进一步假设质点只有 x_2 方向的位移，即

$$u_1 = 0, \quad u_2 = u_2(x_1, x_2) \tag{12-52}$$

$$\begin{aligned} \sigma_{12} &= M u_{2,1} + e\varphi_{,2}, \quad \sigma_{22} = M u_{2,2} - e\varphi_{,1} \\ D_1 &= -e u_{2,2} - \epsilon\varphi_{,1}, \quad D_2 = e u_{2,1} - \epsilon\varphi_{,2} \end{aligned} \tag{12-53}$$

和 12.2.3 节一样，上式中的 u_2，φ 都是调和函数，因而可用复变函数方法求解。本处有

$$\begin{aligned} u_2 &= \mathrm{Im}[U(z)], \quad \varphi = \mathrm{Im}[\Phi(z)], \ z = x_1 + \mathrm{i}x_2 \\ \sigma_{22} + \mathrm{i}\sigma_{21} &= MU'(z) + \mathrm{i}e\Phi'(z), \quad \varepsilon_{22} + \mathrm{i}2\varepsilon_{21} = U'(z) \\ D_1 - \mathrm{i}D_2 &= -eU'(z) + \mathrm{i}\epsilon\Phi'(z), \quad E_2 + \mathrm{i}E_1 = -\Phi'(z) \end{aligned} \tag{12-54}$$

传导裂纹的裂纹面上的边界条件为

$$\sigma_{22} = 0, \quad E_1 = 0, \ x_1 < 0 \tag{12-55}$$

设点电荷 q(或沿 x_3 方向单位长度上的电荷)作用在点 z_0。满足边界条件的复势为

$$U = 0, \quad \Phi = -\frac{\mathrm{i}q}{2\pi\epsilon}\ln(\sqrt{z} - \sqrt{z_0}) + \frac{\mathrm{i}q}{2\pi\epsilon}\ln(\sqrt{z} - \sqrt{\bar{z}_0}) \tag{12-56}$$

把上式代入式(12-54)，得

$$\begin{aligned} E_1 - \mathrm{i}E_2 &= \mathrm{i}\Phi'(z) = \frac{q}{4\pi\epsilon}\frac{\sqrt{z_0} + \sqrt{\bar{z}_0}}{\sqrt{z}[z + \sqrt{z}(\sqrt{\bar{z}_0} - \sqrt{z_0}) - \sqrt{z_0\bar{z}_0}]} \\ \sigma_{22} + \mathrm{i}\sigma_{21} &= e(E_1 - \mathrm{i}E_2), \quad D_1 - \mathrm{i}D_2 = \epsilon(E_1 - \mathrm{i}E_2) \end{aligned} \tag{12-57}$$

如 z_0 为 x_1 轴上的 x_{01}，则电场强度为

$$E_1 - \mathrm{i}E_2 = \frac{q}{2\pi\epsilon}\frac{\sqrt{x_{01}}}{\sqrt{z}(z - x_{01})},\quad K_E = \lim_{z\to 0}\sqrt{2\pi z}(E_1 - \mathrm{i}E_2) = -\frac{q}{\epsilon\sqrt{2\pi x_{01}}}$$
$$K_\sigma = \lim_{z\to 0}\sqrt{2\pi z}(\sigma_{22} + \mathrm{i}\sigma_{21}) = eK_E,\quad K_D = \lim_{z\to 0}\sqrt{2\pi z}(D_1 - \mathrm{i}D_2) = \epsilon K_E \tag{12-58}$$

如果没有裂纹，无限介质中点电荷的解是(参见 10.3 节关于点热源的解)

$$U = 0,\quad \Phi = -\frac{\mathrm{i}q}{2\pi\epsilon}\ln(z - z_0),\quad E_1 - \mathrm{i}E_2 = \frac{q}{2\pi\epsilon}\frac{1}{z - z_0} \tag{12-59}$$

从而由存在裂纹引起的镜像电场为式(12-50)和(12-52)之差，即

$$E_1^{(i)} - \mathrm{i}E_2^{(i)} = \frac{q}{2\pi\epsilon}\left\{\frac{\sqrt{z_0} + \sqrt{\bar{z}_0}}{2\sqrt{z}\left[z + \sqrt{z}\left(\sqrt{\bar{z}_0} - \sqrt{z_0}\right) - \sqrt{z_0\,\bar{z}_0}\right]} - \frac{1}{z - z_0}\right\} \tag{12-60}$$

如果点电荷位于 x_1 轴上，在接近裂尖的 x_1 轴上一点的镜像电场为

$$E_1^{(i)} = \frac{q}{2\pi\epsilon}\left[\frac{\sqrt{x_{01}}}{\sqrt{x_1}(x_1 - x_{01})} - \frac{1}{x_1 - x_{01}}\right] = -\frac{q}{2\pi\epsilon}\frac{1}{\sqrt{x_1}(\sqrt{x_1} + \sqrt{x_{01}})} \tag{12-61}$$

当 x_{01} 接近裂尖时，作用在 x_{01} 处电荷 q 上的镜像力为

$$F_i = qE_1^{(i)} = -\frac{q^2}{2\pi\epsilon}\frac{1}{2x_{01}} \tag{12-62}$$

由上式见，镜像力为负，将电荷吸向裂纹，这便是裂纹对其前方点电荷的吸引力。

2) 无电荷区形成的条件

在外加电场作用下，裂尖附近的电场达到饱和，外加电场驱使电荷离开裂尖，离开裂尖后的电荷又被裂纹所吸引。采用下列简化假设来讨论无电荷区形成的条件：当紧邻裂尖前方的外加电场减去镜像电场后大于等于饱和电场时，或外加电场力减去镜像电场力后大于等于饱和电场产生的电力时，裂尖电荷才能真正离开裂尖，到达其前方的某一点。为简单计，只讨论 x_1 轴上的点。作用在 x_{01} 处电荷 q 上的外加电场力 F_a 为

$$F_a = K_E^{(a)}\,q/\sqrt{2\pi x_{01}} \tag{12-63}$$

式中 $K_E^{(a)}$ 为外加载荷在裂尖产生的电场强度因子。显然，为使电荷离开裂尖，F_a 必须为正。电荷区离开裂尖的条件是(图 12-13)

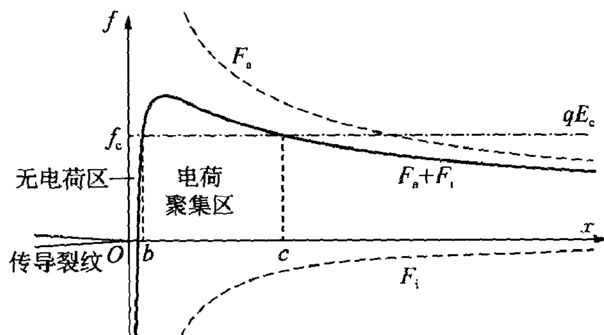


图 12-13 传导裂纹无电荷区模型的力学分析

$$F_a + F_i \geqslant qE_c, \quad \frac{K_E q}{\sqrt{2\pi x_{01}}} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon}\frac{1}{x_{01}} \geqslant qE_c \tag{12-64}$$

由上式知，在裂纹前方 x_1 轴上存在两个点满足上式中的等式条件，即

$$\sqrt{x_{01}} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}E_c}\left[K_E \pm \left(K_E^2 - \frac{2qE_c}{\epsilon}\right)^{1/2}\right] \tag{12-65}$$

上式给出图 12-12 上的 c 和 b 点，所以在这两点之间便是电荷聚集区，这和弹性体中裂尖前方无位错区的情形相仿[250~252]。对单个电荷而言，b 点是发射电荷的开始，超过 c 点后，由于小于临界电场力，所以便停止运动了。但当发射多个电子后时，bc 成为电荷聚集区，情况就要复杂一些，下面进行讨论。

3) 简化本构模型中的无电荷区模型

电荷聚集区 bc 有许多电荷，存在相互作用，比单个电荷情形复杂得多。设电荷聚集区中的电荷分布密度为 $f(x)$，且有 $f(b)=f(c)=0$；外加电场在裂尖产生的电场强度因子为 $K_E^{(a)}$；临界电场强度为 E_c。利用式(12-58)中电场的渐近式，则电荷聚集区中电荷的平衡条件为

$$\frac{K_E^{(a)}}{\sqrt{2\pi x_1}} + \frac{q}{2\pi\epsilon}\int_b^c \frac{f(x_1')\sqrt{x_1'}}{\sqrt{x_1}(x_1 - x_1')}\mathrm{d}x_1' = E_c, \; b \leqslant x_1 \leqslant c \tag{12-66}$$

按式(1-113)和文献[250]，上式有解的条件是积分两端 b 和 c 处 $f(x)=0$，或下式成立

$$\int_b^c \frac{E_c\sqrt{x_1'} - K_E^{(a)}/\sqrt{2\pi}}{\sqrt{(c-x_1')(x_1'-b)}}\mathrm{d}x_1' = 0 \tag{12-67}$$

由此求得

$$K_E^{(a)} = 2\sqrt{2\pi c}E_c\,\mathrm{E}(\pi/2, k)/\pi \tag{12-68}$$

式中 $\mathrm{E}(\pi/2, k)$ 是第二类完全椭圆积分，其中 $k=\sqrt{1-b/c}$。式(12-66)的解是

$$f(x_1') = -\frac{4\epsilon E_c b\sqrt{x_1'}}{\pi q\sqrt{c}}\frac{\sqrt{c-x_1'}}{x_1'(x_1'-b)}\Pi\left[\frac{\pi}{2}, \frac{x_1'(c-b)}{c(x_1'-b)}, k\right] \tag{12-69}$$

式中 $\Pi[\pi/2, n^2, k]$ 为第三类完全椭圆积分。考虑到式(12-68)，由电荷聚集区中电荷产生的电场强度因子为

$$K_E^{(i)} = -\sqrt{2\pi}\frac{q}{2\pi\epsilon}\int_b^c \frac{f(x_1')}{\sqrt{x_1'}}\mathrm{d}x_1' = -2\sqrt{\frac{2}{\pi}}E_c\left[\sqrt{c}\,\mathrm{E}\left(\frac{\pi}{2}, k\right) - \sqrt{b}\,\mathrm{F}\left(\frac{\pi}{2}, k\right)\right] = (\Omega - 1)K_E^{(a)}$$

$$K_\sigma^{(i)} = e(\Omega-1)K_E^{(a)}, \quad K_D^{(i)} = \epsilon(\Omega-1)K_E^{(a)}, \; \Omega = \sqrt{\frac{b}{c}}\mathrm{F}\left(\frac{\pi}{2}, k\right)\Big/\mathrm{E}\left(\frac{\pi}{2}, k\right) \tag{12-70}$$

式中 $\mathrm{F}(\pi/2, k)$ 是第一类完全椭圆积分。在裂尖无电荷区内的局部强度因子为外加强度因子和电荷聚集区中电荷产生的强度因子之和，利用了式(12-54)后，可得

$$K_E = K_E^{(a)} + K_E^{(i)} = \Omega K_E^{(a)}, \quad K_D = K_D^{(a)} + \epsilon(\Omega-1)K_E^{(a)} = \epsilon\left(1 + \frac{e^2}{\epsilon M}\right)K_E^{(a)} - \frac{e}{M}K_\sigma^{(a)}$$

$$K_\sigma = K_\sigma^{(a)} + e(\Omega - 1)K_E^{(a)}, \quad K_\varepsilon = K_\varepsilon^{(a)} = [K_\sigma^{(a)} - eK_E^{(a)}]/M \tag{12-71}$$

把上述诸式代入局部 J 积分公式(12-11),便得

$$J_c = (1/2)(K_\sigma K_\varepsilon + K_D K_E) = (1/2M)(K_\sigma^{(a)} - eK_E^{(a)})^2 + (\epsilon/2)(\Omega K_E^{(a)})^2$$

或

$$2MJ_c = (K_\sigma^{(a)})^2 - 2eK_\sigma^{(a)} K_E^{(a)} + (e^2 + \epsilon M\Omega^2)(K_E^{(a)})^2 \tag{12-72}$$

进一步假设 b 和 c 为常数,则按局部 J 积分准则,断裂准则可以写成

$$2MJ_c = (K_\sigma^{(a)} - eK_E^{(a)})^2 + \epsilon M(\Omega K_E^{(a)})^2 = 2MJ_{cr} \tag{12-73}$$

式中 J_{cr}为断裂时的临界 J 积分值。通过两组实验来确定纯机械场和纯电场载荷下的断裂韧性。设 $K_{\sigma cr}$和 K_{Ecr}分别为 $K_E^{(a)}=0$(纯机械场)和 $K_\sigma^{(a)}=0$(纯电场)下的断裂韧性,则按上式有

$$\begin{aligned} &K_{\sigma cr}^2 = 2MJ_{cr}, \quad (\epsilon M\Omega^2 + e^2)K_{Ecr}^2 = 2MJ_{cr} \\ &K_{\sigma cr} = \sqrt{2MJ_{cr}}, \quad K_{Ecr} = \pm\sqrt{2MJ_{cr}/(\epsilon M\Omega^2 + e^2)} \end{aligned} \tag{12-74}$$

上式中已考虑电强度因子可取正或负号。利用上式,式(12-73)可写成量纲一的形式

$$\left[\frac{K_\sigma^{(a)}}{K_{\sigma cr}} \mp \frac{e}{(\epsilon M\Omega^2 + e^2)^{1/2}} \frac{K_E^{(a)}}{K_{Ecr}}\right]^2 + \frac{\epsilon M\Omega^2}{\epsilon M\Omega^2 + e^2}\left(\frac{K_E^{(a)}}{K_{Ecr}}\right)^2 = 1$$

或

$$\left(\frac{K_\sigma^{(a)}}{K_{\sigma cr}}\right)^2 \mp \frac{2e}{(\epsilon M\Omega^2 + e^2)^{1/2}} \frac{K_\sigma^{(a)}}{K_{\sigma cr}} \frac{K_E^{(a)}}{K_{Ecr}} + \left(\frac{K_E^{(a)}}{K_{Ecr}}\right)^2 = 1 \tag{12-75}$$

上式中的负号用于正电场,正号用于负电场。要上式成立,按式(12-74),应要求

$$K_{\sigma cr}^2 = (\epsilon M\Omega^2 + e^2)K_{Ecr}^2 \tag{12-76}$$

但从实用的角度考虑,可以突破上述限制,采用两个独立的实验参数 $K_{\sigma cr}$和 K_{Ecr},如有必要,还可在第二、第三项前增加加权系数,更有利于拟合实验结果,这便和式(12-1)较为一致了。Zhang 等[248,249]还讨论了一般情况,和实验符合也较好。

12.4.3 其他实验结果

Heyer, Schneider, Balke, Drescher 和 Bahr[253]用 4 点弯曲试件实验研究了 PZT-PIC151陶瓷(图 12-14),试件尺寸为长 38 mm,宽 3 mm,高 4 mm,裂纹深为 0.9～2.2 mm。试件上下表面涂银,充作电极,裂纹中充以 NaCl 溶液模拟传导裂纹。应力和电场强度因子由有限元分析得到。实验和理论分析结果示于图 12-15,拟合的断裂准则可以写成

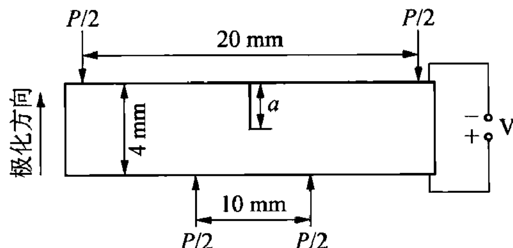


图 12-14 四点弯曲试件

$$K_{\mathrm{I}} = 0.90 - 0.01K_{\mathrm{E}} - 0.000\,02K_{\mathrm{E}}^{2} \tag{12-77}$$

式中 K_{I} 的单位是 $\mathrm{MPa \cdot m^{1/2}}$，$K_{\mathrm{E}}$ 的单位是 $\mathrm{kV \cdot m^{-1/2}}$。由图 12－14 可知，上述断裂准则在 $-50 < K_{\mathrm{E}} < 25(\mathrm{kV \cdot m^{-1/2}})$ 的范围内是很好的。

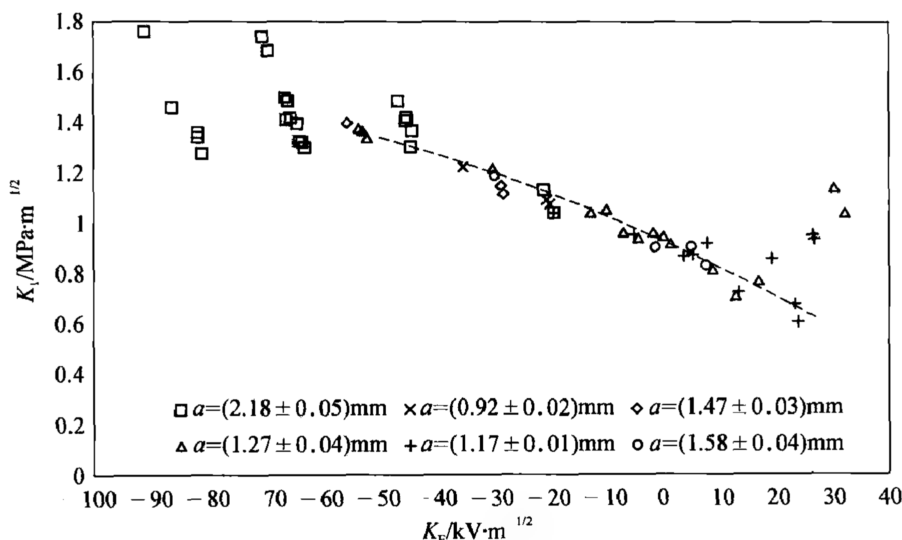


图 12－15　四点弯曲试件实验结果

12.5　电介质的电击穿

在电子器件中，电击穿是一种常见的破坏形式。电击穿是一个复杂的过程，和机械的、电的、热的和化学的等多种物理因素有关。下面提出的电击穿准则，只是力学家提供的一些参考理论。缺陷的存在，将显著提升应力和电场的强度，使机械破坏和电击穿都易于发生。对于孤立的绝缘裂纹，垂直于它的电场在其尖端产生电场集中现象，而平行于它的电场将不起作用。对于传导裂纹恰好相反。在试样中常常观察到电击穿沿着微细传导管状隧道，在外场作用下，隧道向前扩展，最终导致发生电击穿。

12.5.1　能量准则

能量准则认为，当外场引起的微细传导隧道端部的驱动力超过试件阻力(承受能力)时，隧道将向前扩展，最终导致击穿。Suo[239]指出，外场提供的能量，一部分转为可逆的变形能和电能，另一部分转变为不可逆的隧道扩展畸变能。类似于 Griffith 理论[238]，有

$$\boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{u} + \varphi \mathrm{d}\rho_{e} = \mathrm{d}u + \gamma \mathrm{d}l,\ \mathrm{d}u = \sigma_{ij}\mathrm{d}\varepsilon_{ij} + E_{i}\mathrm{d}D_{i} \tag{12-78}$$

式中 f，φ，ρ_e，$\mathrm{d}u$，γ，$\mathrm{d}l$ 分别为体积力，电势(或电压)，电荷密度，内能，隧道扩展单位长度所需消耗的功，隧道扩展的长度增量。另一方面，可以通过电弹性边值问题，计算出隧道扩展力或能量释放率，即

$$\mathrm{d}\Pi = -\tilde{G}\mathrm{d}l,\ \tilde{G} = -\partial\Pi/\partial l,\quad \mathrm{d}\Pi = \mathrm{d}u - \boldsymbol{f} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{u} - \varphi\mathrm{d}\rho_{e} \tag{12-79}$$

式中Π为总势能。能量原理认为如果满足下式，则隧道扩展

$$\widetilde{G} \geqslant \gamma \tag{12-80}$$

作为例题，以下讨论半径为a的圆柱体，其外表面涂以金属薄层电极，中心有一细小的电极，两电极间加上电压V。当电压升高到一定值时，从细小电极的端部将发出一半径为b，长为L的导电隧道(图12-16)。当$L \gg b$时，导电隧道和圆柱体外表面的电极可以近似看成同轴传输线，从而离导电隧道r处的电势为

$$\varphi = \varphi_1 - \frac{q}{2\pi\epsilon}\ln\frac{r}{b},\ q = \frac{2\pi\epsilon(\varphi_1 - \varphi_2)}{\ln(a/b)} \tag{12-81}$$

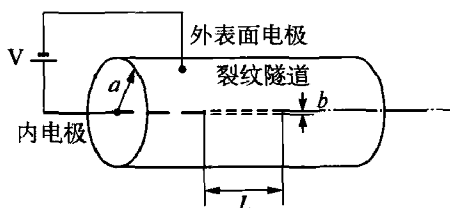


图12-16 扩展的隧道路径

式中φ_1，φ_2分别为隧道和圆柱电极的电势，ϵ为电介质的介电系数，q为单位长度隧道上的电荷。由于$\varphi_1 - \varphi_2$不变，故q是常数，从而外加电场的功为$q(\varphi_1 - \varphi_2)L$，而存储在介质内的能量是$q(\varphi_1 - \varphi_2)L/2$，故对自相似扩展的隧道，有

$$\Pi = -(\varphi_1 - \varphi_2)\frac{qL}{2} = -\frac{\pi\epsilon L(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{\ln(a/b)} \tag{12-82}$$

能量释放率为

$$\widetilde{G} = -\frac{\partial\Pi}{\partial L} = \frac{\pi\epsilon(\varphi_1 - \varphi_2)^2}{\ln(a/b)} = \frac{\pi\epsilon V^2}{\ln(a/b)} \tag{12-83}$$

按式(12-80)，当$\widetilde{G} \geqslant \gamma$时，导电隧道继续扩展。

12.5.2 J积分理论

由式(3-120)知，对于三维问题，当闭合积分面内无奇点或空洞等缺陷时，存在守恒积分

$$\oint_s (g\delta_{ij} - \Sigma_{\alpha j} u_{\alpha,i}) n_j \mathrm{d}a = 0 \tag{12-84}$$

式中g为电Gibbs自由能，n_i为曲面的外向法线。上式表明，对于任一以缺陷上的闭曲线为起始曲线的包含缺陷表面的闭曲面，式(12-84)的积分取相同的值。类似于二维问题，这里给出三维问题的J积分。对于纯电载荷的情形，可以定义J积分为

$$J_i = \int_a (g\delta_{ij} - D_j\varphi_{,i}) n_j \mathrm{d}a \tag{12-85}$$

根据二维问题的结果知，对于缺陷问题，J积分值等于能量释放率。对于具有隧道的三维缺

陷,Beom 和 Kim[254]给出如下证明:讨论介质内一包含隧道头部的封闭曲面,该封闭曲面的外向法线为 $\boldsymbol{m}$(在缺陷表面指向缺陷内部),当无体积力和体积电荷,缺陷固定时,按虚功原理有

$$\int_V \delta g \mathrm{d}V - \int_a t_i \delta u_i \mathrm{d}a - \int_a D_i m_i \delta\varphi \mathrm{d}a = 0 \tag{12-86}$$

如果缺陷以速度 v_i 作相似扩展,则 δt 时间内介质中自由能的变化为

$$\delta\int_V g\,\mathrm{d}V = \int_V \delta g \mathrm{d}V + \int_{a_c} g v_i \delta t m_i \mathrm{d}a \tag{12-87}$$

式中 a_c 为缺陷表面积。因而电介质的总势能的变分变为

$$\begin{aligned}\delta\Pi &= \delta\int_V g\,\mathrm{d}V - \int_{a_\sigma} t_i \delta u_i \mathrm{d}a - \int_{a_D} D_i m_i \delta\varphi \mathrm{d}a \\ &= \int_{a_c} g v_i \delta t m_i \mathrm{d}a + \int_{a_u} t_i \delta u_i \mathrm{d}a + \int_{a_\varphi} D_i m_i \delta\varphi \mathrm{d}a = 0\end{aligned} \tag{12-88}$$

上式已利用了 $a = a_\sigma + a_u = a_D + a_\varphi$。注意到在 a_u 上 u_i 是规定的,a_φ 上 φ 是规定的,在 a_c 上 $\delta\varphi = -\varphi_{,i} v_i \delta t$,在 $a - a_c$ 上 $v_i = 0$,所以式(12-88)又可写成

$$\frac{\delta\Pi}{\delta t} = \int_{a_c} g v_j m_j \mathrm{d}a + \int_{a_c} D_i m_i v_j E_j \mathrm{d}a \tag{12-89}$$

设隧道长度为 b,位于 x_1 轴上,并沿 x_1 轴扩展,从而上式中的 $v_i = \dot{b}\delta_{i1}$,同时注意到隧道头部的外法线 $\boldsymbol{n}$ 和上述封闭曲面的外法线 $\boldsymbol{m}$ 反向,即 $\boldsymbol{n} = -\boldsymbol{m}$ 。从而能量释放率$\widetilde{G}$为

$$\widetilde{G} = -\frac{\delta\Pi}{\delta b} = -\frac{1}{\dot{b}}\frac{\delta\Pi}{\delta t} = \int_{a_c} (g n_1 + n_i D_i E_1) \mathrm{d}a \tag{12-90}$$

上式和式(12-85)一致,即有 $J = \widetilde{G}$。

利用式(12-85)中的 J 积分或(12-90)中的能量释放率 $\widetilde{G}$,可以计及缺陷形状的影响。下面给出具体例子。设半无限电介质表面有一半径为 a 的半球金属头缺陷,研究在外加平行的电场 E_0 作用下的电击穿问题(图 12-17)。无限介质中有一金属球的解在标准教科书中都有,利用对称性可得半球的解,球外电势为

$$\varphi = -E_0\left(r - \frac{a^3}{r^3}\right)\cos\theta, \quad E_r = E_0\left[1 + 2\left(\frac{a}{r}\right)^3\right]\cos\theta$$
$$E_\theta = -E_0\left[1 - \left(\frac{a}{r}\right)^3\right] \tag{12-91}$$

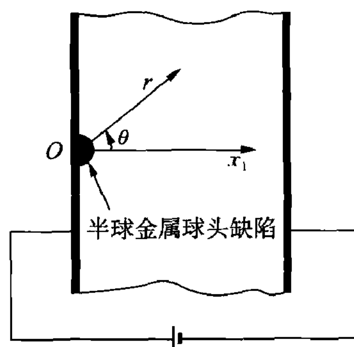


图 12-17　半球金属球头缺陷

式中 r, θ 为球坐标,$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$,$\theta$ 为由正 x_1 轴算起的极角。由上式推出

$$g = -\frac{1}{2}\epsilon(E_r^2 + E_\theta^2), \quad D_r = \epsilon E_r, \quad D_\theta = \epsilon E_\theta \tag{12-92}$$

注意到当只考虑电场作用时，球头无应力。从而求得

$$J = \frac{9}{4}\pi\epsilon c^2 E_0^2 \tag{12-93}$$

利用 J 积分可进一步讨论电击穿问题。

对于在平行于长轴的电场作用下的半无限电介质表面有一半椭球金属缺陷的电击穿问题，可采用椭球坐标处理[20]，最终可得

$$\begin{aligned} &J = \pi\epsilon c^2 E_0^2 H(\lambda) \\ &H(\lambda) = \frac{(1-\lambda^2)[(1-\lambda^2)+2\lambda^2\ln\lambda]}{2\left[\sqrt{1-\lambda^2}-\lambda\left(\frac{\pi}{2}-\arctan\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}\right)\right]},\ 0<\lambda=\frac{a}{c}<1 \\ &H(\lambda) = \frac{2(\lambda^2-1)[(\lambda^2-1)+2\lambda^2\ln\lambda]}{2\left[\sqrt{\lambda^2-1}+\lambda\left(\ln\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2-1}}{\lambda+\sqrt{\lambda^2-1}}\right)\right]},\ \lambda=\frac{a}{c}>1 \end{aligned} \tag{12-94}$$

式中 c 为旋转面内椭球的半轴长，a 为垂直旋转面的半轴长。当 $a\to 0$ 时，半椭球变为钱币形，此时有

$$J = \frac{1}{2}\pi\epsilon c^2 E_0^2 \tag{12-95}$$

对于除了头部外，隧道还有一定长度的情形，需要用有限元求解电场。

参 考 文 献

[1] 孙慷,张福学.压电学[M].北京:国防工业出版社,1984.

[2] IKEDA T. Fundamentals of piezoelectricity [M]. Oxford, New York, Tokyo: Oxford university press, 1990.

[3] 方俊鑫,殷之文.电介质物理学[M].北京:科学出版社,1989.

[4] 匡震邦.非线性连续介质力学[M].上海:上海交通大学出版社,2002.

[5] МУСХЕЛИШВИЛИ Н Е. Некоторые основные задачи математической теории упругости [M]. Москва: Издательство академии наук CCC, 1954. MUSKHELISHVILI N I. Some basic problems of mathematical theory of elasticity. Noordhoof, Leyden: 1975.

[6] Лехницкий С Г. Анизотропные пластинки [M]. Москва: Государственные издадельство технико-теоретической литературы, 1957. LEKHNITSKII S G. Anisotropic plates, 2th ed. transl. by S. W., TSAI, AND T. CHERON. New York: Gordon and Breach, 1987.

[7] STROH A N. Dislocations and cracks in anisotropic elasticity [J]. Philosophical Magazine, 1958,3: 625 - 646.

[8] TING T C T. Anisotropic elasticity, theory and applications [M]. New York, Oxford: Oxford University Press, 1996.

[9] 匡震邦,马法尚.裂纹端部场[M].西安:西安交通大学出版社,2002.

[10] ESHELBY J D. The elastic energy-momentum tensor [J]. Journal of elasticity, 1975,5:321 - 335.

[11] 黄筑平.连续介质力学基础[M].北京:高等教育出版社,2003.

[12] Гельфанд, И M.线性代数学[M].刘亦珩,译.北京:高等教育出版社,1953.

[13] Muskhelishvili N I. Singular integral equations [M]. Holland: Noordhoff, Gronigen, 1975.

[14] 侯宗义,李明忠,张万国.奇异积分方程及其应用[M].上海:上海科学技术出版社,1990.

[15] ЛАВРЕНТЬЕВ М А, ШАБАТ В А.复变函数论方法[M].施祥林,夏定中,译.北京;高等教育出版社,1956.

[16] Ландау Л Д, Лифшиц Е М. Электродинамика сплошных сред [M]. Москва: ФИЗМАТГИЗ, 1959. LANDAU L D, LIFSHITZ E M, PITAEVSKII L P. Electrodynamics of Continuum Media. Second edition, Oxford., UK: Pergamon Press, 1984.

[17] ERINGEN A C, MAUGIN G A. Elecgtrodynamics of continuua [M]. New York: Springer-Verlag, 1989.

[18] MAUGIN G A, POUGET J, DROUOT R, COLLET B, Nonlinear of Electromechanical Couplings [M]. Chichester, New York: John Wiley & Sons, 1992.

[19] PAO Y H. Electromagnetic forces in deformable continua [J]. //NEMAT-NASSER. Mechanics today. Bath: printed in great britain by pit man, 1978.

[20] STRATTON J A. Electromagnetic Theory [M]. New York: Mcgraw-Hill, 1941.

[21] 蔡圣善,朱耘.经典电动力学[M].上海:复旦大学出版社,1985.

[22] Круг, K A,(主编).电工原理[M].周孔章,等,译.上海:龙门联合书局,1954.

[23] 王竹溪.热力学[M].北京:高等教育出版社,1955.

[24] DE GROET S R. Thermodynamics of Irreversible Processes [M]. North-Holland Publishing Company, 1952.
[25] GYARMATI I. Non-equilibrium thermodynamics, Field theory and variational principles [M]. Berlin, Heidelberg, New York: Springer-Verlag, 1970.
[26] KUANG Z-B. Some problems in electrostrictive and magnetostrictive materials [J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2007,20:219 - 227.
[27] KUANG Z-B. Some variational principles in elastic dielctric and elastic magnetic materials [J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2008,27:504 - 514.
[28] 匡震邦.广义变分原理和薄板理论[R].西安:西安交通大学科技报告,1964.
[29] 匡震邦.有限变形下电弹性介质中的某些变分原理[J].中国科学,G辑,2008,38:919 - 930; KUANG Z-B. Some variational principles in electroelastic media under finite deformation [J]. Science in China, Series G, 2008,51:1390 - 1402.
[30] KUANG Z-B. Physical variational principle, and thin plate theory in electro-magneto-elastic Analysis [J], International journal of solids and structures, 2011,48:317 - 325.
[31] KUANG Z-B. International energy variational principles and governing equations in electroelastic analysis [J]. International journal of solids and structures, 2009,46:902 - 911.
[32] NOTHER E. Invariant variational problems [J]. Nachr. Ges. Gottingen (Math-Phys. Klasse), 1918, 2:235 - 253. Also see: Trandp. Th. Stat. Phys. (trans. M. Tavel), 1971,1:186 - 207.
[33] SHI W-C, KUANG Z-B. Conservation laws in non-homogeneous electro-magneto-elastic materials [J]. European Journal of Mechanics-A/Solids, 2003,22:217 - 230.
[34] PAK Y E. Crack extension force in a piezoelectric material [J]. Journal of applied mechanics, 1990,57: 647 - 653.
[35] WANG X.-M, SHEN Y-P. The conservation laws and path-independent integrals with an application for linear electro-magneto-elastic media [J]. International journal of solids and structures, 1996, 33: 865 - 878.
[36] FLETCHER D C. Conservation laws in linear elastodynamics [J]. Archive for rational mechanics and analysis, 1976,60:330 - 353.
[37] 王吉伟,匡震邦.热释电体非保守动力学系统的守恒定律,力学季刊[J],2001,22:154 - 161.
[38] ESHELBY J D. The continuum theory of lattice defects [M]. Solid state physics, 1956,3:79 - 144// Edited by Seitz and TuruBull.
[39] Suo, Z., Singularities interfaces and cracks in dissimilar anisotropic media [J], Proceedings of the Royal Society of London, Series A, 427:331 - 358,1990.
[40] SUO Z, KUO C M, BARNETT D M, Willis J R. Fracture mechanics for piezoelectric ceramics [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1992,40:739 - 765.
[41] YANG X-X, SHEN S-P, KUANG Z-B. The degenerate solution for piezothermoelastic materials [J]. European journal of mechanics. A, Solids, 1997,16:779 - 793.
[42] SHEN S P, KUANG Z-B. An alternative expression of piezoelectric representation and its application in inclusion problem [J]. International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics, 1999,10:279 - 292.
[43] HUANG Z Y, KUANG Z-B. Explicit expression of the A and B matrices for piezoelectric media [J]. Mechanics research communications, 2000,27:575 - 581.
[44] SOSA H. Plane problems in piezoelectric media with defects [J]. International journal of solids and structures, 1991,28:491 - 505.
[45] SOSA H, KHUTORYANSKY N. New developments concerning piezoelectric materials with defects [J]. International journal of solids and structures, 1996,33:3399 - 3414.
[46] GAO C-F, FAN W-X. Exact solutions for the plane problem in piezoelectric material with an elliptic or a crack [J]. International journal of solids and structures, 1999,36:2527 - 2540.

[47] ZHANG T-Y, QIAN C-F, TONG P. Linear electro-elastic analysis of a cavity or a crack in a piezoelectric material [J]. International journal of solids and structures, 1998,35:2121 - 2149.

[48] PARTON V Z. Fracture mechanics of piezoelectric materials [J]. Acta Astronaut, 1976,3:671 - 683.

[49] MURA T. Micromechanics of Defects in Solids [M]. 2nd Revised Edition, Martinus — Nijhoff, Deventer, The Netherlands: 1987.

[50] HUANG Z-Y, KUANG Z-B. Asymptotic electro-elastic field near a blunt crack tip in a transversely isotropic piezoelectric material [J]. Mechanics research communications, 2000,27:601 - 606.

[51] HOENIG A. Near tip behavior of a crack in a plane anisotropic elastic body [J]. Engineering fracture mechanics, 1982,16:393 - 403.

[52] XU X L, RAJAPAKSE R K N D. Analytical solution for an arbitrarily oriented void/grack and fracture of piezoceramics [J]. Acta Materialia, 1999,47:1735 - 1747.

[53] 侯密山,高存法.含椭圆形刚性夹杂的压电材料平面问题[J].计算力学学报,1997,14:189 - 195.

[54] LIANG J, HAN J, WANG B, DU S. Electroelastic modeling of anisotropic piezoelectric materials with an elliptic inclusion [J]. International journal of solids and structures, 1995,32:,2989 - 3000.

[55] LI C, WENG G J. Antiplane crack problem in functional graded piezoelectric materials [J]. Journal of applied mechanics. 2002,69:481 - 488.

[56] UEDA S. Electromecanical response of a center crack in a functional graded piezoelectric strip [J]. Smart Materials and Structures, 2005,14:1133 - 1138.

[57] ZHOU Z G, CHEN Z T. Basic solution of a mode - I limited-permeable crack in functional graded piezoelectric/piezomagnetic materials [J]. International journal of solids and structures, 2008,45:2265 - 2296.

[58] PAK Y E. Linear electro-elastic fracture mechanics of piezoelectric materials [J]. International Journal of Fracture, 54:79 - 100,1992.

[59] HUANG Z-Y, KUANG Z-B. A mixed electric boundary value problem for a two-dimensional piezoelectric crack, [J]. International journal of solids and structures, 2003,40:1433 - 1453.

[60] HUANG Z-Y, KUANG Z-B. A first order perturbation analysis of a non-ideal crack in a piezoelectric material [J]. International journal of solids and structures, 2001,38:7261 - 7281.

[61] HAO T H, SHEN Z Y. A new electric boundary condition of electric fracture mechanics and its applications [J]. Engineering fracture mechanics, 1994,47:793 - 802.

[62] ZHANG T-Y, QIAN C-F, TONG P. Linear electroelastic analysis of a cavity or a crack in a piezoelectric material [J]. International journal of solids and structures, 1998,35:2121 - 2149.

[63] WANG T C. Analysis of strip electric saturation model of crack problem in piezoelectric materials [J]. International journal of solids and structures, 2000,37:6031 - 6049.

[64] GAO H J, ZHANG T Y, TONG P. Local and global energy release rates for an electrically yielded crack in apiezoelectric ceramic [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1997,45:491 - 510.

[65] KUANG Z-B, ZHOU Z D, ZHOU K L. Electroelastic analysis of a piezoelectric half-plane with finite surface electrodes [J]. International journal of engineering science, 2004,42:1603 - 1619.

[66] ZHOU K L, ZHOU Z D, KUANG Z-B. Surface electrode problems in piezoelectric materials [M]. Advanced Materials Research, 2005,9:191 - 198.

[67] RU C Q, MAO X. Conducting cracks in a piezoelectric ceramic of limited electrical polarization [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1999,47:2125 - 2146.

[68] SHINDO Y, NARITA F, SOSA H. Electroelastic analysis of piezoelectric ceramics with surface electrodes [J]. International journal of engineering science, 1998,36:1001 - 1009.

[69] WANG X Y, YU S W. Transient response of a crack in piezoelectric strip subjected to the mechanical and electrical impacts: mode-I problem [J]. Mechanics of materials, 2001,33:11 - 20.

[70] ERDOGAN F, GUPTA G D. On the numerical solution of singular integral equations [J]. Quarterly of Applied Mathematics, 1972,32:525 - 534.

[71] ACHENBACH J, KEER L, MENDELSOHN D. Elastodynamic analysis of an edge crack [J]. Journal of applied mechanics, 1980,47:551 - 556.

[72] Lu C-K, A class of quadrature formulas of Chebyshev type for singular integrals [J]. Journal of mathematical analysis and applications, 1984,100:416 - 435.

[73] 路见可,解析函数边值问题(第二版)[M],武汉:武汉大学出版社,2004.

[74] CHEN J, LIU Z X. On the dynamic behavior of a functionally graded piezoelectric strip with periodic cracks vertical to the boundary [J]. International Journal of Solids and Structures, 2005, 42: 3133 - 3146.

[75] CHEN J, LIU Z X, ZOU Z G. Dynamic Response of a crack in a functionally graded interface of two dissimilar Piezoelectric half-planes [J]. Archive of Applied mechanics, 2003,72:686 - 696.

[76] BEOM H G, ATLURI S N. Near-tip fields and inteasity factors for interfacial cracks in dissimilar anisotropic piezoelectric media [J]. International journal of fracture, 1996,75:163 - 183.

[77] SHEN M H, CHEN F M, CHEN S N. Piezoelectric study on singularities interacting with interfaces in an anisotropic medium [J]. International journal of solids and structures, 2007,44:5598 - 5610.

[78] SHEN S P, KUANG Z-B, HU S L. Interface crack problem of a laminated piezoelectric plate [J]. European journal of mechanics, A, Solids, 1999. 18:219 - 238.

[79] 高存法,樊蔚勋. 两压电介质之间的界面夹杂问题[J]. 应用数学和力学,2001,22:85 - 92.

[80] SHI W C. Rigid line inclusions under anti-plane deformation and in-plane electric field in piezoelectric materials [J]. Engineering fracture mechanics, 1997. 56:265 - 274.

[81] DENG W, MEGUID S A. Analysis of conducting rigid inclusion at the interface of two dissimilar piezoelectric materials [J]. Journal of applied mechanics, 1998,65:76 - 94.

[82] GAO C-F, WANG M-Z. Collinear permeable cracks between dissimilar piezoelectric materials [J]. International journal of solids and structures, 2000,37:4969 - 4986.

[83] RU C Q. Exact solution for finite electrode layers embedded at the interface of two piezoelectric half-planes [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2000,48:693 - 708.

[84] HERRMANN K P, LOBOBDA V V. Fracture-mechanical assessment of electrically permeable binterface cracks in piezoelectric bimaterials by consideration of various contact zone models [J]. Archive of Applied Mechanics, 2000,70:127 - 143.

[85] LOBODA V V. The quasi-invariant in the theory of interface cracks, Engineering fracture mechanics [J]. 1993,44:573 - 580.

[86] HERRMANN K P, LOBODA V V, Govorukha V B, On contact zone models for an electrically impermeable interface crack in a piezoelectric bimaterial [J]. International Journal of Fracture, 2001, 111:203 - 227.

[87] ZHONG Z, MEGUID S A. Interfacial debonding of a circular inhomogeneity in piezoelectric materials [J]. International journal of solids and structures, 1997,34:1965 - 1984.

[88] GAO C-F, BALKE H. Fracture analysis of circular-arc interface cracks in piezoelectric materials [J]. International journal of solids and structures, 2003,40:3507 - 3522.

[89] SHEN S P, NISHIOKA T, KUANG Z-B, LIU Z X. Nonlinear electromechanical interface fracture for piezoelectric materials [J]. Mechanics of materials, 2000,32:57 - 64.

[90] BARNETT D M, ASARO R J. The fracture mechanics of slit-like cracks in anisotropic elastic media [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1972,20:353 - 366.

[91] CHEN Z T, KARIHALOO B L, YU S W. A Griffith moving along the interface of two dissimilar piezoelectric materials [J]. International Journal of Fracture, 1998,91:197 - 203.

[92] LI S, MATAGA P A. Dynamic crack propagation in piezoelectric materials, — part Ⅰ. Electrode solution [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids 1996,44:1799 - 1830; -part Ⅱ. vacuum solution, 44:1831 - 1866.

[93] TUCKER M O. Plane boundaries and straight dislocations in elastically anisotropic materials [J]. Philosophical Magazine, 1969,19:1141－1159.

[94] BARNETT D M, LOTHE J. Dislocations and line charges in anisotropic piezoelectric insulators [J]. Physica Status Solidi, (b), 1975,67:105－111.

[95] Gao C-F, Wang M-Z, Green's functions of an interfacial crack between two dissimilar piezoelectric media [J], International Journal of Solids and Structures, 2001,38:5323－5334.

[96] 王吉伟,匡震邦. 双压电体界面上的电偶极子和裂纹[J]. 力学学报,2002,34:192－199.

[97] 王吉伟. [D]. 热释电体,电偶极子和界面裂纹研究,上海:上海交通大学工程力学系,2000.

[98] ZHOU Z D, NISHIOKA T, KUANG Z-B. A generalized screw dislocation in a piezoelectric trimaterial body [J]. International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics, 2007,26:21－36.

[99] 周志东,赵社戌,匡震邦. 含界面刚性线夹杂与广义压电位错双压电介质的电弹性分析[J]. 固体力学学报,2008,29:1－8.

[100] HUANG Z-Y, KUANG Z-B. Dislocation inside a piezoelectric media with an elliptic inhomogeneity [J]. International Journal of Solids and Structures, 2001,38:8459－8479.

[101] LIU J X, DU S Y, WANG B. A screw dislocation interaction with a piezoelectric bimaterial interface [J]. Mechanics research communications, 1999,26:415－420.

[102] MEGUID S A, DENG W. Electro-elastic interaction between a screw dislocation and an elliptical inhomogeneity in piezoelectric materials [J]. International journal of solids and structures, 1998,35:1467－1482.

[103] DENG W. MEGUID S A. Analysis of a screw dislocation inside an elliptical inhomogeneity in piezoelectric solids [J]. International journal of solids and structures, 1999,36:1449－1469.

[104] FAN Q H, LIU Y W, JIANG C P. Electroelastic interaction between a piezoelectric screw dislocation and an elliptical inclusion with interfacial cracks [J]. Physica Status Solidi, (b) 2005,242:2775－2794.

[105] 王吉伟,匡震邦. 压电体中裂纹与孤立电偶极子的相互作用[J]. 固体力学学报,2001,22:1－7. WANG J W, KUANG Z-B. The interaction between crack and electric dipole of piezoelectricity [J]. Acta mechanica solida sinica, 2000,13:283－289.

[106] ZHOU Z D, ZHAO S X, KUANG Z-B. Stress and electric displacement analysis in piezoelectric media with an elliptic hole and a small crack [J]. International Journal of Solids and Structures, 2005,42, 2803－2822.

[107] KUANG Z-B, JIANG Q. Stress analysis in two dimensional electrostrictive material under general loading [C]// Yang W. IUTAM Symposium Mechanics and Reliability of Actuating Materials, Springer, Netherlands: 2006:68－84.

[108] JIANG Q, KUANG Z-B. Stress analysis of electrostrictive material with an elliptic defect [J]. Science in China (Series G), 2003,46,492－458.

[109] SMITH T E, WARREN W E. Electromagnetic force in deformable electrostriction [J]. Journal of mathematical physics, 1966,45:45－51. corrigenda: 1968,47:109－110.

[110] GAO C F. MAI Y W, ZHANG N. Solution of a crack in an electrostrictive solid [J]. International journal of solids and structures, 2010,47,444－453.

[111] JIANG Q, KUANG Z-B. Stress analysis in two dimensional electrostrictive material with an elliptic rigid conductor [J]. European Journal of Mechanics — A/Solids, 2004,23:945－956.

[112] JIANG Q, KUANG Z-B. Stress and electric fields in an infinite electrostrictive plate with an elliptic inhomogeneity [J]. European journal of mechanics. A, Solids, 2007,26:225－241.

[113] 蒋泉,匡震邦. 含椭圆夹杂的无限大平面电致伸缩材料的应力分析[J]. 固体力学学报,2005,26:55－61.

[114] JIANG Q, KUANG Z-B. Stress analysis in cracked infinite electrostrictive plate with local saturation electric fields [J]. International journal of engineering science, 2006,44:1583－1600.

[115] BEOM H G, KIM Y H, CHO C, KIM C B. Asymptotic analysis of an impermeable crack in an electrostrictive material subjected to electric loading [J]. International Journal of Solids and Structures, 2006,43:6869 - 6886.

[116] HAO T H, GONG X. , SUO Z. Fracture mechanics for the design of ceramic multilayer actuators [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1996,44:23 - 48.

[117] YANG W, SUO Z. Cracking in ceramic actuators caused by electrostriction [J]. Journal of The Mechanics and Physics of Solids, 1994,42(4):649 - 663.

[118] SHKEL Y M, KLINGENBERG D J. Material parameters for electrostriction [J]. Journal of applied physics, 1996,80:4566 - 4571.

[119] GUILLOT F M, JARZYNSKI J, BALIZER J E. Measurement of electrostrictive coefficients of polymer films [J]. Journal of the acoustical Society of America, 2001,110:2980 - 2990.

[120] MOON E C. Magneto-Solid Mechanics [M]. New York, Chichester. Brisbane. Toronto, Singapore: A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, 1984.

[121] ZHANG Q M. , SU J, KIM C H. An experimental investigation of electromechanical responses in a polyurethane elastomer [J]. Journal of applied physics, 1997,81:2770 - 2776.

[122] KNOPS R J. Two-dimensional electrostriction [J]. The quarterly journal of mechanics and applied mathematics, 1963,16:377 - 388.

[123] MCMEEKING R M, LANDIS C M. Electrostatic forces and stored energy for deformable dielectric materials [J]. Journal of applied mechanics, 2005,72:581 - 590.

[124] MCMEEKING R M, LANDIS C M, JIMENEZ, A. Principle of virtual work for combined electrostatic and mechanical loading of materials [J]. International Journal of nonlinear mechanics, 2007, 42: 831 - 838.

[125] MAUGIN G A. Continuum Mechanics of Electromagnetic Solids [M]. New York, Oxford, Tokyo: North Holland Amsterdam, 1988.

[126] Kankanala, S. V, Triantafyllidis, N. On finitely strained magnetorheological elastomers [J], Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 2004,52:2869 - 2908.

[127] Bustamante, R. , Dorfmann, A. , Ogden, R. W. On variational formulations in nonlinear magnetoelastostatics [J], Mathematics and Mechanics of Solids, 2008,13:725 - 745.

[128] FEDOROV F I. Theory of elastic waves in crystals [M]. New York: Plemun Press, 1968.

[129] AULD B A. Acoustic fields and waves in solids [M]. New York: John Wiely & sons, 1973.

[130] NAYFEN A. Wave propagation in layered anisotropic media [M]. Amsterdam: Elsevier, 1995.

[131] DIEULESAINT E, ROYER D. Elastic waves in solids [M]. translated by BASTIN A, MOTZ M. John wiely & Sons, 1980.

[132] BIRYUKOV S V, GULYAEV Y V, KRYIOV V V, PLESSKY V P. Surface acoustic waves in inhomogeneous media [M]. New York: Springer-Verlag, 1995.

[133] WANG X D. On the dynamic behavior of interacting interfacial cracks in piezoelectric media [J]. International Journal of Solids and Structures, 2001,38:815 - 831.

[134] BURKOV S, SOROKIN B, GLUSHKOV D, ALEKSANDROV K. Theory and computer simulation of the reflection and refraction of bulk acoustic waves in piezoelectrics under the action of an external electric field [J]. Crystallography Reports, 2005,50:986 - 993.

[135] KUANG Z-B, YUAN X G. Reflection and transmission theories of waves in pyroelectric and piezoelectric materials [J]. Journal of Sound and Vibration, 2011,330:1111 - 1120.

[136] BLEUSTEIN J L. A new surface wave in piezoelectric materials [J]. Applied Physics Letters, 1968, 13:412 - 413.

[137] GULYAEV Y V. Electroacoustic surface waves in solids [J]. Soviet Physics-JETP (A translation of the "Journal of experimental and theoretical physics of the Academy of Sciences of the USSR") 1969,9:

37 - 38.

[138] 刘华,匡震邦,蔡正敏.非均匀压电层状结构正 Love 波的传播[J].力学学报,2003,35:485 - 488.

[139] SU J, LIU H, KUANG Z-B. Love wave in $ZnO/SiO_2/Si$ structure with initial stresses [J]. Jounnal of Sound and Vibration, 2005,286:981 - 999.

[140] TIERSTEN H F. Pertubation theory for linear electroelastic equations for small fields superposed on a bias [J]. Journal of the acoustical Society of America, 1978,64:832 - 837.

[141] SINHA A K, TANSKI W J, LUKASZEK T, BALLATO A. Influence of biasing stress on the propagation of surface waves [J]. Journal of applied physics, 1985,57:767 - 776.

[142] STEWART J T, YONG Y K. Exact analysis of the propagation of acoustic waves in multilayered anisotropic piezoelectric plate [J]. IEEE Transactions on ultrasonic ferroelectrics and frequency control, 1994,41:375 - 390.

[143] LIU H, KUANG Z-B, CAI Z M. Application of transfer matrix method in analyzing the inhomogeneous initial stress problem in prestressed layered piezoelectric media [J]//WATANABE k, ZIEGLER F. IUTAM symposium on dynamics of advanced materials and smart structures [M], Dordr echt/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 2003.

[144] LIU H, WANG Z K, WANG T J. Effect of initial stress on the propagation behavior of Love waves in a layered piezoelectric structure [J]. International Journal of Solids and Structures, 2001,38:37 - 51.

[145] DANOYAN Z N, PILLIPOSIAN G T. Surface electro - elastic Love waves in a layered structure with a piezoelectric substrate and a dielectric layer [J]. International Journal of Solids and Structures, 2007, 44:5829 - 5847.

[146] LIU H, KUANG Z-B, CAI Z M. Propagation of Bleustein-Gulyaev Waves in a Prestressed Layered Piezoelectric Structure [J]. Ultransonics, 2003,41:397 - 405.

[147] JIN F, WANG Z K, WANG T J. The Bleustein-Gulyaev (B - G) Wave in a piezoelectric layered half — space [J]. International journal of engineering science, 2001,39:1271 - 1285.

[148] LIU H, WANG T J, WANG Z K, KUANG Z-B. Effect of a biasing electric field on the propagation of antisymmetric Lamb waves in piezoelectric plates [J]. International Journal of Solids and Structures, 2002,39:1777 - 1790.

[149] LIU H, WANG T J, WANG Z K, KUANG Z-B. Effect of a biasing electric field on the propagation of symmetric Lamb waves in piezoelectric plates [J]. International Journal of Solids and Structures, 2002, 39:2031 - 2049.

[150] LIU H, KUANG Z-B, CAI Z M. Propagation of surface acoustic waves in prestressed anisotropic layered piezoelectric structures [J]. Acta mechanica Solida. Sinica, 2003,16:16 - 23.

[151] BABICH V M, LUKYANOV V V. Wave propagation along a curved piezoelectric layer [J]. Wave motion 1998,28:1 - 11.

[152] SHEN S P, NISHIOKA T, KUANG Z-B. Impact interfacial fracture for piezoelectric ceramic [J]. Mechanics research communications, 1999,26:347 - 352.

[153] SHEN S, KUANG Z-B, NISHIOKA T. Wave scattering from an interface crack in multilayered piezoelectric plate [J]. European journal of mechanics. A, Solids, 2000,19:547 - 559.

[154] SHEN S, KUANG Z-B, HU S L. Wave propagation in multilayered anisotropic media [J]. Mechanics research communications, 1998,25:503 - 507.

[155] SHEN S, KUANG Z-B, NISHIOKA T. Dynamics mode-Ⅲ interfacial crack in nonlinear piezoelectric materials [J]. International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics, 2000,11:211 - 222.

[156] TIERSTEN H E. On the nonlinear equations of thermo-electroelasticity [J]. International journal of engineering science, 1971,9:587 - 604.

[157] MINDLIN R D. Equations of high frequency vibrations of thermopiezoelectric crystal plates [J]. International journal of solids and structures, 1974,10:625 - 637.

[158] SHEN S P, KUANG Z-B. Interface crack in bi-piezothermoelastic media and the interaction with a point heat source [J]. International journal of solids and structures, 1998,35:3899 - 3915.

[159] HWU C B. Thermoelastic interface crack problems in dissimilar anisotropic media [J]. International journal of solids and structures, 1992,29:2077 - 2090.

[160] GAO C F, WANG M Z. Collinear permeable cracks in thermopiezoelectric materials [J]. Mechanics of materials, 2001,33:1 - 9.

[161] HERRMANN K P, LOBODA V V. Fracture-mechanical assessment of interface cracks with contact zones in piezoelectric bimaterials under thermoelectromechanical loadings Ⅱ Electrically impermeable interface cracks [J]. International journal of solids and structures, 2003,40:4219 - 4237.

[162] NORRIS A N. Dynamic Green's functions in anisotropic piezoelectric, thermalelastic and poroelastic solids [J]. Proc. Roy. Soc. Lond, 1994,A447:175 - 188.

[163] QIN Q H. Thermoelectroelastic Green's function for thermal load inside or on the boundary of an elliptic inclusion [J]. Mechanics of Materials 1999,31:611 - 626.

[164] QIN Q H. Thermoelectroelastic solution for elliptic inclutions and application to crack-inclusion problems [J]. Applied Mathematical Modelling, 2000,25:1 - 23.

[165] LORD H W, SHULMAN Y. A generalized dynamical theory of thermoelasticity [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1967,15:299 - 309.

[166] Cattaneo C. Sur une forme de l'équation de la chaleur éliminant le paradoxe d'une propagation instantanee [J]. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris, 1958,247:431 - 433.

[167] KALISKI S. Wave equation of thermoelasticity [J]. Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des Sciences Techniques, 1965, 13:211 - 219.

[168] JOSEPH D D, PREZIOSI L. Heat waves [J], Reviews of Morden Physics, 1989,61:41 - 73.

[169] GREEN A E, LINDSAY K A. Thermoelasticity [J]. Journal of Elasticity, 1972,2:1 - 7.

[170] GREEN A E, NAGHDI P M. Thermoelasticity without energy dissipation [J]. Journal of Elasticity, 1993,31:189 - 208.

[171] HE T, TIAN X, SHEN Y. Two dimensional generalized thermal shock problem of a thick piezoelectric plate of infinite extent [J]. International journal of solids and structures, 2002,40:2249 - 2264.

[172] NOWACKI W. Some general theorems of thermopiezoelectricity [J]. Journal of thermal stresses, 1978,1:171 - 182.

[173] 王吉伟,匡震邦.热释电体非保守动力学系统的守恒定律[J].力学季刊,2001,22:154 - 161.

[174] Shen S P, Kuang Z-B, An active control model of laminated piezothermoelastic plate [J]. International Journal of Solids and Structures, 1999,36:1925 - 1947.

[175] Kuang Z-B. Variational principles for generalized dynamical theory of thermopiezoelectricity [J]. Acta Mechanica, 2009,203:1 - 11.

[176] BANERJEE D K, BAO Y H. Thermoelastic waves in anisotropic solids [J]. Journal of the Acoustical Society of America, 1974,56:1444 - 1454.

[177] SHARMA J N, PAL M. Propagation of Lamb waves in a transversely isotropic piezothermoelastic plate [J]. Journal of Sound and Vibration, 2004,270:587 - 610.

[178] YUAN X G, KUANG Z-B. Waves in pyroelectrics [J]. Journal of thermal stress, 2008, 31: 1190 - 1211.

[179] YUAN X G, KUANG Z-B. The inhomogeneous waves in pyroelectrics [J], Journal of thermal stress, 2010,33:172 - 186.

[180] BUCHEN P W. Plane waves in linear viscoelastic media [J]. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society, 1971,23:531 - 542.

[181] BORCHERDT R D. Energy and plane waves in linear viscoelastic media [J]. Journal of Geophysical Research, 1973,78:2442 - 2453.

[182] KREBES E S. The viscoelastic reflection/transmission problem: two special cases [J]. Bulletin of the Seismological Society of America, 1983,73:1673 - 1683.

[183] SHARMA J N, WALIA V, GUPTA S K. Reflection of piezothermoellastic waves from the charge and stress free boundary of a transversely isotropic half space [J]. International journal of engineering science, 2008,46:131 - 146.

[184] KYAME J J. Wave propagation in piezoelectric crystals [J]. The Journal of the Accostical Society of America, 1949,21:159 - 167.

[185] Sherief H H, Hamza F A, Saleh H A. The theory of generalized thermoelastic diffusion [J], International Journal of engineering science, 2004,42:591 - 608.

[186] Genin J, Xu W, 1999, Thermoelastic plasticmetals with mass diffusion [J], Z. angew. Math. Phys., 50:511 - 528.

[187] Kuang Z-B. Variational principles for generalized thermodiffusion theory in pyroelectricity [J], Acta Mechanica, 2010,214:275 - 289.

[188] WANG Z K, ZHENG B L. The general solution of three dimensional problems in piezoelectric media [J]. International journal of solids and structures, 1995,32:105 - 115.

[189] DING H J, CHEN B, LIANG J. General solutions for coupled equations for piezoelectric media [J]. International journal of solids and structures, 1997,34:3041 - 3057.

[190] FABRIKANT V I. Applications of Potential Theory in Mechanics, A selection of new results [M]. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, 1989.

[191] CHEN W Q, SHIOYA T. Fundamental solution for a penny-shaped crack in a piezoelectric media [J]. International journal of solids and structures, 1999,47:1459 - 1475.

[192] CHEN W Q, LIM C W. 3Dpoint force solution for a permeable penny-shaped crack embedded in an infinite transversely isotropic piezoelectric medium [J]. International journal of solids and structures, 2005,131:231 - 246.

[193] ESHELBY J D. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems [J]. Proceedings of the Royal Society of Lond, A, 1957,241:376 - 396.

[194] Deeg W F. The analysis of dislocation, crack and inclusion problems in piezoelectric solids, ph. D. Dissertation, Stanford University, 1980.

[195] WANG B. Three — dimensional analysis of an ellipsoidal inclusion in a piezoelectric material [J]. International journal of solids and structures, 1992,29:293 - 308.

[196] DUNN M L. Electroelastic Green's functions for transversely isotropic piezoeelectric media and their application to the solution of inclusion and inhomogeneity problems [J], International journal of Engineering Science, 1994,32:119 - 131.

[197] DUNN M L, TAYA M. An analysis of piezoelectric composite materials containing ellipsoidal inhomogeneities [J]. Proceedings of the Royal Society of Lond, A, 1993,443:265 - 287.

[198] MI KATA Y. Determination of piezoelectric Eshelby tensor in transversely isotropic piezoelectric solids [J]. International journal of engineering science, 2000,38:605 - 641.

[199] TIERSTEN H F. Linear Piezoelectric Plate Vibrations [M]. New York.: Plenum, 1969.

[200] HEYLIGER P. Exact solutions for simply supported laminated piezoelectric plates [J]. Journal of applied mechanics, 1997,64:299 - 306.

[201] HEYLIGER P, BROOKS S. Free vibration of piezoelectric laminates in cylindrical bending [J]. International journal of solids and structures, 1995,32:2945 - 2960.

[202] KROMMER M, IRSCHIK H. A Reissner — Mindlin — type plate theory including the direct piezoelectric and the pyroelectric effect [J]. Acta mechanica, 2000,141:51 - 69.

[203] MITCHELL J A, REDDY J N. A refined hybrid plate theory for composite laminates with piezoelectric laminae [J]. International journal of solids and structures, 1995,32:2345 - 2367.

[204] SOHN J W, CHOI S B, LEE C H. Active vibration control of smart hull structure using piezoelectric composite actuators [J]. Smart materials and structures, 2009,18:1 - 14.

[205] CAO Z J, WEN B C, KUANG Z-B. Feedback control of intelligent structures with uncertainties and its robustness Analysis [J], Structural engineering and mechanics, 2003,16:327 - 340.

[206] LESTER H C, LEFEBVRE S. Piezoelectric actuator models for active sound and vibration control of cylinders [J]. Journal of intelligent material system and structures, 1993,4:295 - 306.

[207] CRAWLEY E F, DE LUIS J. Use of piezoelectric avtuators as elements of intelligent structures [J]. AIAA journal, 1987,25:1373 - 1385.

[208] CARWLEY E, LAZARUS K B. Induced strain actuation of isotropic and anisotropic plates [J]. AIAA Journal, 1991,29:944 - 951.

[209] 匡震邦.弹性薄板的三阶近似方程[J].西安交通大学学报,1980,14:1 - 9.

[210] MAURINI C, POUGET J, DELL'ISOLA F. On a model of layered piezoelectric beams including transverse effect [J]. International journal of solids and structures, 2004,41:4473 - 4502.

[211] Timoshenko S, Woinowsky-Krieger, S. Theory of plates and shells [M], New York, McGraw-Hill Book Company, 1959.

[212] 胡海昌.弹性力学的变分原理及其应用[M],北京,科学出版社,1981.

[213] Moon E C, Pao Y H. Magnetoelastic buckling of a thin plate, ASME Journal of applied mechanics [J], 1968,35:53 - 68.

[214] Pao Y H, Yeh C S. A Linear Theory for soft ferromagnetic elastic bodies [J], International journal of engineering science, 1973,11:415 - 436.

[215] Zhou Y H, Miya K, A theoretical prediction of natural frequency of a ferromagnetic beam plate with low susceptibility in an in-plane magnetic field [J], ASME Journal of applied mechanics, 1998,65:121 - 126.

[216] ZHOU Y H, ZHENG X J. A general expression of magnetic force for soft ferromagnetic plates in complex magnetic field [J]. International journal of engineering science, 1997,35:1405 - 1417.

[217] Eringen A C, Theory of electromagnetic elastic plate [J], International journal of engineering science, 1989,27:363 - 375.

[218] CHEN C Q, SHEN Y P, WANG X M. Exact solution of orthotropic cylindrical shell with Piezoelectric layers under cylindrical bending [J]. International journal of solids and structures,. 1996,33:4481 - 4494.

[219] KAPURIA S, SENGUPTA S, DUMIR C. Assessment of shell theories for hybrid piezoelectric cylindrical shell under electromechanical load [J]. International journal of mechanical science, 1998,40: 461 - 477.

[220] CHEN W Q, BIAN Z G, Lv C F, DING H J. 3Dfree vibration analysis of a functionally graded piezoelectric hollow cylinder filled with compressible fluid [J]. International journal of solids and structures, 2004,41:947 - 964.

[221] CHEN W Q, DING H J, GUO Y M, YANG Q D. Free vibration of fluid-filled orthogonal cylindrical shells [J]. Journal of engineering mechanics, 1997,123:1130 - 1133.

[222] WU X, CHEN C, SHEN Y, TIAN X. A high order theory for functionally graded piezoelectric shells [J]. International journal of solids and structures, 2002,39:5325 - 5344.

[223] PARK S, SUN C T. Fracture criteria for piezoelectric ceramics [J]. Journal of the America Ceramic Society, 1995,78:1475 - 1480.

[224] Fang D, Zhang Z, Soh A. K. , Lee K. L. , Fracture criteria of piezoelectric ceramics with defects [J], Mechanics of Materials, 2004,36:917 - 928.

[225] FU R, ZHANG T Y. Influences of temperature and electric field on the bending strength of lead zirconate titanate ceramics [J]. Acta Materialia, 2000,48:1729 - 1740.

[226] JIANG L Z, SUN C T. Analysis of indentation cracking in piezoceramics [J]. International journal of solids and structures, 2001,38:1903－11918.

[227] WANG H, SINGH R N. Crack propagation in piezoelectric ceramics: Effects of applied electric fields [J]. Journal of applied physics, 1997,81:7471－7479.

[228] GAO H, ZHANG T Y, TONG P. Local and global energy release rates for an electrically yielded crack in a piezoelectric ceramic [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1997,45:491－510.

[229] FULTON C C, GAO H. Electrical nonlinearity in fracture of piezoelectric ceramics [J]. Applied Mechanics Review, 1997,50:556－563.

[230] Zhu T, Yang W. Toughness variation of ferroelectrics by polarization switch under nonuniform electric field [J]. Acta Materialia, 1997,45:4695－4702.

[231] Yang W, Zhu T. Switch-toughnening of ferroelectrics subjected to electric fields [J], Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1998,46:291－311.

[232] McCmeeking R M, Evans A G. Mechanics of transformation-toughening in brittle materials [J], Journal of the America Ceramic Society, 1982,65:242－246.

[233] Budiansky B, Hutchinson J W, Lambropoulos J C. Continuum theory of dilatant transformation toughening in ceramics [J], International journal of solids and structures, 1983,19:337－355.

[234] Zeng X. Rajapakse R K N D, Domain switching induced fracture toughness variation in ferroelectrics [J], Smart Materials and Structures, 2001,10:203－211.

[235] Rajapakse R K N D, Zeng X. Toughening of conducting cracks due to domain switching [J], Acta Materialia, 2001,49:877－885.

[236] Huang ZY, Kuang ZB. On the influence of the switching wake on the facture toughness of ferroelectric materials [J], Smart Materials & Structrues, 2003,12:1017－1022.

[237] Fang D, Liu B, Hwang K. Energy analysis on fracture of ferroelctric ceramics [J], International Journal of Fracture, 1999,100:401－408.

[238] GRIFFITH A A. The phenomena of rpture and flow in solids [J]. philosophical transactions of the Royal Society of Lond, A 1921,221:163－197.

[239] SUO Z. Models for breakdown-resistant dielectric and ferroelectric ceramics [J]. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 1993,41:1155－1176.

[240] Sih. G C. Mechanics of fracture [M], Vols. Ⅰ－Ⅶ, Sijhoff and Noordhoof, The Netherlands, 1973－1981.

[241] SHEN S, NISHIOKA T. Fracture of piezoelectric materials: energy density criterion [J]. Theoretical and applied fracture mechanics, 2000,33:57－65.

[242] ZUO J Z, SIH G C. Energydensity theory formulation and interpretation of cracking behavior for piezoelectric ceramics [J]. Theoretical and applied fracture mechanics, 2000,34:17－33.

[243] CHEN J, LIU Z X, ZOU Z G. Crack initiation behavior of functionally graded piezoelectric material: prediction by the strain energy density criterion [J]. Theoretical and applied fracture mechanics, 2004, 41:63－82.

[244] KUANG Z-B, ZHOU Z D, CHEN Y, ZHAO S X. Eigen — material constants, mode and failure criterion for piezoelectric media [J]. International Journal of Applied Electromagnetics and Mechanics, 2003,18:235－250.

[245] 陈绍汀,弹性力学的几个新概念及其一种应用,力学学报[J],1984,16:259－274.

[246] РЫХЛЕВСКИЙ Я. О законе Гука [J]. Прикладная математика и механика, 1984,48:420－435.

[247] ARRAMON Y P, MCHRABADI M M, MARTIN D W, COWIN S C. A multi-dimensional anisotropic strength criterion based on Kelvin modes [J]. International journal of solids and structures, 2000,37: 2915－2935.

[248] ZHANG T Y, ZHAO M, LIU G. Failure behavior and failure criterion of conductive cracks (deep

notches) in piezoelectric ceramics, I — the charge-free zone model [J]. Acta Materialia, 2004,52: 2013 -2024; II - experimental verification, Acta Materialia, 2004,52:2025 - 2035.

[249] ZHANG T Y, WANG T, ZHAO M. Failure behavior and failure criterion of conductive cracks (deep notches) in thermally depoled PZT-4 ceramics [J]. Acta Materialia, 2003,51:4881 - 4895.

[250] 匡震邦,顾海澄,李中华.材料的力学行为[M].北京:高等教育出版社,1998.

[251] OHR S M. An electron microscope study of crack tip deformation and its impact on the dislocation theory of fracture [J]. Materials science and engineering, 1985,72:1 - 35.

[252] MAJUMDAR B S, BURNS S J. A Griffith crack shielded by a dislocation pile -up [J]. International journal of fracture, 1983,21:229 - 240.

[253] Heyer V, Schneider G A, Balke H, Drescher J, Bahr H A. A fracture criterion for conducting cracks in homogeneously poled PZT - PIC 151 ceramics [J], Acta Materialia, 1998,46:6615 - 6622.

[254] BEOM H G, KIM Y H. Application of J integral to breakdown analysis of a dielectric material [J]. International journal of solids and structures, 2008,45:6045 - 6055.

[General Information]
书名=电弹性理论
作者=匡震邦编著
页数=461
SS号=12870869
DX号=
出版日期=2010.04
出版社=上海交通大学出版社